Ph.D. Qualifiers: Electrodynamics 2024-1 (Maximum points: 100)

Solve any two of the *pregrado* and any two of the *posgrado* questions. Indicate which two of the problems from the *pregrado* and *posgrado* category you prefer to be graded.

1. (*20 points, pregrado*) The potential resulting from a point charge q_0 placed at the origin in a conducting medium is given by:

$$V(r) = q_0 \frac{e^{-r/a}}{r}$$

where the constant a depends on the material parameters. Find
(a)the total charge $Q(r)$, within a sphere of radius r,
(b)the induced charge density (i.e. charge density per unit volume) $\rho_{ind}(\mathbf{r})$ in terms of the potential.
Hint: Use

$$q_{ind} = \int_0^\infty dr \frac{dQ(r)}{dr}$$

2. (*20 points, pregrado*) Using the continuity equation, together with Ohm's law for current density $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ and Gauss's law, show that any initial free charge density $\rho(t)$ (i.e. charge density per unit volume) on a conductor decreases exponentially with time.

3. (*20 points, pregrado*) In a region of empty space, the magnetic field is described by

$$\vec{B} = (B_0/c)\, e^{-ax} \sin(ky - \omega t)\, \hat{z}\,.$$

Calculate $\vec{E}$.
Hint: Express $\vec{B}$ as $\Im m((B_0/c)\, e^{-ax}\, e^{i(ky-\omega t)})\hat{z}$.

4. (*30 points, posgrado*) A *nonrelativistic* particle of charge ze, mass m, and energy E makes a head-on collision with a fixed central force field of finite range. The interaction is repulsive and described by a potential $V(r)$.

(i) Find the total energy radiated in terms of $V(r)$, $V(r_{min})$ and the constants, z, e, m and c. r_{min} is the distance of closest approach.

Help: You can begin with the Larmor formula and integrate over time to find the energy radiated.
The trajectory of the particle is symmetric around the point of closest approach given by r_{min}.

For the head-on collision, $E = (1/2)m\dot{r}^2 + V(r)$.

(ii) If the interaction is a Coulomb potential, $V(r) = zZe^2/r$, what is the total energy radiated? Your answer should be in terms of the constants and the velocity v_0 of the charged particle at infinity.

Help: From energy conservation,

$$\frac{zZe^2}{r_{min}} = \frac{1}{2} m v_0^2$$

5. (*30 points, posgrado*) (a) (i) Show that $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ is an invariant.
(ii) Find the expression for $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ in terms of the electric and magnetic fields.
Hint: Note that going from $F^{\mu\nu}$ (contravariant) to $F_{\mu\nu}$ (covariant), the only change is $\vec{E} \to -\vec{E}$.
(b) The dual field strength tensor is defined as $G^{\mu\nu} = (1/2)\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ and $F^{\mu\nu}G_{\mu\nu}$ is also an invariant. Find the expression for $F^{\mu\nu}G_{\mu\nu}$ in terms of the electric and magnetic fields.
(c) Obtain the continuity equation directly from the Maxwell's equations $\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\mu$.

6. (*30 points, posgrado*) Use the following Lagrangian

$$\mathcal{L} = \frac{mc^2}{2} u^\mu u_\mu + q u^\mu A_\mu(x)$$

for a particle with rest mass m and charge q in an electromagnetic field described by the four potential A_μ to derive, with the help of the variational principle

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} \mathcal{L}(x^\mu, u^\mu)\, d\tau = 0$$

with fixed endpoints x_0 and x_1, a covariant equation of motion for the particle in the field.
Hint: The four-velocity

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

which means that we can write the variation of u^μ as a total derivative with respect to τ:

$$\delta u^\mu = \delta\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\right) = \frac{d}{d\tau}(\delta x^\mu)$$

Note: Necessary formulae such as the expression for the field strength tensor, Larmor's formula and integrals will be provided to the students during the exam.

Solution : PhD. Qualifiers 2024-1

Electrodynamics

1) $$V(r) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^{-r/a}}{r} \Rightarrow -\vec{\nabla}V = -q_0 \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{e^{-r/a}}{r}\right]$$

$$= +q_0\, e^{-r/a}\left\{\frac{1}{ra} + \frac{1}{r^2}\right\}$$

So, $$\vec{E} = +q_0 \frac{e^{-\frac{r}{a}}}{r^2}\left[1 + \frac{r}{a}\right]\hat{r}$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_0 \int \frac{e^{-r/a}}{r^2}\left(1+\frac{r}{a}\right) r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$= 4\pi\, q_0\, e^{-r/a}\left(1 + \frac{r}{a}\right)$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$ Therefore, the total charge within a sphere of radius r, is,

$$\Rightarrow \boxed{Q(r) = q_0\, 4\pi\epsilon_0\, e^{-r/a}\left(1+\frac{r}{a}\right)}$$

$$q_{ind} = \int_0^\infty \frac{d}{dr}Q(r)\, dr = \int_0^\infty 4\pi r^2 \cdot \frac{1}{4\pi r^2}\frac{d\,Q(r)}{dr}\, dr$$

$$= \int_0^\infty d^3r \left[\frac{1}{4\pi r^2}\frac{d\,Q(r)}{dr}\right]$$

implying that $$\rho_{ind}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{d\,Q(r)}{dr}$$

$$= -\frac{q_0\epsilon_0}{a^2}e^{-r/a} = -\frac{\epsilon_0}{a^2}V(r)$$

2. $\vec{J} = \sigma \vec{E} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \sigma \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$

$$= \sigma \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

But $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$ $\Rightarrow -\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho$

Integrating this equation

$$\ln \rho(t) - \ln \rho(0) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} t$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho(t) = \exp\left(-\frac{\sigma}{\epsilon_0} t\right) \rho(0).}$$

3. $\vec{B} = \frac{B_0}{c} e^{-ax} \sin(ky-\omega t)\,\hat{z}$

Let us write $\tilde{B} = \frac{B_0}{c} e^{-ax} e^{i(ky-\omega t)}\,\hat{z}$

So that $\vec{B} = \mathrm{Im}\,\tilde{B}$.

$$\vec{\nabla}\times\tilde{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\tilde{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2}(-i\omega)\tilde{E}$$

$$\Rightarrow \tilde{E} = \frac{ic^2}{\omega}\vec{\nabla}\times\tilde{B}$$

$$= \frac{ic^2}{\omega}\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \tilde{B}_z \end{vmatrix}$$

$$= \frac{ic^2}{\omega}\left[\hat{x}\frac{\partial\tilde{B}}{\partial y} - \hat{y}\frac{\partial\tilde{B}}{\partial x}\right]$$

$$= \frac{ic^2}{\omega}\left[\hat{x}\frac{B_0}{c}e^{-ax}(ik)e^{i(ky-\omega t)} - \hat{y}\frac{B_0}{c}(-a)e^{-ax}e^{i(ky-\omega t)}\right]$$

$\frac{\omega}{k} = c$, $\therefore$ $\tilde{E} = -\underbrace{\hat{x}\frac{B_0}{c}e^{-ax}e^{i(ky-\omega t)}}_{\tilde{E}_x} + \underbrace{\hat{y}\frac{a\,i B_0}{k}e^{-ax}e^{i(ky-\omega t)}}_{\tilde{E}_y}$

Hence, $E_x = -B_0 e^{-ax}\sin(ky-\omega t)$

$E_y = \frac{a}{k}e^{-ax}B_0\cos(ky-\omega t)$

$E_z = 0$

4/ Starting with the Larmor's formula,

$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}$$

with $q = ze$, $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, $m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

So, $$P = \frac{\mu_0 (ze)^2}{6\pi c m^2} \left|\frac{d\vec{p}}{dt}\right|^2$$

However, we can use Newton's law to write

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = -\hat{r}\frac{dV}{dr}$$

and $$P = \frac{\mu_0 (ze)^2}{6\pi c m^2}\left(\frac{dV}{dr}\right)^2$$

Energy radiated $$\Delta E = \int_{-\infty}^{\infty} P(t)\,dt$$

$$= 2\int_{r_{min}}^{\infty} \frac{P}{\frac{dr}{dt}}\,dr$$

$\frac{dr}{dt}$ can be obtained from energy conservation:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V(r)$$

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2(E - V(r))}{m}}$$

$$\Delta E = 2 \frac{\mu_0 (ze)^2}{6\pi c m^2} \int_{r_{min}}^{\infty} \left(\frac{dV}{dr}\right)^2 \frac{dr}{\sqrt{\frac{2[E - V(r)]}{m}}}$$

At closest approach $E = V(r_{min})$

Therefore,

$$\Delta E = \frac{\mu_0 (ze)^2}{3\pi c m^2} \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_{min}}^{\infty} \left(\frac{dV}{dr}\right)^2 \frac{dr}{\sqrt{V(r_{min}) - V(r)}}$$

Now, $V(r) = \frac{zZe^2}{r}$, so $\frac{dV}{dr} = -\frac{zZe^2}{r^2}$

$$\Delta E = \frac{\mu_0 (ze)^2}{3\pi c m^2} \sqrt{\frac{m}{2}} \left(-zZe^2\right)^2 \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{1}{r^4} \frac{dr \sqrt{r_{min} r}}{\sqrt{r - r_{min}}} \frac{1}{\sqrt{zZe^2}}$$

Let $x = \frac{r}{r_{min}} \Rightarrow dx\, r_{min} = dr$

When $r \to r_{min}$ $\quad x \to 1$

Hence,
$$\Delta E = \frac{\mu_0 (ze)^2}{3\pi c m^2} \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{(zZe^2)^2}{\sqrt{zZe^2}} \frac{1}{r_{min}^{5/2}} \underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{x^{7/2}} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}}_{16/15}$$

Now we replace for r_{min}.

