

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Segundo examen del año– Lunes, 17 de Julio, 2017 (2:00 PM a 5:00 PM)

EXAMEN DE CONOCIMIENTOS

MECÁNICA CLÁSICA

2017-01

Tiempo de lectura: 15 Minutos

Duración del examen: TRES Horas

Material permitido: Lápiz, borrador y lapicero únicamente.

Responda **todas** las preguntas usando únicamente el material provisto por el instructor. Procure responder de forma ordenada indicando todos los pasos en su procedimiento. Incluya diagramas e identifique los parámetros a tener en cuenta.

Pregunta 1 Neutrones fácilmente penetran bloques gruesos de Plomo; en cambio, son absorbidos más eficientemente por agua u otro material con alto contenido de Hidrógeno.

1. [20 Puntos] Explique este fenómeno usando solamente argumentos de mecánica clásica.

Solución: Considere un neutrón colisionando con un átomo. En cada colisión, los neutrones pierden cierta cantidad de energía cinética. Asumiendo que la colisión es elástica y central la cantidad de energía perdida viene dada por:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{MV^2}{2} + \frac{mv^2}{2} \quad (1)$$

$$mv_0 = MV + mv \quad (2)$$

donde m y M son las masas del neutrón y el átomo respectivamente. v_0 y v son las velocidades inicial y final del neutrón. V es la velocidad del átomo después de la colisión. Reescribiendo:

$$v_0^2 - v^2 = \frac{M}{m}V^2 \quad (3)$$

$$v_0 - v = \frac{M}{m}V \quad (4)$$

Entonces:

$$V = \frac{2}{\alpha + 1}v_0, \quad (5)$$

con $\alpha = M/m$. La energía cinética del átomo después de la colisión es entonces:

$$E_k^f = \frac{1}{2}MV^2 \quad (6)$$

$$= \frac{Mv_0^2}{2} \frac{4}{(\alpha + 1)^2} \quad (7)$$

$$= 4 \frac{\alpha}{(\alpha + 1)^2} E_k^i \quad (8)$$

$$= 4 \frac{E_k^i}{\alpha + 2 + (1/\alpha)} \quad (9)$$

Claramente, ya sea que $\alpha \rightarrow 0$ o $\alpha \rightarrow \infty$, $E_k^f \rightarrow 0$. Entonces, el máximo de E_k^f corresponde al mínimo de $\alpha + 2 + (1/\alpha)$, lo que corresponde a $\alpha = 1$, o que es lo

mismo, a $M = m$, por lo que la energía cinética del átomo estará en su máximo y $E_k^f = E_k^i$. Para el hidrógeno y el neutrón, $\alpha \approx 1$ y esto explica el porque materiales con alto contenido de hidrógeno son muy eficientes deteniendo neutrones.

Pregunta 2 Considere una partícula en presencia de un campo magnético.

1. [10 Puntos] Verifique la siguiente transformación canónica.

$$X = \frac{1}{\sqrt{m\omega}} (\sqrt{2P_1} \sin Q_1 + P_2) \quad Y = \frac{1}{\sqrt{m\omega}} (\sqrt{2P_1} \cos Q_1 + Q_2)$$

$$P_x = \frac{1}{2} \sqrt{m\omega} (\sqrt{2P_1} \cos Q_1 - Q_2) \quad P_y = \frac{1}{2} \sqrt{m\omega} (-\sqrt{2P_1} \sin Q_1 - P_2)$$

Solución: Siendo, $\mathcal{H} = \mathcal{H}(Q, P)$ el nuevo Hamiltoniano, entonces:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i}$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_i}$$

Además sabemos que

$$[Q_i, Q_j]_{q,p} = 0$$

$$[P_i, P_j]_{q,p} = 0$$

$$[Q_i, P_j]_{q,p} = \delta_{i,j}$$

Haciendo $\alpha = 1/\sqrt{m\omega}$, tenemos:

$$\begin{aligned} [X, P_x]_{Q,P} &= \frac{\partial X}{\partial Q_1} \frac{\partial P_x}{\partial P_1} - \frac{\partial P_x}{\partial Q_1} \frac{\partial X}{\partial P_1} + \frac{\partial X}{\partial Q_2} \frac{\partial P_x}{\partial P_2} - \frac{\partial P_x}{\partial Q_2} \frac{\partial X}{\partial P_2} \\ &= \alpha \sqrt{2P_1} \cos Q_1 \cdot \frac{1}{2\alpha} \frac{1}{\sqrt{2P_1}} \cos Q_1 - \left(-\frac{1}{2\alpha} \sqrt{2P_1} \sin Q_1 \right) \alpha \frac{\sin Q_1}{\sqrt{2P_1}} - \alpha \left(-\frac{1}{2\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

Adicionalmente,

$$\begin{aligned} [X, P_y]_{Q,P} &= \frac{\partial X}{\partial Q_1} \frac{\partial P_y}{\partial P_1} - \frac{\partial P_y}{\partial Q_1} \frac{\partial X}{\partial P_1} + \frac{\partial X}{\partial Q_2} \frac{\partial P_y}{\partial P_2} - \frac{\partial P_y}{\partial Q_2} \frac{\partial X}{\partial P_2} \\ &= \alpha \sqrt{2P_1} \cos Q_1 \left(-\frac{1}{2\alpha} \sqrt{2P_1} \sin Q_1 \right) - \left(-\frac{\sqrt{2P_1}}{2\alpha} \cos Q_1 \right) \cdot \alpha \frac{\sin Q_1}{\sqrt{2P_1}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Se espera que el estudiante calcule todos los conmutadores de manera que muestre que

$$[Y, P_x]_{Q,P} = 0$$

$$[Y, P_y] = 0$$

2. [10 Puntos] Encuentre las ecuaciones de movimiento de Hamilton para una partícula moviéndose en un plano en presencia de un campo magnético H descrito por el vector potencial

$$\mathbf{A} = \left(-\frac{YH}{2}, \frac{XH}{2}, 0 \right),$$

en términos de las nuevas variables Q_1, Q_2, P_1, P_2 y usando $\omega = eH/mc$.