From energy conservation we know

$$\frac{zZe^2}{r_{min}} = \frac{1}{2} m v_0^2$$

Therefore, $$r_{min} = \frac{2zZe^2}{m v_0^2}$$

$$\sqrt{r_{min}} = \sqrt{\frac{2zZ}{m}} \frac{e}{v_0}$$

$$r_{min}^{5/2} = \left(\sqrt{\frac{2zZ}{m}}\right)^5 \frac{e^5}{v_0^5}$$

Putting everything together and using
$\int_1^\infty \frac{1}{x^{7/2}} \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \frac{16}{15}$, we finally get,

$$\Delta E = \frac{4\mu_0 m}{90\pi c} \frac{z}{Z} v_0^5$$

5.

(a)(i) $F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} = \Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda_\nu{}^\beta F_{\alpha\beta} \Lambda^\mu{}_\lambda \Lambda^\nu{}_\kappa F^{\lambda\kappa}$

However, $\Lambda_\alpha{}^\mu \Lambda^\alpha{}_\nu = \delta^\mu_\nu$

So, $F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} = \delta^\alpha_\lambda \delta^\beta_\kappa F_{\alpha\beta} F^{\lambda\kappa} = F_{\lambda\kappa} F^{\lambda\kappa}$ — proved.

(ii) $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \sum_\nu F_{0\nu} F^{0\nu} + \sum_\nu F_{1\nu} F^{1\nu} + \sum_\nu F_{2\nu} F^{2\nu} + \sum_\nu F_{3\nu} F^{3\nu}$

However, all diagonal elements of $F^{\mu\nu}$ are zero.

Hence, $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \sum_{i=1,2,3} F_{0i} F^{0i} + \sum_{i=0,2,3} F_{1i} F^{1i} + \sum_{i=0,1,3} F_{2i} F^{2i} + \sum_{i=0,1,2} F_{3i} F^{3i}$

$$= \left(-\frac{E_x^2}{c^2} - \frac{E_y^2}{c^2} - \frac{E_z^2}{c^2}\right) + \left(-\frac{E_x^2}{c^2} + B_z^2 + B_y^2\right) + \left(-\frac{E_y^2}{c^2} + B_z^2 + B_x^2\right) + \left(-\frac{E_z^2}{c^2} + B_y^2 + B_x^2\right)$$

$$= 2\left(\vec{B}^2 - \frac{\vec{E}^2}{c^2}\right)$$

Similarly one can show

$$G_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{4}{c} \vec{E} \cdot \vec{B}$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\mu$$

$$\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 \partial_\mu J^\mu$$

$\downarrow$

symmetric tensor and $F^{\mu\nu}$ is antisymmetric

Therefore, $\partial_\mu J^\mu = 0$

$\longrightarrow$ continuity equation.

~~[illegible]~~ 6) $\mathcal{L} = \frac{mc^2}{2} u^\mu u_\mu + q\, u^\mu A_\mu (x^\nu)$ [illegible]

for a particle with rest mass m and charge q,
A_μ – four-potential

$$\delta \int_{x_0^\mu}^{x_1^\mu} \mathcal{L}\, d\tau = \delta \int_{x_0^\mu}^{x_1^\mu} \left(\frac{mc^2}{2} u^\mu u_\mu + q\, u^\mu A_\mu \right) d\tau$$

$$= \int d\tau \left[\frac{mc^2}{2} \frac{\partial}{\partial u^\mu} (u^\mu u_\mu)\, \delta u^\mu + q\left(A_\mu \delta u^\mu + u^\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \delta x^\nu\right)\right]$$

$$= \int_{x_0^\mu}^{x_1^\mu} \left[mc^2 u_\mu \delta u^\mu + q\left(A_\mu \delta u^\mu + u^\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \delta x^\nu \right)\right] d\tau = 0 \quad -①$$

The four velocity $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$, $\delta u^\mu = \delta\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\right) = \frac{d}{d\tau}(\delta x^\mu)$ —②

Inserting this into ①

$$\delta \int \mathcal{L}(x^\mu, u^\mu)\, d\tau = \int_{x_0^\mu}^{x_1^\mu} \left(mc^2 u_\mu \frac{d}{d\tau}(\delta x^\mu) + q\, A_\mu \frac{d}{d\tau}(\delta x^\mu) + q\, u^\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \delta x^\nu \right) d\tau \quad -③$$

Partial integration of the first two terms in the integral in the right hand side of ③ gives,

$$\delta \int_{x_0^\mu}^{x_1^\mu} \mathcal{L}(x^\mu, u^\mu)\, d\tau = \int_{x_0^\mu}^{x_1^\mu} \left(-mc^2 \frac{du_\mu}{d\tau} \delta x^\mu - q \frac{dA_\mu}{d\tau} \delta x^\mu + q\, u^\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \delta x^\nu \right) d\tau \quad -④$$

(since the variation δx^μ at the fixed end points vanishes)

Changing the dummy index from μ to ν in the first two terms in the integrand on the right hand side of ④ gives,

$$\delta \int_{x_0^\mu}^{x_1^\mu} \mathcal{L}(x^\mu, u^\mu)\, d\tau = \int_{x_0^\mu}^{x_1^\mu} \left(-mc^2 \frac{du_\nu}{d\tau} - q\frac{dA_\nu}{d\tau} + q u^\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\right) \delta x^\nu d\tau \qquad -(5)$$

Now we can rewrite $\frac{dA_\nu}{d\tau}$ as,

$$\frac{dA_\nu}{d\tau} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} u^\mu \qquad -(6)$$

Inserting (6) into (5)

$$\delta \int_{x_0^\mu}^{x_1^\mu} \mathcal{L}(x^\mu, u^\mu)\, d\tau = \int_{x_0^\mu}^{x_1^\mu} \left[-mc^2 \frac{du_\nu}{d\tau} + q u^\mu \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}\right)\right] \delta x^\nu d\tau = 0$$

$\Rightarrow$ expression in [ ] must be zero since the variation δx^ν is arbitrary along x_0^μ to x_1^μ.

Hence,

$$mc^2 \frac{du_\nu}{d\tau} = q u^\mu \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad mc^2 \frac{du_\nu}{d\tau} = q\, u^\mu F_{\nu\mu}$$

— covariant equation of motion.

Examen de Conocimientos – Mecánica Analítica

Departamento de Física, Universidad de los Andes
Programa de Doctorado en Ciencias – Física

Semestre 2024-2

Nombre y Código: ______________________________

Instrucciones

El examen abarca dos partes: pregrado y posgrado. Para cada parte: (i) resuelva dos de los tres problemas propuestos; (ii) los problemas tienen el mismo valor.

1. Los problemas deben ser resueltos en hojas separadas.
2. No se dará crédito extra si entrega la solución a un tercer problema. En tal caso, solo dos soluciones se tendrán en cuenta, a voluntad del calificador.
3. Para obtener el puntaje total debe tener un desarrollo claramente explicado y apropiadamente justificado; sea breve pero preciso.
4. El examen se debe resolver de forma individual.
5. No se permite el uso de libros, apuntes o dispositivos electrónicos.
6. El incumplimiento de estas instrucciones llevará a una nota final de cero.
7. **Duración del examen**: tres horas.

Nota: Durante el examen se proporcionarán a los estudiantes las fórmulas y expresiones necesarias para resolver los problemas.

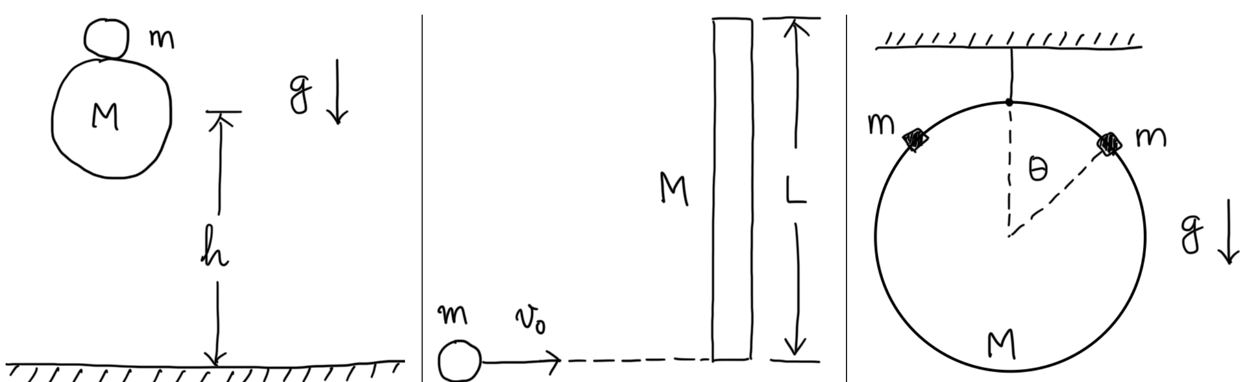
Pregunta	Puntos	Nota
1. Pelotas que rebotan	20	
2. Masa incrustada en varilla	20	
3. Cuentas en anillo colgante	20	
4. Bola sobre cono	30	
5. Partícula en potencial cuártico	30	
6. Péndulo suspendido de un carro	30	
Total:	100	

1. Preguntas de pregrado

Pregunta 1. Pelotas que rebotan .... (20 puntos)
Una pelota de squash de masa m se encuentra sobre una de baloncesto de masa M. Suponga que son uniformes y están alineadas a lo largo de una vertical, que corresponde a la dirección de la fuerza gravitacional debida a la tierra. La relación entre las masas es $M/m \gg 1$. Las pelotas son liberadas desde el reposo hacia el piso desde una altura h; ver figura de abajo. ¿Cuál es la altura máxima de cada pelota después de la primera colisión con el piso? Considere todas las colisiones como elásticas. Intuitivamente, ¿cómo cambia el resultado anterior si únicamente la colisión con el piso es perfectamente inelástica.

Pregunta 2. Masa incrustada en varilla .... (20 puntos)
Una esfera de masa m que se mueve horizontalmente, sin fricción y con velocidad v_0, se incrusta en uno de los extremos de una varilla (longitud L y masa M) perpendicular a la trayectoria de la masa m. Imagine que la posición de la varilla coincide con uno de los ejes de algún sistema coordenado apropiado; ver figura de abajo. Justifique cuáles cantidades son conservadas durante la dinámica del sistema. Por ejemplo, ¿se conserva la energía mecánica total? Encuentre la velocidad de traslación y de rotación del sistema después de que los objetos hayan chocado.

Pregunta 3. Cuentas en anillo colgante .... (20 puntos)
Un anillo de masa M cuelga de una cuerda ideal (es decir, inextensible y sin masa) que, a su vez, cuelga del techo. Dos cuentas, o chaquiras, cada una de masa m, se deslizan sobre el anillo sin fricción. Las cuentas se liberan al mismo tiempo desde la parte superior del anillo y se deslizan hacia abajo por lados opuestos; ver figura de abajo. Demuestre que el anillo comenzará a subir si $m \geqslant 3M/2$ y encuentre el ángulo en el que esto ocurre. ¿Existe un ángulo máximo en el que el anillo empieza a subir sin importar el valor de las masas? Responda esta última pregunta sin hacer cálculos.



(a) Pelotas que rebotan. (b) Masa incrustada en varilla. (c) Cuentas en anillo colgante.

Figura 1: Diagramas referentes a los problemas de pregrado.

2. Preguntas de posgrado

Pregunta 4. Bola sobre cono .... (30 puntos)

Una bola está restringida a moverse sobre la superficie de un cono circular recto bajo la influencia de la fuerza gravitacional, ver figura adjunta. El vértice del cono apunta hacia abajo y el semi ángulo de apertura es β. Adicionalmente, el vector gravedad es paralelo al eje de revolución del cono. Trate la aceleración de la gravedad como una constante, a la bola como una partícula puntual de masa m, y suponga que no hay fuerzas de fricción o de arrastre.

(a) Determine el lagrangiano de la bola usando coordenadas cilíndricas como coordenadas generalizadas. Así, r es la distancia perpendicular de la bola al eje del cono, z es la posición vertical con respecto al vértice del cono, y θ es el ángulo azimutal.

(b) Calcule los momentos generalizados, (p_r, p_θ, p_z), conjugados a las coordenadas (r, θ, z). Halle el hamiltoniano en términos de las coordenadas y momentos conjugados.

(c) Usando el hamiltoniano encontrado anteriormente, deduzca las ecuaciones de movimiento de la bola restringida a moverse en la superficie del cono.

(d) Encuentre al menos dos cantidades conservadas en el movimiento de la bola. Explique brevemente cuáles leyes de conservación están asociadas a estas cantidades y cuáles son las respectivas simetrías.

(e) Suponga que la bola sigue una trayectoria perfectamente circular de radio $r = r_0$. Muestre que la frecuencia angular de la órbita $\omega = \dot{\theta}$ está dada por $\omega^2 = g \cot \beta / r_0$.

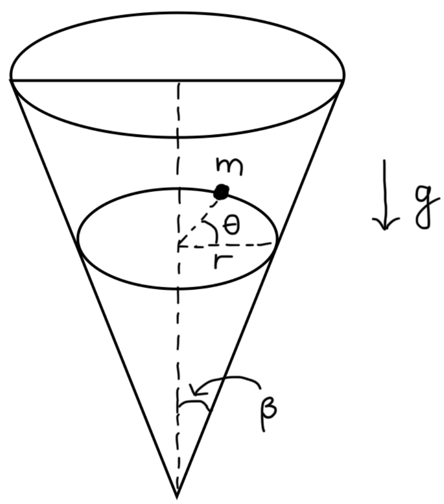


Figura 2: Diagrama referente a la Pregunta 4. Bola sobre cono.

Pregunta 5. Partícula en potencial cuártico .... (30 puntos)

Una partícula de masa m se mueve a lo largo de una dimensión (eg. la dirección $\hat{x}$) bajo la acción del potencial

$$U(x) = -\alpha x^2 + \beta x^4,$$

donde las constantes $\alpha, \beta > 0$.

(a) Encuentre el hamiltoniano del sistema como función de la coordenada x y el momento generalizado p: $H = H(x, p)$. Encuentre también las ecuaciones de movimiento usando las ecuaciones de Hamilton.

(b) Determine los puntos de equilibrio del sistema y justifique si estos son estables o inestables. Si existen puntos de equilibrio estables, calcule las frecuencias, ω, de pequeñas oscilaciones alrededor de esos puntos.

(c) Dibuje esquemáticamente en el espacio de fase las trayectorias de la partícula, cuando la energía mecánica total es (i) positiva y (ii) negativa. Puede recurrir a simetrías de H para poder predecir las trayectorias.

Pregunta 6. Péndulo suspendido de un carro . . . . (30 puntos)
Considere un carro de masa km, donde $k > 0$ es una constante adimensional, y un péndulo simple de masa m y longitud L que es libre de oscilar, mientras que se encuentra sujeto al carro (ver figura adjunta). Suponga que el carro se mueve únicamente de forma horizontal y que el péndulo siente la fuerza gravitacional hacia abajo.

(a) Deduzca el lagrangiano del sistema carro-péndulo usando la posición horizontal del carro y el ángulo de inclinación del péndulo como coordenadas generalizadas.

(b) Usando el lagrangiano encontrado anteriormente, encuentre un nuevo lagrangiano efectivo, válido para oscilaciones pequeñas alrededor de $\theta = 0$. Derive las ecuaciones de Euler-Lagrange para este caso límite.

(c) Determine las frecuencias y modos normales del sistema carro-péndulo. Haga un diagrama esquemático de estos modos.

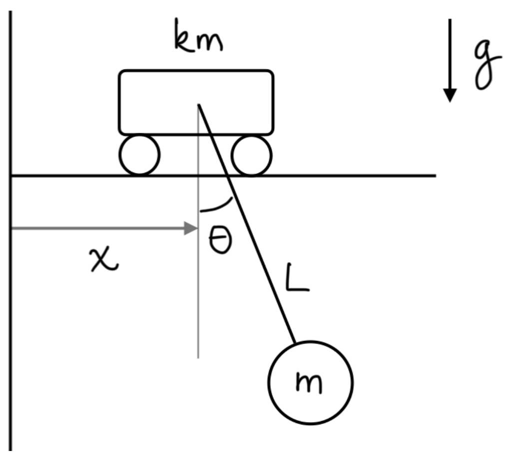
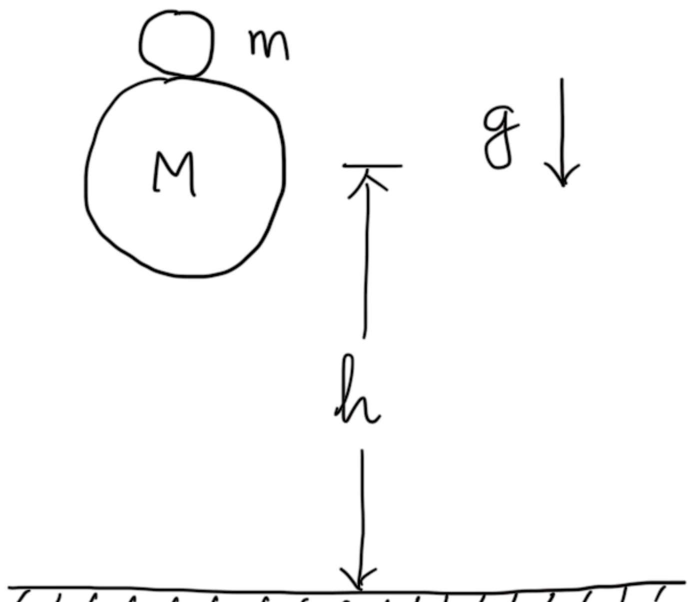


Figura 3: Diagrama referente a la Pregunta 6. Péndulo suspendido de un carro.

P1. Pelotas que rebotan



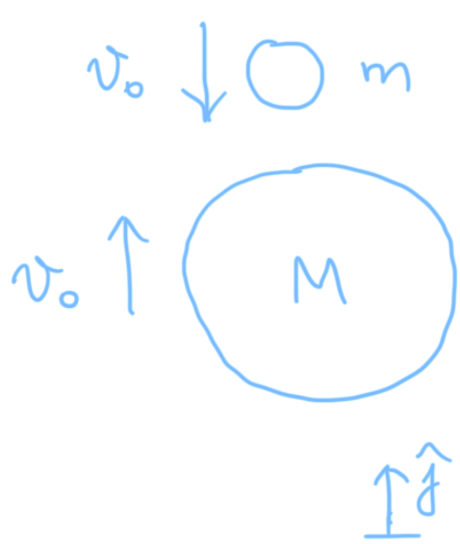
Considerando el sistema como piso + pelotas, se conserva la energía mecánica y el momento lineal.