Solución:

$$p_x = P_x - \frac{e}{c}A_x$$

$$p_y = P_y - \frac{e}{c}A_y$$

El Hamiltoniano es entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2m} \left(P_x - \frac{e}{c}A_x \right)^2 + \frac{1}{2m} \left(P_y - \frac{e}{c}A_y \right)^2 \\ &= \frac{1}{2m} (P_x^2 + P_y^2) - \frac{e}{mc} (P_x A_x + P_y A_y) + \frac{e^2}{2mc^2} (A_x^2 + A_y^2) \end{aligned}$$

Remplazando por las transformaciones dadas en la parte 1, se llega a que

$$\mathcal{H} = \omega P_1,$$

de manera que \mathcal{H} no depende de Q_1, Q_2 y P_2 . Entonces:

$$\dot{Q}_1 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_1} = \omega$$

$$Q_1 = \omega t + \alpha,$$

donde α es la fase inicial.

$$\dot{P}_1 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_1} = 0$$

$$P_1 = \frac{E}{\omega}$$

También se tiene que:

$$P_2 = P_{20} = \sqrt{m\omega} X_0$$

$$Q_2 = Q_{20} = \sqrt{m\omega}Y_0.$$

Las condiciones iniciales definen X_0 y Y_0 . Escribiendo en términos de las variables X , Y , p_x y p_y :

$$X = \sqrt{2E/m\omega^2} \sin(\omega t + \alpha) + X_0$$

$$Y = \sqrt{2E/m\omega^2} \cos(\omega t + \alpha) + Y_0.$$

$$\begin{aligned} p_x &= P_x - \frac{e}{c}A_x = \sqrt{mE/2} \cos(\omega t + \alpha) - \frac{m\omega}{2}Y_0 + \frac{1}{2} \frac{eH}{c} \sqrt{2E/m\omega^2} \cos(\omega t + \alpha) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{eH}{c} Y_0 \\ &= \sqrt{2mE} \cos(\omega t + \alpha) = p_0 \cos(\omega t + \alpha) \end{aligned}$$

Similarmente,

$$p_y = -p_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

Pregunta 3 Una masa puntual m está sujeta a una cuerda delgada y sin masa en un extremo. El otro extremo de la cuerda esta atado a un cilindro fijo de radio R . Inicialmente, la cuerda no esta tensionada, y está enrollada alrededor de una sección transversal circular del cilindro. No hay fuerzas externas actuando, excepto, un impulso en $t = 0$ dirigido radialmente hacia afuera que da a la masa m una velocidad inicial v_0 . Este impulso causa que la cuerda se desenrolle como lo ilustra la figura (izquierda). El punto P es el la posición inicial de la masa, y Q denota el punto de contacto instantáneo entre la cuerda y el cilindro.

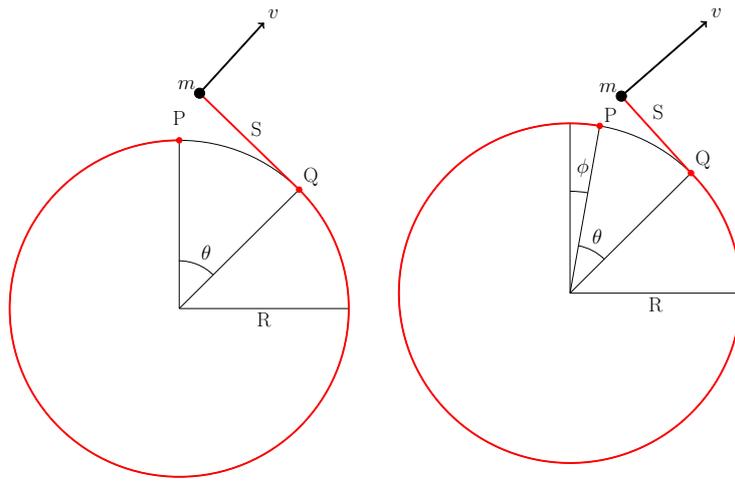


Figura 1: Izquierda: Esquema pregunta 3.1 y 3.2. Derecha: Pregunta 3.3 y 3.4

- [5 Puntos] Encuentre el Lagrangiano y la ecuación de movimiento en términos de la coordenada generalizada θ como una función del tiempo, y que satisfaga las condiciones iniciales.

Solución: El langragiano usando coordenadas cartesianas y expresadas en términos de θ y $\dot{\theta}$ viene dado por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 \quad (10)$$

La ecuación de movimiento es:

$$\frac{d}{dt}(\theta^2\dot{\theta}^2) - \dot{\theta}^2\theta^2 = 0 \quad (11)$$

o,

$$\theta^2\ddot{\theta} - \dot{\theta}^2\theta = 0. \quad (12)$$

Para $\theta \neq 0$,

$$\frac{d}{dt}(\theta\dot{\theta}) = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\theta^2}{2}\right) = 0, \quad (13)$$

La solución de esta ecuación es $\theta^2 = 2At + B$. Sabiendo que $\theta(0) = 0$ y

$$\mathcal{L}_0 = \frac{mv_0^2}{2}, \quad (14)$$

es decir, $\theta(0)\dot{\theta}(0) = v_0/R$, entonces, $B = 0$ y $A = v_0/R$. Entonces,

$$\theta = \sqrt{2(v_0/R)t} \quad (15)$$

2. [5 Puntos] Usando las solución anterior, encuentre el momento angular de la masa m alrededor del centro del cilindro. ¿Se conserva? ¿Por qué? ¿Se conserva la energía mecánica?, ¿Por qué?.

Solución: El momento angular L alrededor del centro del cilindro es:

$$L = mr \times v = mlv_0\hat{e} = mR\theta v_0\hat{e} = m\sqrt{2v_0^3Rt}\hat{e}$$

El momento angular no se conserva ya que hay un torque debido a la cuerda conectada al cilindro; la energía sin embargo, se conserva porque la fuerza que actúa en la masa m es siempre perpendicular a su velocidad:

$$E = \mathcal{L} = \frac{m}{2}R^2\dot{\theta}^2\theta^2 = \frac{mv_0^2}{2}$$

3. [5 Puntos] Ahora considere una nueva situación en la cual el cilindro es hueco de masa M (con el mismo radio R) que puede rotar libremente a medida que la masa se mueve y se desenrolla la cuerda. El ángulo ϕ mide la posición de P con respecto al eje vertical (ver figura, derecha). Escriba el Lagrangiano en términos de las coordenadas generalizadas θ y ϕ . Identifique dos cantidades conservadas y expresaselas en términos de θ y ϕ .

Solución: Es claro que en el punto de contacto, la cuerda y el radio son siempre perpendiculares. Entonces:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mR^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}mR^2\theta^2(\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 + \frac{1}{2}MR^2\dot{\phi}^2$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m + M)R^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}mR^2\theta^2(\dot{\theta} + \dot{\phi})^2$$

Usando

$$P_\phi = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\phi} \quad (16)$$

se obtiene:

$$(m + M)\dot{\phi} + m\theta^2(\dot{\theta} + \dot{\phi}) = 0 \quad (17)$$

La energía se conserva también, entonces:

$$E = \frac{1}{2}(m + M)R^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}mR^2\theta^2(\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (18)$$

4. [5 Puntos] Resuelva para $\theta(t)$. ¿En qué sentido gira el cilindro?

Solución: Usando (17) tenemos:

$$\dot{\phi} = -\frac{\dot{\theta}\theta^2}{\theta^2 + 1 + (M/m)} \quad (19)$$

Substituyendo (19) en (18):

$$\left(1 + \frac{M}{m}\right) \frac{\dot{\theta}^2\theta^4}{[\theta^2 + 1 + (M/m)]^2} + \theta^2 \left(\dot{\theta} - \frac{\dot{\theta}\theta^2}{\theta^2 + 1 + (M/m)}\right)^2 = \frac{v_0^2}{R^2} \quad (20)$$

Remplazando $\alpha = 1 + (M/m)$ y $\beta = v_0^2/R^2$, se llega a lo siguiente:

$$\frac{\dot{\theta}^2\theta^2}{\theta^2 + \alpha} = \frac{\beta}{\alpha} \quad (21)$$

Integrando la ecuación anterior resulta en:

$$\sqrt{\theta^2 + \alpha} = \sqrt{\beta/\alpha} + C$$

y

$$\theta^2 = \frac{\beta}{\alpha}t^2 + 2\sqrt{((\beta/\alpha)Ct + C^2 - \alpha)}$$

De la condición inicial $\theta(0) = 0$, tenemos que $C^2 = \alpha$, entonces:

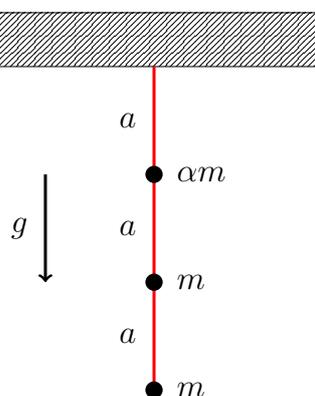
$$\theta = \sqrt{(\beta/\alpha)t^2 + 2\sqrt{\beta}t}$$

Entonces, remplazando los valores de α y β llegamos a :

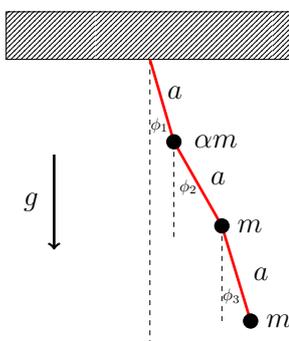
$$\theta = \sqrt{\frac{v_0^2 t^2}{R^2(1 + (M/m))} + \frac{2v_0 t}{R}}$$

Si se hace tender $M/m \rightarrow 0$ (como el el caso del cilindro fijo) este resultado se reduce al del punto 1. El cilindro girará en la dirección opuesta a la dirección en que se desenrolla la cuerda. En (19) se ve que si $\dot{\theta} > 0$, entonces, $\dot{\phi} < 0$.

Pregunta 4 Un péndulo triple consta de tres masas αm , m y m atadas a una sola cuerda muy delgada a distancias a , $2a$ y $3a$ respectivamente, medido desde el punto donde cuelga (ver figura).



- [10 Puntos] Determine el valor de α tal que una de las frecuencias normales del sistema sea igual a la frecuencia de un péndulo simple de longitud $a/2$ y masa m . Asuma que los desplazamientos de las masas alrededor de sus puntos de equilibrio son pequeños.



Solución: Escriba el Langragiano del sistema usando las coordenadas ϕ_1 , ϕ_2 , y ϕ_3 (ver figura).

$$x_1 = a \sin \phi_1$$

$$x_2 = a(\sin \phi_1 + \sin \phi_2)$$

$$x_3 = a(\sin \phi_1 + \sin \phi_2 + \sin \phi_3)$$

y,

$$y_1 = a \cos \phi_1$$

$$y_2 = a(\cos \phi_1 + \cos \phi_2)$$

$$y_3 = a(\cos \phi_1 + \cos \phi_2 + \cos \phi_3)$$

Entonces, usando la aproximación de ángulo pequeño tenemos:

$$\begin{aligned} T &= \frac{\alpha m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{m}{2}(\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2) \\ &\approx \frac{\alpha m a^2}{2} \dot{\phi}_1^2 + \approx \frac{m a^2}{2} (\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2 + 2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2) \\ &\quad + \frac{\alpha m a^2}{2} (\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2 + \dot{\phi}_3^2 + 2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 + 2\dot{\phi}_2\dot{\phi}_3 + 2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_3) \end{aligned}$$

Para el potencial tenemos:

$$\begin{aligned} V &= -\alpha m g y_1 - m g y_2 - m g y_3 \\ &\approx \frac{1}{2} m g a \alpha \phi_1^2 + \frac{1}{2} m g a (\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{1}{2} m g a (\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2) \end{aligned}$$

Donde usamos:

$$\sin \phi_i \approx \phi_i$$

$$\cos \phi_i \cos \phi_j + \sin \phi_i \sin \phi_j = \cos(\phi_i - \phi_j) \approx 1$$

El Lagrangiano es:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= T - V \\ &= \frac{m a^2}{2} \{ (\alpha + 2)\dot{\phi}_1^2 + 2\dot{\phi}_2^2 + \dot{\phi}_3^2 + 4\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 + 2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_3 + 2\dot{\phi}_2\dot{\phi}_3 \\ &\quad - \omega_0^2 [(\alpha + 2)\phi_1^2 + 2\phi_2^2 + \phi_3^2] \} \end{aligned}$$

Donde $\omega_0^2 = g/a$. Las ecuaciones de movimiento son entonces:

$$\begin{aligned} (\alpha + 2) [\ddot{\phi}_1 + \omega_0^2 \phi_1] + 2\ddot{\phi}_2 + \ddot{\phi}_3 &= 0 \\ 2\ddot{\phi}_1 + 2\ddot{\phi}_2 + 2\omega_0^2 \phi_2 + \ddot{\phi}_3 &= 0 \\ \ddot{\phi}_1 + \ddot{\phi}_2 + \ddot{\phi}_3 + 2\omega_0^2 \phi_3 &= 0 \end{aligned}$$

Con soluciones de la forma $\phi_i = A_i e^{i\omega t}$ y haciendo $\omega^2/\omega_0^2 = \lambda$ llegamos al determinante:

$$\det \begin{vmatrix} (\alpha + 2)(\lambda - 1) & 2\lambda & \lambda \\ 2\lambda & 2(\lambda - 1) & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0$$

Buscamos un modo donde $\omega^2 = 2g/a$, entonces $\lambda = 2$ y el determinante queda de la forma:

$$\det \begin{vmatrix} (\alpha + 2) & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Donde claramente $\alpha = 2$ es la solución.

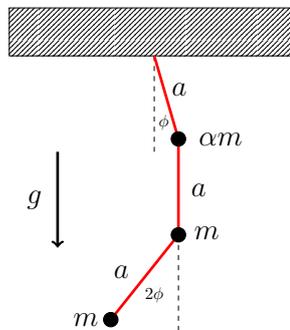
2. [10 Puntos] Encuentre el modo correspondiente a esta frecuencia y dibújela.

Solución: El modo puede ser encontrado calculando:

$$\begin{pmatrix} (\alpha + 2) & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = 0$$

Lo que resulta en $A_3 = -2A_1$ y $A_2 = 0$. Entonces, el modo correspondiente a $\omega = \sqrt{2g/a}$ es (ver figura):

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \phi \\ 0 \\ -2\phi \end{pmatrix} = 0$$



| Pregunta | Puntos | Nota |
|----------|--------|------|
| 1 | 20 | |
| 2 | 20 | |
| 3 | 20 | |
| 4 | 20 | |
| 5 | 20 | |
| Total | 100 | |

———— *Fin del examen. Buena suerte!* ————

MECÁNICA CUÁNTICA

1

Problema 4.