Por conservación de la energía, las pelotas llegan al piso con una rapidez

$$v_0 = \sqrt{2gh} \quad \text{(independiente de } M, m)$$

Considerando el piso como un objeto de masa infinita, conservación del momento dice que M rebota hacia arriba con una rapidez v_0, donde el choque se asumió como elástico.

El estado del sistema justo después es $\longrightarrow$



Asumiendo que el choque entre las pelotas es elástico, conservación del momento dicta

$$P_0 = (M-m)v_0 = Mv_M + mv_m = P_f,$$

y conservación de la energía dice

$$E_0 = (M+m)v_0^2 = Mv_M^2 + mv_m^2 = E_f$$

Reemplazando en esta ec. v_M se obtiene:

$$(M+m)v_0^2 = M\left(v_0 - \frac{m}{M}(v_0+v_m)\right)^2 + m v_m^2$$

que se puede reducir a

$$v_0^2 = \frac{m}{M}(v_0+v_m)^2 + v_m^2 - 2(v_0+v_m)$$

$$\simeq v_m^2 - 2(v_0+v_m), \qquad \text{donde } \frac{M}{m} \gg 1$$

o

$$\left(\frac{v_m}{v_0}\right)^2 - 2\left(\frac{v_m}{v_0}\right) - 3 = 0;$$

la única sol. física para la rapidez de m, luego del choque con M, es $v_m = 3v_0$.

Usando una vez más conserv. de la energía, la pelota de squash sube hasta una altura

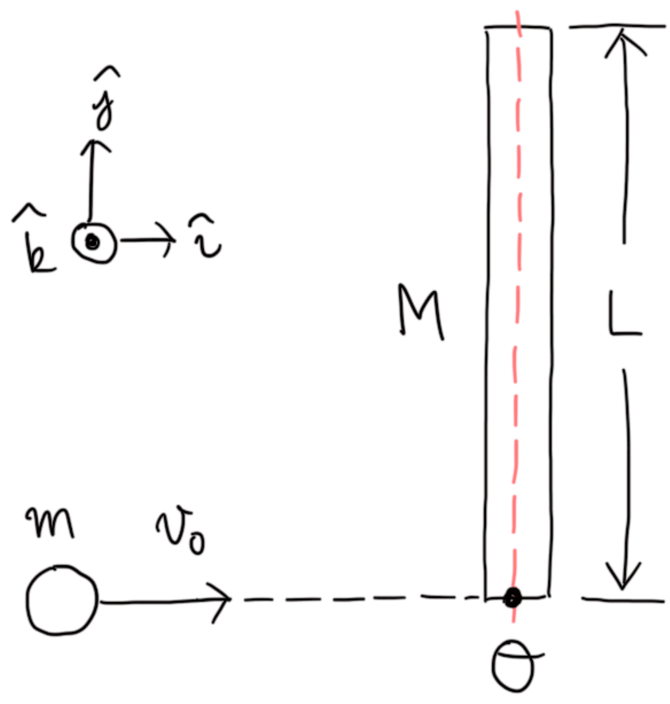
$$E_0' = \frac{1}{2}m(3v_0)^2 = mgh_m = E_f'$$

$$\frac{1}{2}m\,9\,2gh =$$

$$\Rightarrow \boxed{h_m = 9h}$$

Si la colisión con el piso es perfectamente inelástica, $v_M = 0$. Entonces para m ocurre una colisión elástica de manera efectiva con el piso, y $h_m = h$.

P2. Masa incrustada en varilla



Considerando el sistema como esfera + varilla, no existen fuerzas externas $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ tal que el momento lineal, $\vec{p}$, se conserva.

Por otro lado, el momento angular, $\vec{L}$, se conserva a lo largo de la línea punteada roja, dado que los torques debido a las fuerzas de la esfera sobre la varilla, y viceversa, se anulan. Entonces $\sum \vec{\tau} = \vec{0}$.

Antes del choque $p_0 = m v_0$ y después $p_f = (m+M)v$. Sabiendo que $\vec{p}_0 = \vec{p}_f$:

$$v = \frac{m}{m+M} v_0 .$$

Esta es la velocidad del nuevo centro de masa después de la colisión (inelástica).

La rotación después del choque se obtiene a partir de $\vec{L}_0 = \vec{L}_f$, calculado alrededor del nuevo centro de masa. Respecto al origen O,

este se encuentra en la posición $\vec{R}$

este se encuentra en la posición R

$$R = \frac{ML/2 + m \cdot 0}{m+M} = \frac{M}{m+M}\frac{L}{2} \Rightarrow \vec{R} = R\hat{j}$$

Entonces, $L_o = m v_o R$ y $L_f = I_{eff}\,\omega_f$, donde I_{eff} es el momento de inercia alrededor de $\vec{R}$. La vel. angular final es

$$\omega_f = \frac{mR}{I_{eff}} v_o$$

I_{eff} se calcula usando teorema de ejes paralelos:

$$I_{eff} = \underbrace{mR^2}_{\text{esfera}} + \underbrace{\underbrace{\frac{1}{12}ML^2}_{\text{varilla}} + M\left(\frac{L}{2} - R\right)^2}_{\text{ejes paralelos}}$$

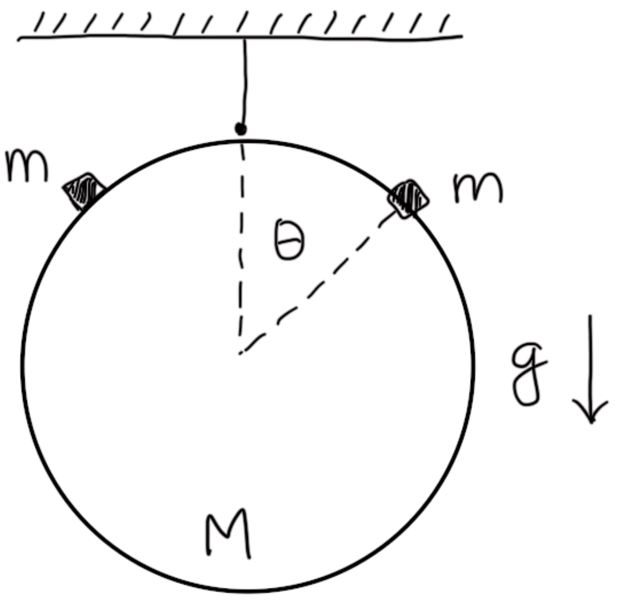
$$= (m+M)R^2 + \frac{1}{3}ML^2 - MRL$$

$$= \frac{4m+M}{m+M}\frac{ML^2}{12}.$$

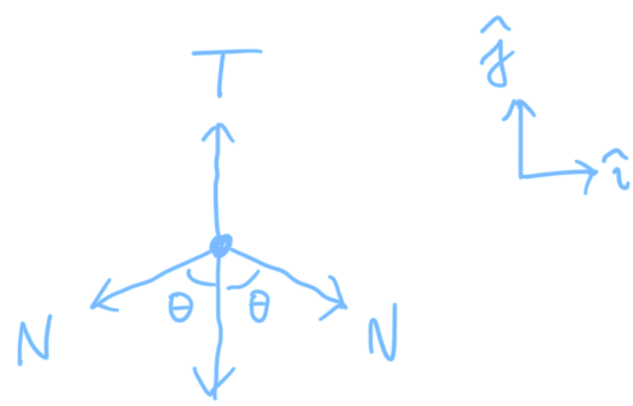
Con esto, obtenemos para ω_f que

$$\boxed{\omega_f = \frac{6m}{4m+M}\frac{v_o}{L}}$$

P3. Cuentas en anillo colgante



El diagrama de cuerpo libre del anillo es



$Mg \equiv$ peso anillo

$N \equiv$ normal de cuenta

$T \equiv$ tension de cuerda

La ec. de mov. relevante es:

$$\hat{j}: \quad -2N\cos\theta - Mg + T = M\ddot{y},$$

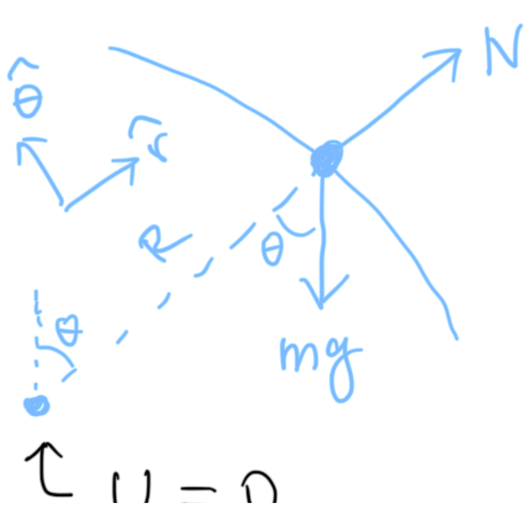
como el anillo es estacionario $\ddot{y} \equiv 0$, entonces

$$T = 2N\cos\theta + Mg > 0$$

si el anillo no se mueve hacia arriba. Si empieza a subir, entonces $T \leq 0$. El ángulo máximo ocurre para $T = 0$, donde

$$2N\cos\theta = -Mg \qquad (1)$$

El diagrama de cuerpo libre para la cuenta y la ec. de mov. relevante son:



$$\hat{r}: \; N - mg\cos\theta = -m\frac{v^2}{R} \qquad (2)$$

Como solo existen fuerzas de ligadura o conservativas, la energía se conserva. Los instantes relevantes en este caso son cuando la cuenta está arriba. La energía $E = K + U$ es $E_0 = 0 + mgR$. El otro instante es cuando la cuenta ha marcado un ángulo θ: $E_f = \frac{1}{2}mv^2 + mgR(1-\cos\theta)$. Por conservación:

$$E_0 = mgR = \frac{1}{2}mv^2 + mgR(1-\cos\theta) = E_f$$

$$\Rightarrow \quad v^2 = 2gR(1-\cos\theta) \qquad (3)$$

Multiplicando (2) por $(2\cos\theta)$ y sustituyendo (1) y (3) se obtiene

$$Mg + 2mg\cos^2\theta = 4mg(1-\cos\theta)\cos\theta;$$

simplificando y arreglando:

$$6\cos^2\theta - 4\cos\theta + \frac{M}{m} = 0$$

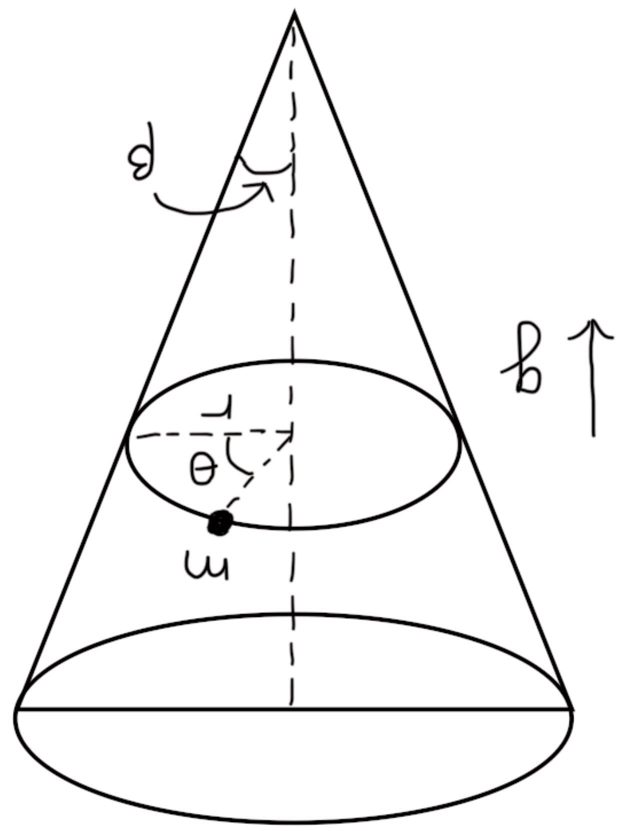
$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{3}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{3M}{2m}}\right)$$

Para que la raíz sea real: $1 - 3M/2m \geq 0$; por lo tanto

$$\boxed{m \geq \frac{3}{2}M}$$

El ángulo máximo ocurre cuando la raíz se anula ($m = 3M/2$); en ese caso $\cos\theta_{max} = 1/3$, lo que implica $\theta_{max} = \arccos(1/3) \cong 70.5°$. Si $m < 3M/2$ el anillo nunca se eleva y no existe un θ_{max}.

P4. Bola sobre cono



(a) La energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2);$$

la potencial, medida con respecto al vértice del cono:

$$V = mgr\cot\beta$$

Usando coord. cilíndricas:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = r\cot\beta$$

la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2/\sin^2\beta + r^2\dot{\theta}^2\right).$$

El lagrangiano $L = T - V$, entonces, es

$$\boxed{L = \frac{1}{2}m\left(\frac{\dot{r}^2}{\sin^2\beta} + r^2\dot{\theta}^2\right) - mgr\cot\beta}$$

(b) Los momentos generalizados $p = \partial_{\dot{q}}L$ son

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}/\sin^2\beta$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = 0 \longleftarrow L \text{ no depende de } \dot{z}$$

El hamiltoniano es $H = \sum p\dot{q} - L$:

$$\boxed{H = \frac{p_r^2}{2m}\sin^2\beta + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + mgr\cot\beta}$$

(c) Las ecs. de mov. se encuentran por medio de las ecs. de Hamilton: $\dot{q} = \partial_p H$, $\dot{p} = -\partial_q H$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \dot{r} = p_r \sin^2\beta / m \; ; & \dot{p}_r = \dfrac{p_\theta^2}{m r^3} - mg\cot\beta \\ \dot{\theta} = p_\theta / m r^2 \; ; & \dot{p}_\theta = 0 \end{array}}$$

(d) Note que H <u>no</u> depende de θ (coord. cíclica), entonces p_θ se conserva. Con p_θ se puede construir el momento angular $\vec{L}_z = p_\theta \hat{k}$. Esta conservación está asociada a invariancia bajo rotaciones alrededor del eje z.

H tampoco depende del tiempo explícitamente; por lo tanto, $\partial_t H = 0$ y H se conserva. La simetría asociada es time reversal. En este caso, $H \equiv$ energía mecánica total. Entonces la energía se conserva.

(e) Si $r = r_0 \equiv$ const $\Rightarrow \dot{r} = 0$ y las ecs. de mov.

$$p_\theta^2 = m^2 g r_0^3 \cot\beta,$$

interpretando la magnitud del mom. angular como $p_\theta = p r_0 = m v r_0 = m\omega r_0^2$, se puede deducir la freq. angular de la órbita:

$$m^2 r_0^3 g \cot\beta = (m r_0^2 \omega)^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega^2 = \frac{g}{r_0} \cot\beta}$$

P5. Partícula en potencial cuártico

(a) Para una partícula de masa m en el potencial $U(x)$, el hamiltoniano es $H = p^2/2m + U(x)$:

$$\boxed{H(x,p) = \frac{p^2}{2m} - \alpha x^2 + \beta x^4}$$

Las ecs. de mov. salen de las ecs. de Hamilton: $\dot{q} = \partial_p H$ y $\dot{p} = -\partial_q H$. Entonces:

$$\boxed{\dot{x} = p/m \;; \qquad \dot{p} = +2\alpha x - 4\beta x^3}$$

(b) Los ptos de eq ocurren si existe x tal que $\dot{p} = -\partial_x U = 0$. Entonces:

$$\partial_x U = 2x(\alpha - 2\beta x^2) = 0. \qquad (1)$$

$$\partial_{xx} U = -2\alpha + 12\beta x^2. \qquad (2)$$

De (1) los ptos de eq son

$$x = 0, \; \pm\sqrt{\alpha/2\beta}$$

Para $x = 0$, $\partial_{xx} U = -2\alpha < 0$, y el pto es inestable.

Para $x = \pm\sqrt{\alpha/2\beta}$, $\partial_{xx} U = 4\alpha > 0$, y los ptos de eq. son estables.

Oscilaciones pequeñas pueden encontrar expandiendo U alrededor de $\pm\sqrt{\alpha/2\beta}$ a 2^{do} orden:

$$U\left(x \approx \pm\sqrt{\frac{\alpha}{2\beta}}\right) \approx -\frac{\alpha^2}{4\beta} + 2\alpha\left(x \mp \sqrt{\frac{\alpha}{2\beta}}\right)^2$$

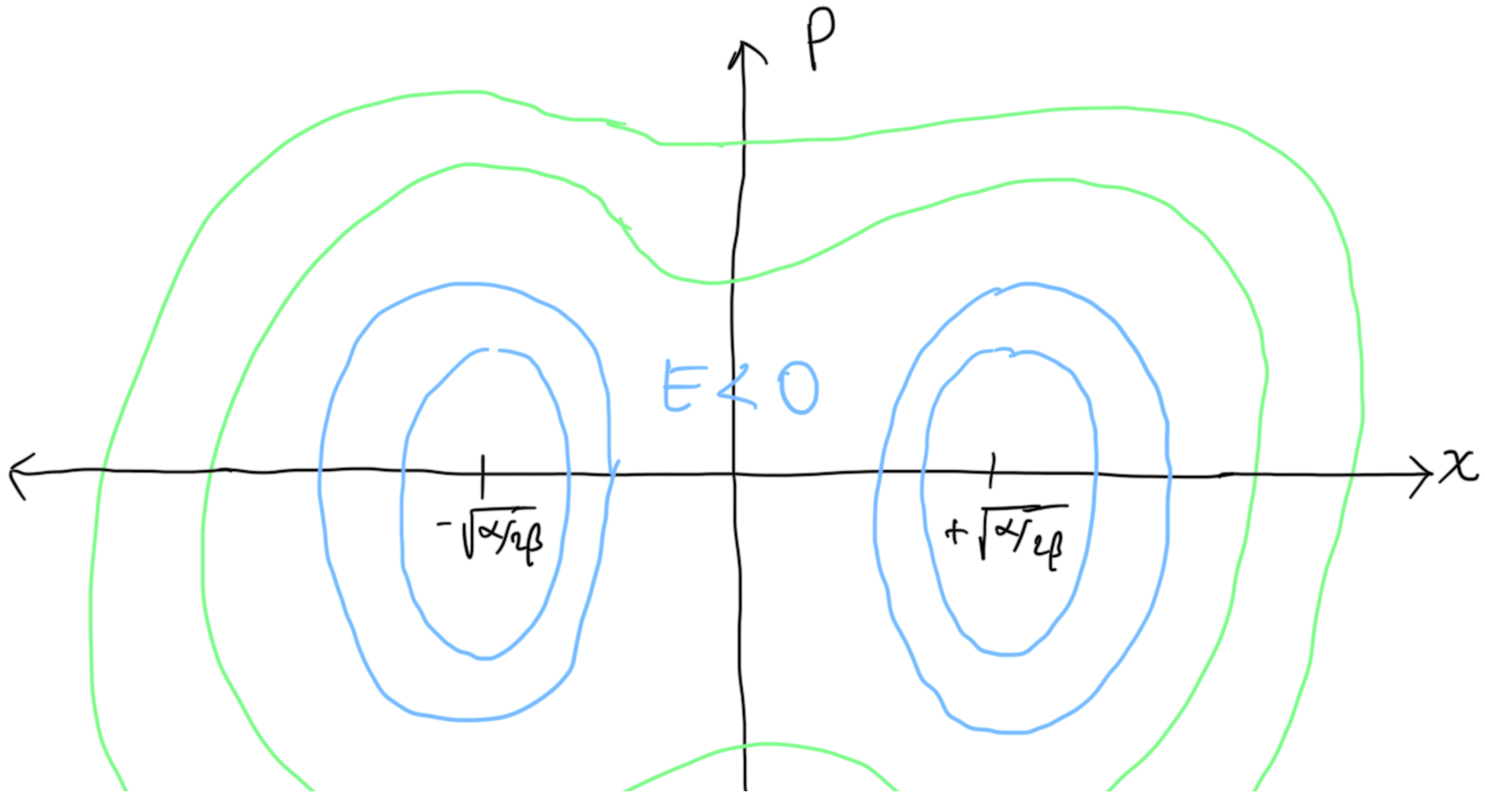
que se interpreta como un oscilador armónico, con corrimiento en energía $-\alpha^2/4\beta$ y pos. de eq. $\pm\sqrt{\alpha/2\beta}$. La constante de "resorte" es $k=4\alpha$ (independiente de β), y portanto, la freq. de oscilación es