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2) - E \right) \phi(x, y) = 0$$

$$E_{n_x n_y} = (n_x + n_y + 1) \hbar \omega$$

$$\phi_{n_x n_y}(x, y) = \phi_{n_x}(x) \phi_{n_y}(y), \quad \text{con } \phi_{n_i}$$

soluciones del osc. armónico 1 dim.

$$\text{Si } E = 2 \hbar \omega, \quad n_x + n_y = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_x = 1 \quad \text{y} \quad n_y = 0$$

o bien $n_x = 0$ y $n_y = 1$. Por lo tanto,

$$\phi(x, y) = C_1 \phi_1(x) \phi_0(y) + C_2 \phi_0(x) \phi_1(y)$$

$$\langle x^2 \rangle = \langle \phi | x^2 | \phi \rangle$$

$$\langle x^2 \rangle = |c_1|^2 \langle \phi_1(x) | x^2 | \phi_1(x) \rangle + \underbrace{|c_0(y) | \phi_0(y) \rangle}_{1} + \underbrace{|c_2(y) | \phi_2(y) \rangle}_{1}$$

$$\langle \phi_0(x) | x^2 | \phi_0(x) \rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2} x^2 dx = \frac{1}{2\alpha^2}$$

$$\langle \phi_1(x) | x^2 | \phi_1(x) \rangle = \frac{2\alpha^3}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2} x^4 dx = \frac{3}{2\alpha^2}$$

$$\frac{3}{2} |c_1|^2 + \frac{1}{2} |c_2|^2 = \frac{5}{6} \quad (\alpha^2 = \frac{m\omega}{\hbar})$$

Además, $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$, luego

$$|c_1| = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{y} \quad |c_2| = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

De forma análoga,

$$\langle y^2 \rangle = |c_1|^2 \langle \phi_0(y) | y^2 | \phi_0(y) \rangle + \langle \phi_1(x) | \phi_1(x) \rangle + |c_2|^2 \langle \phi_1(y) | y^2 | \phi_1(y) \rangle + \langle \phi_0(x) | \phi_0(x) \rangle =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{1}{2a^2} + \frac{2}{3} \frac{3}{2a^2} = \frac{7\hbar}{8m\omega}$$

$$\langle V \rangle = \frac{1}{2} m\omega^2 \langle x^2 + y^2 \rangle = \frac{1}{2} m\omega^2 \left(\frac{7\hbar}{8m\omega} + \frac{7\hbar}{8m\omega} \right)$$

$$= 7\hbar\omega$$

Problema 1

Introducimos la f. de o. en representación de momentos,

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp e^{ipx/\hbar} \tilde{\phi}(p)$$

la ec. de Schrödinger se escribe como

$$\frac{p^2}{2m} \tilde{\phi}(p) + \alpha i\hbar \frac{d\tilde{\phi}(p)}{dp} = E \tilde{\phi}(p), \text{ cuya}$$

solución es
$$\tilde{\phi}(p) = A \exp \left[\frac{i}{\alpha\hbar} \left(\frac{p^3}{6m} - E p \right) \right]$$

Por normalización:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_E(x) \phi_{E'}^*(x) = \left(\frac{\alpha^2 \hbar^2}{m} \right)^{1/3} \delta(E-E')$$

luego a $C = \frac{1}{\sqrt{2\alpha} (m\alpha\hbar)^{1/6}}$ (salvo una fase)

Problema 2

a) Como $\{ \psi_{\pm x_2}, \vec{\sigma} \}$ es un cjb. completo,

$$f = a \psi_{\pm x_2} + \vec{b} \cdot \vec{\sigma}$$

entodo puro (polarización máxima,

$$f^2 = f, \text{ luego } a = 1/2 \text{ y } b^2 = 1/4$$

$$(\text{usando } (\vec{b} \cdot \vec{\sigma})^2 = b^2 \text{ y } b \equiv |b|)$$

Por otro lado, se ha de cumplir

$$\langle \vec{\sigma} \cdot \hat{n} \rangle = \text{Tr} (\rho \vec{\sigma} \cdot \hat{n}) = 1$$

Tomando ρ como $\rho = a \mathbb{1}_{2 \times 2} + \vec{b} \cdot \vec{\sigma}$ y

usando

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{b} \cdot \vec{\sigma} \cdot \hat{n} = \vec{b} \cdot \hat{n} + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{b} \times \hat{n}) \quad y$$

$\text{Tr} \sigma_x = \text{Tr} \sigma_y = \text{Tr} \sigma_z = 0$, se llega a

$$\text{Tr} (\vec{b} \cdot \hat{n} \mathbb{1}_{2 \times 2}) = 2 \vec{b} \cdot \hat{n} = 1.$$

Como $|\vec{b}| = 1/2$, $\vec{b} = \frac{1}{2} \hat{n}$ y, finalmente,

$$\rho = \frac{1}{2} (\mathbb{1}_{2 \times 2} + \vec{\sigma} \cdot \hat{n}).$$

b) Se define la polarización del sistema

como

$$P = \frac{N_+ - N_-}{N_+ + N_-}, \quad \text{donde}$$

$N_+(-)$ es el número de partículas del

6

sistema cuya proyección del espín
(sobre \hat{n}), vale $+\frac{1}{2}$ ($-\frac{1}{2}$).

Si definimos $N = N_+ + N_-$, la matriz
densidad pedida será

$$\rho = \frac{N_+}{N} \frac{1}{2} \left(\mathbb{1}_{2 \times 2} + \vec{\sigma} \cdot \hat{n} \right) + \frac{N_-}{N} \frac{1}{2} \left(\mathbb{1}_{2 \times 2} - \vec{\sigma} \cdot \hat{n} \right)$$

luego, $\rho = \frac{1}{2} \left(\mathbb{1}_{2 \times 2} + P \vec{\sigma} \cdot \hat{n} \right)$ es lo

pedido.

Problema 3

(a) El potencial de la perturbación es

$$V(x, t) = -\frac{q}{\sqrt{\pi}} \frac{A}{z} e^{-t^2/z^2}$$

La probabilidad de transición (en el intervalo temporal $-\infty, \infty$) de un nivel n a otro nivel k , es

$$P_{kn} = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \langle k | V | n \rangle e^{i\omega_{kn}t} dt \right|^2,$$

donde $\omega_{kn} = (k-n)\omega$, siendo ω la frecuencia del oscilador.

En este caso, $\omega_{10} = \omega$ y

$$\langle 1 | x | 0 \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}. \quad \text{Por lo tanto,}$$

$$\begin{aligned} P_{10} &= \frac{A^2}{\hbar^2 \omega^2} \frac{q^2}{2m\omega\hbar} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-t^2}{\tau^2} + i\omega t\right) dt \right|^2 \\ &= \frac{q^2 A^2}{2m\hbar\omega} \exp\left(-\omega^2 \tau^2 / 2\right). \end{aligned}$$

El momento total cedido por el campo al oscilador es

$$\Pi = \int_{-\infty}^{\infty} qE(t) dt = \frac{qA}{\sqrt{\pi}\tau} \int_{-\infty}^{\infty} |\exp(-t^2/2\tau^2)|^2 dt$$

$$= qA, \quad \text{luego}$$

$$P_{10} = \frac{\Pi^2}{2m\hbar\omega} e^{-\omega^2\tau^2/2}$$

(observen que $2m\hbar\omega$ es el cuadrado del momento de una partícula de masa m y energía cinética $\hbar\omega$)

b) límite adiabático. Se tiene que cumplir $\tau \gg 1/\omega$. $E(t)$ varía muy lentamente. Entonces $P_{10} \ll 1$ y la teoría

de perturbaciones de 1^{er} orden es, en principio, aplicable. Popuciona como resultado la ec. final del apartado a).

Knick Instantaneo. Ahora se tiene $z \ll 1/w$.

Entonces $P_{10} \approx \frac{\Pi^2}{2m\hbar\omega}$ y, para usar pertur-

baciones a 1^{er} orden, se tiene que

cumplir $\frac{\Pi^2/2m}{\hbar\omega} \ll 1$. El numerador

representa la En. cinética "clásica" transferida al oscilador. El denominador es la diferencia de energía cinética entre los niveles fundamental y excitado del oscilador.

De esta forma, la condición de aplicabilidad

es $k_{m, z \rightarrow 0} \frac{A}{\sqrt{2}z} e^{-t^2/2z^2} = A\delta(t)$ (Fuerza impulsiva).



Universidad de los Andes-Departamento de Física
Examen de Conocimientos: Mecánica Estadística
Lunes 17 de julio de 2017

1. Un sistema aislado consta de N osciladores armónicos unidimensionales (clásicos), cada uno de masa m y frecuencia de oscilación ω , de tal forma que la energía total del sistema se puede escribir como:

$$E = \sum_{n=1}^N \left(\frac{p_n^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q_n^2 \right).$$

- (a) Usando el ensamble microcanónico, calcule la entropía del sistema.
- (b) Use el resultado de la parte (a) para calcular el calor específico C_V .
- (c) Comente su resultado.

SOLUCIÓN:

(a) Dividiendo la expresión para la energía entre E y definiendo variables $x_i = p_i/\sqrt{2mE}$ (para $i = 1, \dots, N$) y $x_i = q_i/\sqrt{(2E/m\omega)}$ (para $i = N + 1, \dots, 2N$), obtenemos la ecuación de una esfera $2N$ -dimensional. Al realizar la integral en el espacio de fase, tendremos un elemento de volumen de la forma $dq_1 \dots dq_N dp_1 \dots dp_N$ que, con el cambio de variables, genera un factor de la forma

$$(2mE)^{N/2} \left(\frac{2E}{m\omega^2} \right)^{N/2} = \left(\frac{2E}{\omega} \right)^N.$$

Como el número de microestados es esencialmente proporcional al volumen de la hipersuperficie del espacio de fase compatible con las condiciones de energía, vemos que la entropía estará dada por el (k_B veces) el logaritmo de este coeficiente, más un término que depende de N , más no de E . Haciendo uso de una constante h que determina el tamaño de la celda básica en el espacio de fase, obtenemos:

$$S = Nk_B \ln \left(\frac{E}{h\omega} \right) + f(N).$$

(b) Haciendo uso de la definición de la temperatura en función de la entropía, se sigue inmediatamente del numeral anterior que en este caso la energía interna es $U = Nk_B T$ y, por lo tanto, $C_V = Nk_B$.

(c) Una primera observación es que la energía total que se obtiene como resultado obedece el teorema de equipartición (debido al carácter cuadrático de Hamiltoniano) y esto se ve también reflejado en el valor de la capacidad calorífica. También es relevante observar que, al ser una constante, C_V no tiene el comportamiento requerido a bajas temperaturas. EL comportamiento correcto solo se puede obtener a partir de una descripción cuántica.

2. Un cierto “gas” es descrito por la siguiente relación fundamental:

$$\frac{S}{R} = \frac{UV}{N} - \frac{N^3}{UV},$$

donde N representa el número de moles, U la energía interna y V el volumen (R es una constante). Inicialmente se tienen $N_1 = 1$ moles de este gas en un cilindro cerrado y aislado térmicamente, a una temperatura T_1 (subsistema 1) y $N_2 = 4$ moles del mismo gas, en otro cilindro (este también cerrado y aislado), a una temperatura T_2 (subsistema 2). Los volúmenes de los cilindros son tales que la densidad del gas es la misma en ambos cilindros (llamar $\rho = N/V$ a dicha densidad). A continuación, los dos cilindros se ponen en contacto, a través de un muro diatérmico e impermeable, y se espera a que el sistema alcance el equilibrio térmico.

(a) Encuentre el valor de la energía interna del subsistema 1, U_1^{eq} , y exprese la en función de la energía total (U_{tot}) del sistema.

(b) Encuentre la temperatura de equilibrio y exprese la en términos de ρ , R , T_1 y T_2 .

SOLUCIÓN:

(a) Primero que todo, dado que la densidad es la misma para ambos subsistemas, tenemos $\frac{N_1}{V_1} = \frac{N_2}{V_2} \Rightarrow V_2 = 4V_1$. Por otro lado, la entropía *total* del sistema es la suma de las entropías de los subsistemas 1 y 2:

$$S = S^{(1)} + S^{(2)}.$$

Como la energía total es constante, tenemos una ligadura ($U_{tot} = U_1 + U_2$) que podemos aprovechar al calcular el estado de equilibrio. Así que tenemos:

$$\begin{aligned} S &= S^{(1)} + S^{(2)} = R \left(\frac{U_1 V_1}{N_1} - \frac{(N_1)^3}{U_1 V_1} \right) + R \left(\frac{U_2 V_2}{N_2} - \frac{(N_2)^3}{U_2 V_2} \right) \\ &= R \left(U_1 V_1 - \frac{1}{U_1 V_1} \right) + R \left(\frac{U_2 V_2}{4} - \frac{4^3}{U_2 V_2} \right) \\ &= R \left(U_1 V_1 - \frac{1}{U_1 V_1} \right) + R \left(\frac{(U_{tot} - U_1) V_2}{4} - \frac{64}{(U_{tot} - U_1) V_2} \right). \end{aligned}$$

Según el principio de máxima entropía, el estado de equilibrio es aquel que corresponde a los valores de las variables de estado que den lugar al máximo valor de la entropía, teniendo en cuenta las ligaduras del problema. En este caso la ligadura de energía ya ha sido tomada en cuenta, así que el estado de equilibrio está determinado por el valor de U_1 que maximice la función

$$S(U_1) = R \left(U_1 V_1 - \frac{1}{U_1 V_1} \right) + R \left(\frac{(U_{tot} - U_1) V_2}{4} - \frac{64}{(U_{tot} - U_1) V_2} \right).$$

Calculando $\frac{dS}{dU_1} = 0$ obtenemos la solución positiva

$$U_1^{eq} = \frac{1}{5} U_{tot}. \quad (1)$$

(b) Temperatura de equilibrio, en términos de ρ, R, T_1 y T_2 .