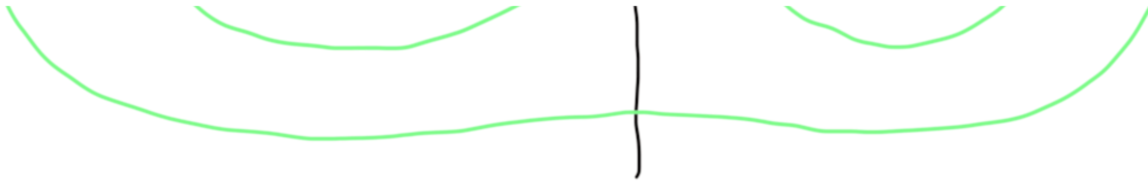
$$\boxed{\omega^2 = \frac{4\alpha}{m}}$$

(c) Teniendo en cuenta que $T = p^2/2m \geq 0$, la energía es negativa si $U<0$. En este caso las trayectorias están separadas en dos secciones, asociadas a los ptos $\pm\sqrt{\alpha/2\beta}$.

Para $E>0$, $U>0$ y las trayectorias ya no están divididas en dos (los ptos de eq son irrelevantes, en ese sentido).

El espacio de fase es:





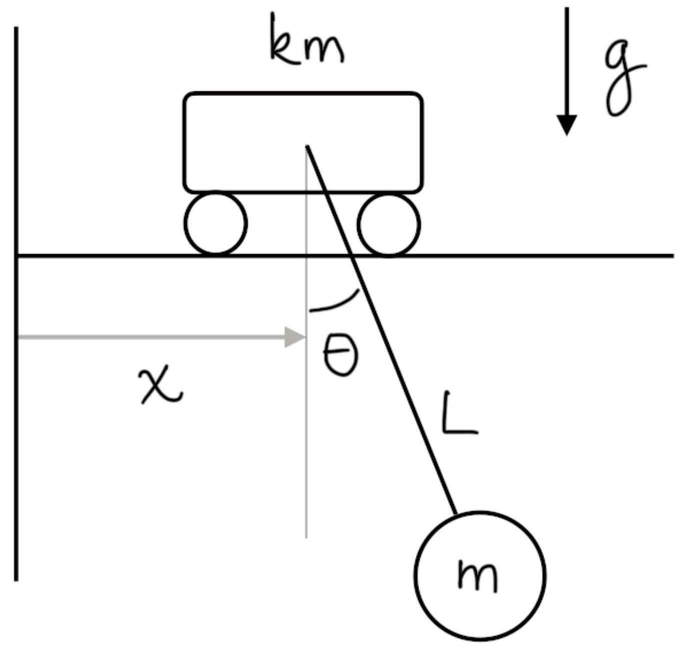
$E > 0$

P6. Péndulo suspendido de un carro

Definamos las siguientes convenciones:

$M = km, \quad S_\theta = \sin\theta$

$C_\theta = \cos\theta$



(a) Las energías cinéticas del carro, T_c, y péndulo, T_p, son

$$T_c = \frac{1}{2} M \dot{x}^2, \qquad T_p = \frac{1}{2} m (\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2)$$

Las energías potenciales son:

$$V_c = 0, \qquad V_p = mgy = -mgLC_\theta$$

Las coordenadas están relacionadas vía

$$x_p = x + LS_\theta, \qquad y_p = LC_\theta$$

$$\dot{x}_p = \dot{x} + \dot{\theta} L C_\theta, \qquad \dot{y}_p = -\dot{\theta} L S_\theta$$

El lagrangiano total del sistema es

$$L = T_p + T_c - V_p - V_c$$

$$= \frac{1}{2} m (\dot{x} - \dot{\theta} L C_\theta)^2 + \frac{1}{2} m (\dot{\theta} L S_\theta)^2 + mgLC_\theta + \frac{1}{2} M \dot{x}^2$$

Simplificando:

$$\boxed{L = \frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{\theta} L)^2 + mLC_\theta(\dot{x}\dot{\theta} + g)}$$

(b) Pequeñas oscilaciones implican $S_\theta \approx \theta$, $C_\theta = 1 - \theta^2/2$. así, el lagrangiano efectivo es

$$\boxed{\tilde{L} = \frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{\theta}L)^2 + mL(\dot{x}\dot{\theta} + g) - \frac{1}{2}mgL\theta^2}$$

Las ecs. de Euler-Lagrange para el sistema:

$$\frac{d}{dt}\frac{d\tilde{L}}{d\dot{x}} = \frac{d\tilde{L}}{dx} \Rightarrow \quad (m+M)\ddot{x} + m\ddot{\theta}L = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{d\tilde{L}}{d\dot{\theta}} = \frac{d\tilde{L}}{d\theta} \Rightarrow \quad mL^2\ddot{\theta} + mL\ddot{x} = -mgL\theta$$

(c) Para los modos normales es conveniente re-escribir las ecs. de mov. en forma matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m+M & mL \\ mL & mL^2 \end{pmatrix}}_{A:=}\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = -\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & mgL \end{pmatrix}}_{B:=}\begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix}$$

Las frecuencias de oscilacion se calculan como $\det(B - \omega^2 A) = 0$; es decir:

$$\begin{vmatrix} -(m+M)\omega^2 & -mL\omega^2 \\ -mL\omega^2 & -mL^2\omega^2 + mgL \end{vmatrix} = 0$$

$$= (m+M)(mL^2\omega^2 - mgL)\omega^2 - m^2L^2\omega^4$$

Factorizando y dividiendo entre mL^2, se tiene

$$\omega^2\left[\frac{M}{m}\omega^2 - \left(1 + \frac{M}{m}\right)\frac{g}{L}\right] = 0$$

donde las soluciones son

$$\boxed{\omega = 0, \quad \omega^2 = \left(\frac{1+k}{k}\right)\frac{g}{L}}$$

donde hemos sustituido $M = km$.

Los modos normales se encuentran para cada frecuencia ω resolviendo

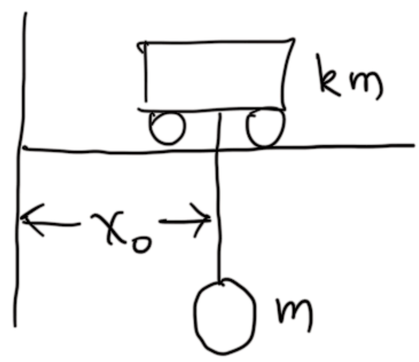
$$\begin{bmatrix} -(m+M)\omega^2 & -mL\omega^2 \\ -mL\omega^2 & -mL^2\omega^2 + mgL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = 0$$

Para $\omega = 0$ obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & mgL \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

lo que implica $\theta = 0$ y $x = x_0 = \text{const}$. Entonces el modo normal y el diagrama son

$$\boxed{\vec{a}(\omega = 0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$



Para $\omega = \omega_1 = \sqrt{(1+k)/k}\,\omega_0$, con $\omega_0 = g/L$, la ec. lineal es

$$\begin{bmatrix} \frac{(1+k)^2}{k}\omega_0^2 & \frac{1+k}{k} g \\ \frac{1+k}{k} g & \frac{1+k}{k} gL - gL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = 0,$$

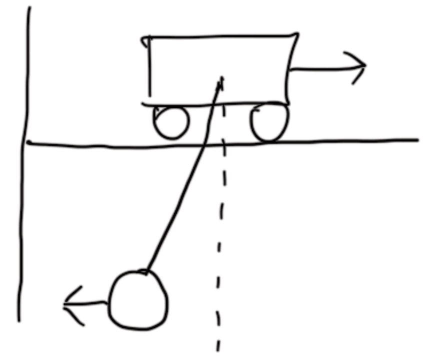
que se puede simplificar a

$$\begin{bmatrix} (1+k)\omega_0^2 & g \\ g & gL/(1+k) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = -\frac{L}{1+k}\theta$$

así, el modo normal y el diagrama son

$$\boxed{\vec{a}(\omega=\omega_1) = x_0 \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{k+1}{L} \end{bmatrix}}$$



Qualifying Exam - Quantum Mechanics
2024-II

Instructions

The exam consists of two parts (undergraduate and postgraduate). For each part, you must solve two out of the three proposed problems. Indicate which two problems you prefer to be graded by circling the corresponding numbers. If you choose not to mark specific problems, the first two problems from each section will be graded. During the exam, you are not allowed to use books, notes, electronic devices, or communicate with others. At the end, a sheet with relevant equations for solving the exam problems will be provided.