Tenemos:

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial U} = R \left(\frac{V}{N} + \frac{N^3}{U^2 V} \right).$$

Si las energías iniciales de los 2 subsistemas se denotan U_1 y U_2 , entonces de la relación anterior obtenemos ($i = 1, 2$):

$$U_i = \frac{N_i}{\sqrt{\frac{1}{\rho R T_i} - \frac{1}{\rho^2}}}.$$

Por lo tanto, la energía total del sistema es

$$U_{tot} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\rho R T_1} - \frac{1}{\rho^2}}} + \frac{4}{\sqrt{\frac{1}{\rho R T_2} - \frac{1}{\rho^2}}}. \quad (2)$$

La temperatura de equilibrio se puede escribir en términos de U_1^{eq} :

$$\frac{1}{R T_{eq}} = \frac{1}{\rho} + \frac{\rho}{(U_1^{eq})^2}. \quad (3)$$

Pero $U_1^{eq} = U_{tot}/5$, de tal forma que

$$(R T_{eq})^{-1} = \rho^{-1} + 25\rho \left(\left(\frac{1}{\rho R T_1} - \frac{1}{\rho^2} \right)^{-1/2} + \left(\frac{1}{\rho R T_2} - \frac{1}{\rho^2} \right)^{-1/2} \right)^{-2}. \quad (4)$$

3. Considere el modelo de Ising clásico en una dimensión espacial, cuya energía para una configuración es espines $\{\mu_i\}_i$ está dada por

$$E(\{\mu\}) = -J \sum_i \mu_i \mu_{i+1} - B \sum_i \mu_i.$$

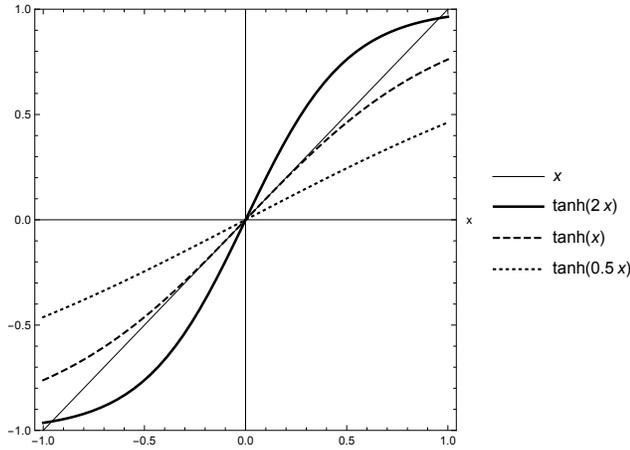
(a) Obtenga, en la aproximación de *campo medio*, la función de partición de este modelo.

(b) Use dicha función de partición para obtener una expresión para la magnetización por espín del sistema.

(c) Considere ahora el caso $B = 0$. Hay una transición de fase? Si este es el caso, cuál es la temperatura crítica?

(d) Comente su resultado.

El siguiente gráfico puede ser de utilidad:



SOLUCIÓN: Consultar, por ejemplo, la sección 20.2 de “Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics” (H. Callen). Otra discusión detallada se puede encontrar en este enlace.

4. Para el mismo sistema del problema anterior (usando condiciones de frontera periódicas), recuerde que la matriz de transferencia del modelo es una matriz T tal que $Z = \text{Tr}(T^N)$, donde N es el número de sitios de la cadena de Ising.

(a) Usando las convenciones $x = \beta J$ y $y = \beta B$, verifique que la matriz de transferencia está dada por

$$T = \begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{-x} \\ e^{-x} & e^{x-y} \end{pmatrix}.$$

Ayuda: considere expresiones de la forma $e^{x\mu_i\mu_{i+1}} e^{\frac{1}{2}y(\mu_i+\mu_{i+1})}$.

(b) Calcule los valores propios de T y haga uso de esta información para calcular la magnetización por espín, en el límite $N \gg 1$.

SOLUCIÓN:

(a) La función de partición está dada por la siguiente expresión:

$$Z = \sum_{\vec{\mu}} e^{(x \sum_{i=1}^N \mu_i \mu_{i+1} + y \sum_{i=1}^N \mu_i)}.$$

Se puede ver claramente que Z está dada por una suma, sobre todas las configuraciones, de productos de la forma

$$e^{x\mu_i\mu_{i+1}} e^{\frac{y}{2}(\mu_i+\mu_{i+1})}$$

(un cálculo explícito con $N = 3$ puede ser de utilidad para ver esto). Dado que las variable μ solo toman los valores ± 1 , podemos identificar el índice “+” con “1” y el índice “-” con “2”. De esta forma, podemos definir una matriz 2×2 dada por

$$T_{\mu\mu'} := e^{x\mu\mu'} e^{\frac{y}{2}(\mu+\mu')}.$$

Esta es justamente la matriz del enunciado y se puede verificar fácilmente que se cumple $Z = \text{Tr}(T^N)$. Por lo tanto, T es la matriz de transferencia de este problema.

(b) Los valores propios de T están dados por

$$\lambda_{\pm} = e^x \cosh y \pm \sqrt{e^{2x} \sinh^2 y + e^{-2x}}.$$

Usando $Z = \text{Tr}(T^N)$, obtenemos $Z = \lambda_+^N + \lambda_-^N$.

Para la magnetización por espín, hacemos uso de la invarianza traslacional del sistema, para escribir (haciendo referencia al sitio “ l ”),

$$\langle \mu_l \rangle_{\beta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle \mu_i \rangle_{\beta} = \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial y} \ln Z.$$

Usando $\mu_- < \mu_+$, se muestra fácilmente que en el límite deseado, la expresión anterior se reduce a

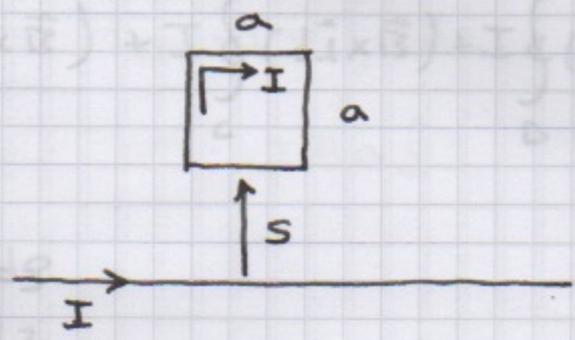
$$\frac{1}{\lambda_+} \frac{\partial \lambda_+}{\partial y}.$$

Se sigue entonces que

$$\langle \mu_l \rangle_{\beta} = \frac{\sinh y}{\sinh^2 y + e^{-4x}}.$$

PROBLEMA # 1

Un alambre recto muy largo y un "loop" cuadrado de lado a se encuentran localizados como se muestra en la figura.



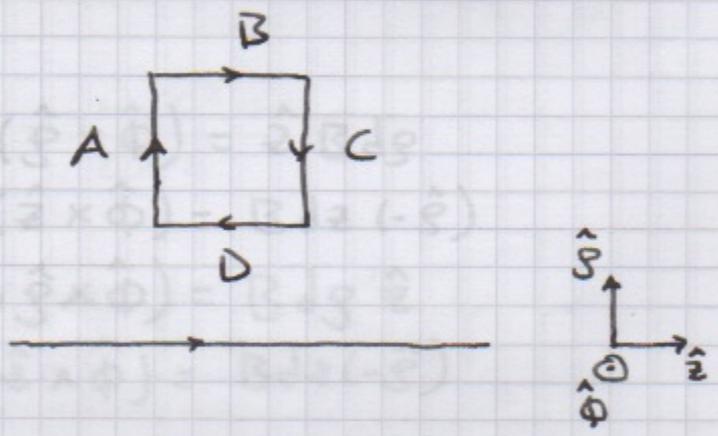
Tanto por el alambre como por el loop circula una corriente I

Encuentre la fuerza neta que actúa sobre el loop.

Solución:

$$\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D$$

$$\vec{F} = I \oint_{ABCD} (d\vec{l} \times \vec{B})$$



\vec{B} es el campo magnético producido por el alambre recto

=> C: camino circular de radio s concéntrico centrado en el eje z

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} = \mu_0 I \quad \vec{B} = B_\phi(s) \hat{\phi}$$

$$d\vec{l} = s d\phi \hat{\phi}$$

$$\Rightarrow 2\pi s B_\phi = \mu_0 I \Rightarrow \vec{B}(s) = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi}$$

$$\vec{F} = I \int_A (d\vec{l} \times \vec{B}) + I \int_B (d\vec{l} \times \vec{B}) + I \int_C (d\vec{l} \times \vec{B}) + I \int_D (d\vec{l} \times \vec{B})$$

$$\text{en A: } d\vec{l} = +\hat{y} dl = +\hat{y} ds$$

$$\text{en B: } d\vec{l} = +\hat{z} dl = +\hat{z} dz$$

$$\text{en C: } d\vec{l} = -\hat{y} dl = +\hat{y} ds$$

$$\text{en D: } d\vec{l} = -\hat{z} dl = +\hat{z} dz$$

~~Para~~

$$\text{En A: } d\vec{l} \times \vec{B} = B ds (\hat{y} \times \hat{\phi}) = \hat{z} B ds$$

$$\text{En B: } d\vec{l} \times \vec{B} = B dz (\hat{z} \times \hat{\phi}) = B dz (-\hat{y})$$

$$\text{En C: } d\vec{l} \times \vec{B} = B ds (+\hat{y} \times \hat{\phi}) = B ds \hat{z}$$

$$\text{En D: } d\vec{l} \times \vec{B} = B dz (\hat{z} \times \hat{\phi}) = B dz (-\hat{y})$$

$$\vec{F}_A = I \hat{z} \int_A B ds \quad \vec{F}_C = I \hat{z} \int_C B ds$$

$$\int_C B ds = - \int_A B ds \quad \leftarrow \text{El camino se recorre en direcci3n opuesta}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_C = -\vec{F}_A \quad \leftarrow \text{Se cancelan.}$$

En B: $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi(s+a)} \hat{\phi} \Rightarrow \vec{F}_B = -I \hat{s} \int_B B dz$
 $= -I B a \hat{s}$

$\vec{F}_B = -\frac{\mu_0 I^2 a}{2\pi(s+a)} \hat{s}$

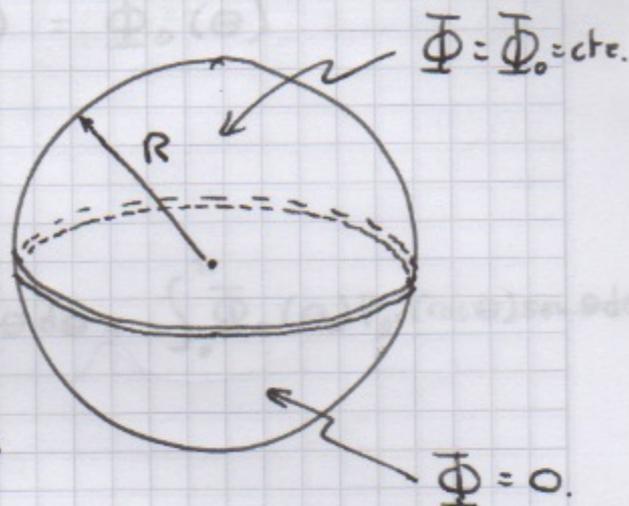
En D: $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi} \quad \vec{F}_D = -I \hat{s} B \int_0^a dz$
 \uparrow
 $L = a$

$\vec{F}_D = I B a \hat{s} \quad \vec{F}_D = \frac{\mu_0 I^2 a}{2\pi s} \hat{s}$

$\vec{F}_{TOT} = \frac{\mu_0 I^2 a}{2\pi} \hat{s} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} \right\}$

PROBLEMA # 3

Dos hemisferios de material conductor estan separados por una distancia despreciable en el plano ecuatorial (como se muestra en la figura).



El hemisferio superior es mantenido a un potencial constante Φ_0

El hemisferio inferior es mantenido a un potencial $\Phi = 0$.

Calcule el potencial $\Phi(\vec{r})$ para $|\vec{r}| > R$.

Despreciando los terminos que caen mas rapido que $1/r^4$ calcule en forma explicita cada termino de $\Phi(\vec{r})$.

Solucion

El potencial $\Phi(\vec{r}) \rightarrow 0$ para $r \rightarrow \infty$

El problema tiene simetria azimutal $\Rightarrow \Phi(\vec{r}) = \Phi(r, \theta)$

La forma general de la soluci3n al problema de Laplace en el caso azimutal es:

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

$\Rightarrow A_l = 0$ por condiciones de frontera en infinito

$$\Rightarrow \Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta)$$

$$\Phi(r=R, \theta) = \Phi_0(\theta) \equiv \begin{cases} \Phi_0 & 0 \leq \theta < \pi/2 \\ 0 & \pi/2 \leq \theta < \pi \end{cases}$$

Por otro lado:

$$\Phi(r=R, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos\theta) = \underline{\Phi}_0(\theta)$$

$$B_l = ?$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} \int_0^{\pi} P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta) \sin\theta d\theta = \int_0^{\pi} \Phi_0(\theta) P_{l'}(\cos\theta) \sin\theta d\theta$$

$$\uparrow \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$$

$$\Rightarrow \frac{2 B_{l'}}{R^{l'+1} (2l'+1)} = \int_0^{\pi} \Phi_0(\theta) P_{l'}(\cos\theta) \sin\theta d\theta$$

$$B_l = \frac{1}{2} R^{l+1} (2l+1) \int_0^{\pi} \Phi_0(\theta) P_l(\cos\theta) \sin\theta d\theta$$

$$B_l = \frac{1}{2} \Phi_0 R^{l+1} (2l+1) \int_0^{\pi/2} P_l(\cos\theta) \sin\theta d\theta$$

$$\hookrightarrow \Phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta)$$

$$x = \cos\theta; \quad dx = -\sin\theta d\theta \quad \theta=0 \rightarrow x=1$$