Undergraduate Level (40 Points Total)

Solve any two out of the three problems. Each problem is worth 20 points.

Problem #1 (20 Points)

Verify that the following matrix corresponds to a density operator and determine if it corresponds to a mixture:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{i}{5} \\ \frac{i}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Problem #2 (20 Points)

"Quantum Tunneling Through a Potential Barrier"

Consider a particle of mass m with energy E approaching a one-dimensional potential barrier:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ V_0 & \text{for } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{for } x > a \end{cases}$$

where $V_0 > E$.

Use the WKB approximation to find the tunneling probability for the particle through the potential barrier.

Problem #3 (20 Points)

An electron is located in a rectangular potential well with infinite walls (such as in a gold nanoparticle). The width of the well is L.At the well's boundary $x = L$ the derivatives of the wavefunction are negative and equal to $-\tau_n$ (here τ_n are arbitrary positive constants). Find the energies of stationary states of the electron in terms of τ_n.

Note: The wave function of the electron in the potential well of the nth energy state is given by:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Postgraduate Level (60 Points Total)

Solve any two out of the three problems. Each problem is worth 30 points.

Problem #1 (30 Points)

Consider a particle with spin $S = \frac{1}{2}$.

(a) Find the eigenvalues and the eigenfunction that corresponds to the maximal eigenvalue of the operator $S_x + S_y$, where S_i is the spin operator in the i-direction ($i = x, y, z$).

(b) Assume that α designates the eigenfunction of $S_x + S_y$ that belongs to the maximal eigenvalue, and that the particle is in state α. If we measure the spin in the z-direction, what are the values and their probabilities?

Problem #2 (30 Points)

Consider two spins, L and R, in a magnetic field along the z-axis, i.e., $B = (0, 0, B)$. The magnetic moments of the two spins are coupled to each other so that the total Hamiltonian reads:

$$\hat{H} = g\mu_B B \cdot (\hat{S}_L + \hat{S}_R) + J\hat{S}_L \cdot \hat{S}_R$$

1. Write this Hamiltonian in the basis $\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$.

2. Diagonalize this Hamiltonian. What are its eigenstates?

3. Express the density matrix $\hat{\rho}(T)$ as a function of temperature, assuming that the system is in thermodynamic equilibrium. Use the expression:

$$\hat{\rho} = \frac{\exp(-\hat{H}/k_B T)}{\mathrm{Tr}[\exp(-\hat{H}/k_B T)]}$$

4. What is, in thermodynamic equilibrium, the average value of the total spin in the z direction, $\langle S^z_{\mathrm{total}} \rangle$? Discuss this expectation value in the limits $T \to 0$ and $T \to \infty$.

Useful Formulas

1. **Schrödinger Equation:**

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

2. **Wavefunction Normalization:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1$$

3. **Eigenvalues and Eigenfunctions:** For an operator $\hat{O}$ and eigenfunction ψ:

$$\hat{O}\psi = \lambda\psi$$

4. **Matrix Exponential for 2x2 Matrices:** For a matrix A:

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots$$

Specifically for Pauli matrices, σ:

$$e^{i\theta\sigma} = I\cos\theta + i\sigma\sin\theta$$

5. **Partition Function:** In thermodynamics, the partition function Z is:

$$Z = \sum_i e^{-\beta E_i}$$

where $\beta = \frac{1}{k_B T}$.

6. **Transmission Coefficient WKB:**

$$T \approx \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_0^a |p(x)|\, dx\right)$$

7. **Spin Operators:** Spin-1/2 operators:

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x, \quad S_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y, \quad S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z$$

Pauli matrices:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problem #1

(20')

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{i}{5} \\ \frac{i}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Properties:

i) Hermiticity

transpose & Conjugate

$$A = A^{+} \rightarrow A^{+} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{i}{5} \\ +\frac{i}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

ii) $\mathrm{Tr}\ A = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$

iii) Eigenvalues A

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{5} - \lambda & -\frac{i}{5} \\ \frac{i}{5} & \frac{3}{5} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(\frac{2}{5} - \lambda\right)\left(\frac{3}{5} - \lambda\right) - \frac{i^2}{25} = 0$$

$$\frac{6}{25} - \frac{2}{5}\lambda - \frac{3}{5}\lambda + \lambda^2 + \frac{i^2}{25} = 0$$

$$\frac{6}{25} - \lambda + \lambda^2 + \frac{1}{25} = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{5} = 0 \quad ; \quad \lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

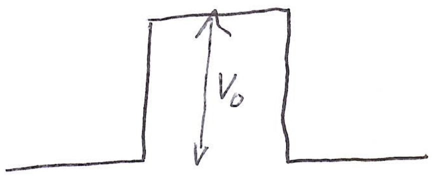
$$\lambda = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\left(\frac{1}{5}\right)}}{2(1)}$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4/5}}{2}$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{1}{5}}}{2} > 0 \quad \begin{array}{l} \rightarrow \lambda_1 \neq 0 \vee 1 \\ \rightarrow \lambda_2 \neq 0 \vee 1 \end{array}$$

$\therefore$ is a density operator the state is mixed

Problem #2 (16')



$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & 0 \le x \le a \\ 0 & x > a \end{cases}$$

$T = ? \rightarrow$ using WKB approx.

$0 \le x \le a \rightarrow V(x) = V_0 \wedge E < V_0$

$$\text{WKB} \longrightarrow \psi(x) \approx \frac{C}{\sqrt{|p(x)|}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int_0^x |p(x')|\,dx'\right)$$

$$p(x) = \sqrt{2m(V_0 - E)} \quad ; \quad K = \frac{p^2}{2m}$$

$$\rightarrow \quad K = \frac{\cancel{2m}(V_0 - E)}{\cancel{2m}} = V_0 - E$$

$$\int_0^{x=a} |p(x')|\,dx' = \int_0^a \left|\sqrt{2m(V_0 - E)}\right| dx'$$

$$= \int_0^a \sqrt{2m(V_0 - E)}\; dx^{*}$$

$$= \sqrt{2m(V_0 - E)}\; a \quad ; \quad E = cte$$

WKB $\rightarrow \psi(x) \approx A(x) e^{\frac{i}{\hbar}S(x)}$

Exp form wave function

Vs Not using WKB:

$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$; $\lambda = \frac{h}{p}$

$T = ?$ transmission coefficient

$$T \approx \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_0^a |p(x)|\,dx\right)$$

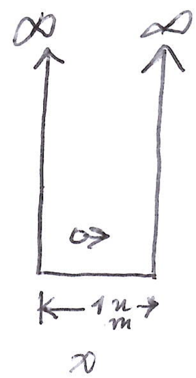
WKB tunneling probability

$$\approx \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(V_0 - E)}\cdot a\right)$$

$$k = \frac{2\pi p}{h} \rightarrow \frac{p}{h} = \frac{k}{2\pi}$$

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$$

Problem # 3



$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\, \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad ; n = 1,2,3$$

$$E_n = ?$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_n}{dx^2} = E_n \psi_n$$

$$\frac{d\psi}{dx} = \sqrt{\frac{2}{L}}\left(\frac{n\pi}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

boundary Conditions:

$$\psi_n(x=0) = 0 \qquad \psi_n(x=L) = 0$$

$$\frac{d\psi}{dx} = \sqrt{\frac{2}{L}}\left(\frac{n\pi}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi \cancel{L}}{\cancel{L}}\right) \quad ; \cos(n\pi) = (-1)^n$$

$$\frac{d\psi}{dx} = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\frac{n\pi}{L}(-1)^n = -\tau_n \quad ; \boxed{\text{iff } n = 1,3,5}$$

Since $\tau_n > 0$

$$\sqrt{\frac{2}{L}}\,\frac{n\pi}{L}(-1) = -\tau_n \Rightarrow \tau_n = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\frac{n\pi}{L}$$

$$\rightarrow \boxed{n = \frac{\tau_n L}{\pi}\sqrt{\frac{L}{2}}}$$

Substituting in the formula of the energy of the nth state in an infinite potential well:

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m}\left(\frac{n}{L}\right)^2 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m}\left(\frac{z_n k}{\cancel{k}\pi}\sqrt{\frac{L}{2}}\right)^2$$

$$\boxed{E_n = \frac{\hbar^2 L z_n^2}{4m}}$$

Problem #1 (Postgraduate) ①

$s = \frac{1}{2}$; $\lambda = ?$

$S_x + S_y$

$$= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

a)

$$\hat{A} = S_x + S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i+1 \\ i+1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left| \hat{A} - \lambda I \right| = 0$$

$$\left| \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i+1 \\ i+1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar}{2}(-i+1) \\ \frac{\hbar}{2}(i+1) & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{\hbar}{2}(-i+1) \\ \frac{\hbar}{2}(i+1) & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$+\lambda^2 - \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 (1 - i^2) = 0$$

$$\lambda^2 = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 (1 - i^2)$$

$$\lambda^2 = \frac{\hbar^2}{4}\left(1 - \cancel{i^2}^{\,-1}\right)$$

$$= \frac{\hbar^2}{\cancel{4}_{\,2}} \cancel{2}^{\,1}$$

$$\lambda^2 = \frac{\hbar^2}{2}$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2}}$$

$$\boxed{\lambda = \pm \frac{\hbar}{\sqrt{2}}}$$

$|\alpha\rangle$ eigenfunctions of $S_x + S_y$
if S_z is applied $\rightarrow$ λ's and prob?