$$\theta=\pi/2 \rightarrow x=0$$

$$\Rightarrow B_l = \frac{1}{2} \Phi_0 R^{l+1} (2l+1) \int_0^1 P_l(x) dx$$

$$P_0(x) = 1; \quad P_1(x) = x; \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1); \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$\int_0^1 P_0(x) dx = \int_0^1 dx = 1$$

$$\int_0^1 P_1(x) dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 P_2(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (3x^2 - 1) dx = 0$$

$$\int_0^1 P_3(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (5x^3 - 3x) dx = -\frac{1}{8}$$

$$B_0 = \Phi_0 R \cdot \frac{1}{2}; \quad B_1 = \Phi_0 R^2 \frac{3}{2} + \frac{1}{2}; \quad B_2 = \Phi_0 R^3 \frac{5}{2} + 0$$

$$B_3 = \Phi_0 R^4 \frac{7}{2} + (-\frac{1}{8})$$

$$\underline{\Phi}(\vec{r}) = \Phi_0 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} \right) + \frac{3}{4} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \cos\theta - \frac{7}{32} \left(\frac{R}{r} \right)^4 (5\cos^3\theta - 3\cos\theta) \right\}$$



$$V^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e r} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2m_e} \frac{e^2}{r}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

$$p = -\frac{dE}{dr} = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \frac{dr}{dr} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = \frac{1}{6\pi c} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e r^2} \right)^2$$

PROBLEMA # 2

Considere el modelo clásico de un átomo de hidrógeno: un electrón orbitando en trayectoria circular de radio d a un protón. Estime cuánto tiempo tarda en colapsar este átomo.

(Asuma que la fórmula de Larmor es válida en este contexto).

$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}$$

Solución:

El electrón orbita al rededor del protón debido a la fuerza atractiva de Coulomb

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = ma = m \frac{v^2}{r}$$

$$\Rightarrow a = \frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m r^2} \quad m = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p} \approx m_e$$

$$E = K + U \quad P = -\frac{dE}{dt} = -\frac{d}{dt}(K + U)$$

$$K = \frac{1}{2} m v^2; \quad U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

$$v^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e r} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

$$P = -\frac{dE}{dt} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c} a^2 = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e v^2} \right)^2$$

$$-\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} = \frac{\mu_0}{6\pi c} \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{e^4}{m_e^2 r^4}$$

$$-\frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} = \frac{\mu_0}{3 \cdot 4\pi\epsilon_0} \frac{e^4}{m_e^2 r^4}$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{3c} \left(\frac{e^4}{4\pi^2 m_e^2 \epsilon_0 / \mu_0} \right) \frac{1}{r^2}$$

$$\uparrow c^2 \epsilon_0 \leftarrow c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$$

$$\boxed{\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{3c} \left(\frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 m_e c} \right)^2 \frac{1}{r^2}}$$

$$dt = -3c \left(\frac{2\pi\epsilon_0 m_e c}{e^2} \right)^2 r^2 dr$$

$$\int_0^{\gamma} dt = \gamma = -3c \left(\frac{2\pi\epsilon_0 m_e c}{e^2} \right)^2 \int_d^0 r^2 dr$$

$$= -3c \left(\frac{2\pi\epsilon_0 m_e c}{e^2} \right)^2 \frac{1}{3} r^3 \Big|_d^0$$

$$\boxed{\gamma = c \left(\frac{2\pi\epsilon_0 m_e c}{e^2} \right)^2 d^3}$$

Cuando se colocan números realistas \Rightarrow

$$\gamma \sim 10^{-18} \text{ s}$$

Un átomo clásico solo duraría unos pocos picosegundos.

PROBLEMA # 4

Dados: $A_\mu = (\Phi, \vec{A})$; $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

$\partial_\mu = (\partial_0, \nabla)$; $\partial_0 = \frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{\partial}{c\partial t}$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

a) Demuestre que $\partial_\mu F_{\nu\sigma} + \partial_\nu F_{\sigma\mu} + \partial_\sigma F_{\mu\nu} = 0$

b) Demuestre que $\partial_\mu F_{\nu\sigma} + \partial_\nu F_{\sigma\mu} + \partial_\sigma F_{\mu\nu} = 0$ es equivalente a

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} &= 0 \end{aligned}$$

Solución:

(a) $\partial_\mu F_{\nu\sigma} + \partial_\nu F_{\sigma\mu} + \partial_\sigma F_{\mu\nu} = 0$

$$\begin{aligned} &\partial_\mu (\partial_\nu A_\sigma - \partial_\sigma A_\nu) + \partial_\nu (\partial_\sigma A_\mu - \partial_\mu A_\sigma) + \partial_\sigma (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\ &= \cancel{\partial_\mu \partial_\nu A_\sigma} - \cancel{\partial_\mu \partial_\sigma A_\nu} + \cancel{\partial_\nu \partial_\sigma A_\mu} - \cancel{\partial_\nu \partial_\mu A_\sigma} + \cancel{\partial_\sigma \partial_\mu A_\nu} - \cancel{\partial_\sigma \partial_\nu A_\mu} \\ &= 0 \checkmark \end{aligned}$$

(b) Recorramos los diferentes casos para μ, ν, σ

$$\mu=0, \nu=0, \sigma=0 \rightarrow F_{00}=0 \Rightarrow 0=0 \checkmark$$

$$\mu=0, \nu=i, \sigma=i \quad \partial_0 F_{ii} + \partial_i F_{i0} + \partial_i F_{0i} = 0$$

$$\uparrow \quad \quad \quad \uparrow$$

$$L=0 \quad \quad \quad F_{0i} = -F_{i0}$$

$$\Rightarrow 0=0 \checkmark$$

$$\mu=1, \nu=2, \sigma=3$$

$$\partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = 0$$

$$\partial_x (-B_x) + \partial_y (-B_y) + \partial_z (-B_z) = 0$$

$$\partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z = \boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0} \checkmark$$

$$\mu=0; \nu=i; \sigma=j \quad (i \neq j)$$

$$i=1, j=2 \quad \partial_0 F_{12} + \partial_1 F_{20} + \partial_2 F_{01} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (-B_z) + \partial_x (-E_y/c) + \partial_y (E_x/c) = 0$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} + (\partial_x E_y - \partial_y E_x) = 0$$

$$\uparrow (\nabla \times \vec{E})_z$$

$$i=1, j=3 \quad \partial_0 F_{13} + \partial_1 F_{30} + \partial_3 F_{01} = 0$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} + \partial_x (-E_z/c) + \partial_z (E_x/c) = 0$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} + (\partial_z E_x - \partial_x E_z) = 0$$

$$\uparrow (\nabla \times \vec{E})_y$$

$$i=2, j=3 \quad \partial_0 F_{23} + \partial_2 F_{30} + \partial_3 F_{02} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (-B_x) + \partial_y (-E_z/c) + \partial_z (E_y/c) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (B_x) + (\partial_z E_y - \partial_y E_z) = 0$$

$$\uparrow (\nabla \times \vec{E})_x$$

\Rightarrow

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} + (\nabla \times \vec{E})_z = 0$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} + (\nabla \times \vec{E})_y = 0$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} + (\nabla \times \vec{E})_x = 0$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} = 0 \quad \checkmark$$