$$(\hat{A} - \lambda I)|\alpha\rangle = 0$$

$$\left(\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i+1 \\ i+1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & (-i+1)\frac{\hbar}{2} \\ (i+1)\frac{\hbar}{2} & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & (-i+1)\frac{\hbar}{2} \\ (i+1)\frac{\hbar}{2} & -\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & (1-i) \\ (1+i) & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-\sqrt{2}\,a + (1-i)\,b = 0 \quad (1)$$

$$(1+i)\,a - \sqrt{2}\,b = 0 \quad (2)$$

using eq (1) $\rightarrow$ $\boxed{a = \dfrac{(1-i)\,b}{\sqrt{2}}}$ (3)

using normalization condition

$$a^2 + b^2 = 1$$

$$\left(\frac{(1-i)\,b}{\sqrt{2}}\right)^2 + b^2 = 1$$

$$\frac{(1-i)^2}{2}\,b^2 + b^2 = 1$$

$$b^2\left(\frac{(\cancel{1}-2i+\cancel{i^2}) + 2}{2}\right) = 1$$

$$b^2 = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}(1-i)} \rightarrow b^2 = \frac{1}{1-i} \rightarrow \boxed{b = \frac{\sqrt{1+i}}{\sqrt{2}}}$$

In (3) $\rightarrow$ $a = \dfrac{(1-i)}{\sqrt{2}}\dfrac{(\sqrt{1+i})}{\sqrt{2}}\dfrac{(i+1)}{(i+1)}$

$$\boxed{a = \frac{1}{(1+i)^{1/2}}}$$

$$\Rightarrow |v_1\rangle = a\,|+\tfrac{1}{2}\rangle + b\,|-\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$= (1+i)^{-1/2}\,|+\tfrac{1}{2}\rangle + \left(\frac{1+i}{2}\right)^{1/2}|-\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$P\left(+\tfrac{1}{2}\right) = |a|^2 = \frac{1}{2}$$

$$P\left(-\tfrac{1}{2}\right) = |b|^2 = \frac{1}{2}$$

Problem #2

Problem Statement

Consider two spins, L and R, in a magnetic field along the z-axis, i.e., $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. The magnetic moments of the two spins are coupled to each other so that the total Hamiltonian reads:

$$\hat{H} = g\mu_B \mathbf{B} \cdot (\hat{\mathbf{S}}_L + \hat{\mathbf{S}}_R) + J\hat{\mathbf{S}}_L \cdot \hat{\mathbf{S}}_R.$$

1. Write this Hamiltonian in the basis $\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$.
2. Diagonalize this Hamiltonian. What are its eigenstates?
3. Express the density matrix $\hat{\rho}(T)$ as a function of temperature, assuming that the system is in thermodynamic equilibrium. Use the expression:

$$\hat{\rho} = \frac{\exp(-\hat{H}/k_B T)}{\mathrm{Tr}\left[\exp(-\hat{H}/k_B T)\right]}.$$

4. What is, in thermodynamic equilibrium, the average value of the total spin in the z direction, $\langle S_z^{\text{total}} \rangle$? Discuss this expectation value in the limits $T \to 0$ and $T \to \infty$.

Solution

Part (a): Hamiltonian in the Given Basis

The basis states are $\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$.

The spin operators $\hat{S}_z$ for a single spin are:

$$\hat{S}_z|\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle, \quad \hat{S}_z|\downarrow\rangle = -\frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle.$$

The total spin in the z-direction is:

$$\hat{S}_z^{\text{total}} = \hat{S}_{z,L} + \hat{S}_{z,R}.$$

The Hamiltonian can be separated into two parts: the Zeeman term due to the magnetic field and the interaction term:

$$\hat{H} = g\mu_B B(\hat{S}_{z,L} + \hat{S}_{z,R}) + J\hat{\mathbf{S}}_L \cdot \hat{\mathbf{S}}_R.$$

For the basis states, the Zeeman term $g\mu_B B(\hat{S}_{z,L} + \hat{S}_{z,R})$ in the given basis is diagonal with the following entries:

$$g\mu_B B \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} + \frac{\hbar}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\hbar}{2} - \frac{\hbar}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\hbar}{2} + \frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\hbar}{2} - \frac{\hbar}{2} \end{pmatrix} = g\mu_B B \begin{pmatrix} \hbar & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\hbar \end{pmatrix}.$$

Using the properties of spin-1/2 particles and the given basis states, we construct the Hamiltonian matrix:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} B + \frac{1}{4}J & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}J & \frac{1}{2}J & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}J & -\frac{1}{4}J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B + \frac{1}{4}J \end{pmatrix}.$$

Part (b): Diagonalize the Hamiltonian

To find the eigenvalues and eigenstates, we solve the characteristic equation of the matrix:

$$\begin{vmatrix} B + \frac{1}{4}J - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}J - \lambda & \frac{1}{2}J & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}J & -\frac{1}{4}J - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B + \frac{1}{4}J - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

This matrix can be split into two smaller problems: the 1x1 blocks (diagonal elements) and the 2x2 submatrix:

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{4}J - \lambda & \frac{1}{2}J \\ \frac{1}{2}J & -\frac{1}{4}J - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Solving the 2x2 submatrix, we find the eigenvalues:

$$\left(-\frac{1}{4}J - \lambda\right)^2 - \left(\frac{1}{2}J\right)^2 = 0.$$

$$\lambda^2 + \frac{1}{2}J\lambda = 0.$$

Thus, the eigenvalues of the 2x2 submatrix are:

$$\lambda = -\frac{1}{2}J \quad \text{or} \quad \lambda = 0.$$

The full eigenvalues of the Hamiltonian are:
- $\lambda_1 = B$ - $\lambda_2 = 0$ - $\lambda_3 = -J$ - $\lambda_4 = -B$
The corresponding eigenstates are:
- $|\uparrow\uparrow\rangle$ - $|\downarrow\downarrow\rangle$ - $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$ - $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$
The diagonalized Hamiltonian is:

$$\hat{H}_{\text{diag}} = \begin{pmatrix} B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B \end{pmatrix}.$$

Part (c): Density Matrix $\hat{\rho}(T)$

The density matrix in thermodynamic equilibrium is given by:

$$\hat{\rho} = \frac{\exp(-\hat{H}/k_B T)}{\text{Tr}\left[\exp(-\hat{H}/k_B T)\right]}.$$

First, calculate the partition function:

$$Z = \text{Tr}\left[\exp(-\hat{H}/k_B T)\right] = \sum_i \exp(-E_i/k_B T).$$

Using the eigenvalues:

$$Z = \exp\left(-\frac{B}{k_B T}\right) + \exp(0) + \exp\left(-\frac{J}{k_B T}\right) + \exp\left(-\frac{B}{k_B T}\right).$$

Simplifying:

$$Z = e^{-\beta B} + 1 + e^{-\beta J} + e^{\beta B},$$

where $\beta = \frac{1}{k_B T}$.

The density matrix elements are:

$$\rho_{ii} = \frac{\exp(-E_i/k_B T)}{Z}.$$

So, the density matrix $\hat{\rho}(T)$ is:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{e^{-\beta B} + 1 + e^{-\beta J} + e^{\beta B}} \begin{pmatrix} e^{-\beta B} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\beta J} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\beta B} \end{pmatrix}.$$

Part (d): Average Value of Total Spin in z Direction

The average value of the total spin in the z direction is:

$$\langle S_z^{\text{total}} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{S}_z^{\text{total}}).$$

Using the density matrix and the operator:

$$\hat{S}_z^{\text{total}} = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

we get:

$$\langle S_z^{\text{total}} \rangle = \hbar \left(\rho_{11} - \rho_{44}\right).$$

Using the elements of $\hat{\rho}(T)$:

$$\rho_{11} = \frac{e^{-\beta B}}{Z}, \quad \rho_{44} = \frac{e^{\beta B}}{Z},$$

where the partition function Z is:

$$Z = e^{-\beta B} + 1 + e^{-\beta J} + e^{\beta B}.$$

So, we have:

$$\langle S_z^{\text{total}} \rangle = \hbar \left(\frac{e^{-\beta B}}{Z} - \frac{e^{\beta B}}{Z} \right).$$

Substituting the expression for Z:

$$\langle S_z^{\text{total}} \rangle = \hbar \left(\frac{e^{-\beta B} - e^{\beta B}}{e^{-\beta B} + 1 + e^{-\beta J} + e^{\beta B}} \right).$$

We can rewrite the numerator in terms of sinh and the denominator in terms of cosh:

$$e^{-\beta B} - e^{\beta B} = -2\sinh(\beta B),$$

and

$$e^{-\beta B} + e^{\beta B} = 2\cosh(\beta B).$$

Thus, the partition function Z can be rewritten as:

$$Z = 2\cosh(\beta B) + 1 + e^{-\beta J}.$$

Therefore, the average value of the total spin in the z direction becomes:

$$\langle S_z^{\text{total}} \rangle = \frac{-2\hbar \sinh(\beta B)}{2\cosh(\beta B) + 1 + e^{-\beta J}}.$$

Limits

- As $T \to 0$ (or $\beta \to \infty$):

  $$\langle S_z^{\text{total}} \rangle \approx \hbar \text{ or } -\hbar,$$

  depending on whether the ground state is $|\uparrow\uparrow\rangle$ or $|\downarrow\downarrow\rangle$.

- As $T \to \infty$ (or $\beta \to 0$):

  $$\langle S_z^{\text{total}} \rangle \to 0,$$

  as the system will be in an equal mixture of all states, yielding zero net spin in the z direction.