Doctorado en Ciencias - Física

Examen de Conocimientos - 2015 - 2

Mecánica

No se permite el uso de ningún documento, libro o apuntes, ni el uso de ningún dispositivo electrónico tales como celulares, reproductores de música, computadores, tabletas, etc.

Ecuaciones

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + 2m\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{\Omega} + m(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{\Omega}, \quad \dot{x} = \textstyle\sum_\sigma \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma} \dot{q_\sigma}$$

$$p_\sigma = \frac{\partial L}{\partial \dot{q_\sigma}}, \quad [U, V]_{q,p} = \textstyle\sum_k \left(\frac{\partial U}{\partial q_k}\frac{\partial V}{\partial p_k} - \frac{\partial U}{\partial p_k}\frac{\partial V}{\partial q_k}\right)$$

$$[q_i, q_j] = 0, \quad [p_i, p_j] = 0, \quad [q_i, p_j] = \delta_{i,j}$$

Universidad de los Andes

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2015 - 2
Mecánica

Duración total del exámen : 3 horas

PROBLEMA 1. PÉNDULO SEMI-ESFÉRICO.

La figura muestra un péndulo semi-esférico de longitud constante b, atado a un extremo fijo en el punto O representado por el área sombreada. El movimiento del péndulo está descrito por la variación de los angulos α y φ. Con base en esta información, halle:

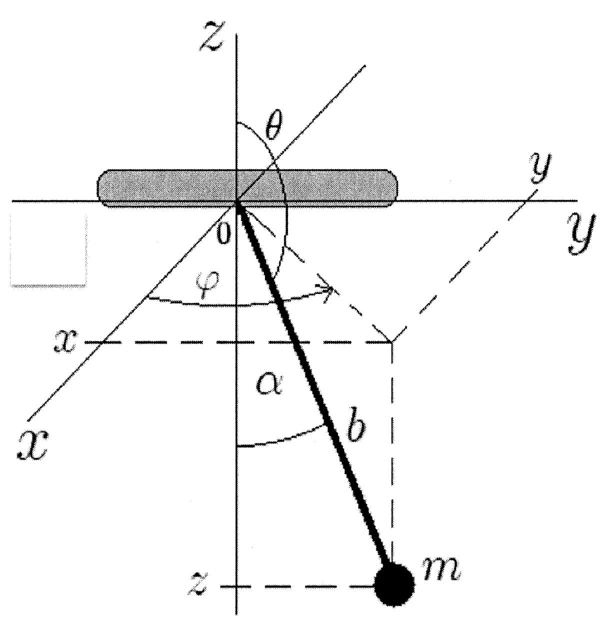
a.) (5 puntos) La expresión de energía cinética.

b.) (3 puntos) La expresión para la energía potencial.

c.) (2 puntos) El Lagrangiano del sistema.

d.) (5 puntos) El Hamiltoniano del sistema.

e.) (5 puntos) Los momentos generalizados.



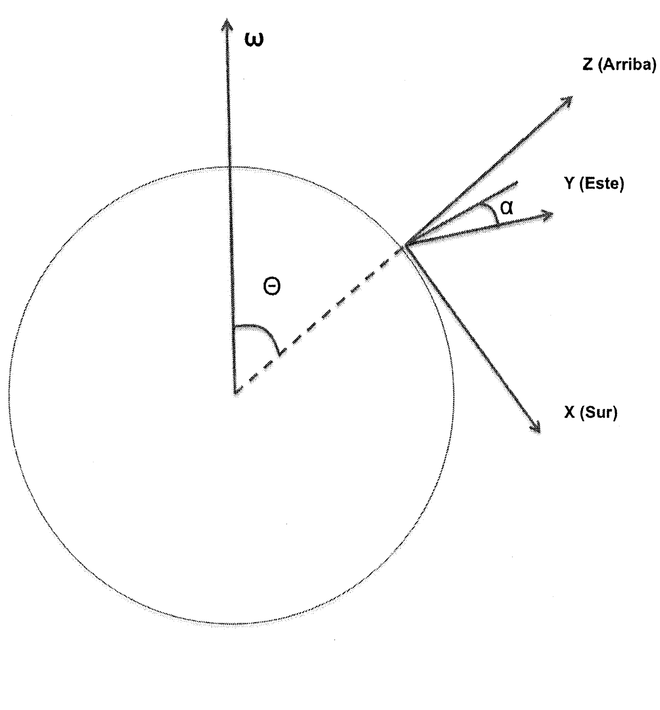
Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2015 - 2
Mecánica

PROBLEMA 2. ACELERACIÓN DE CORIOLIS

Un cañón está localizado en un punto de la tierra a un ángulo polar θ, como se muestra en la figura. El barril del cañón hace un ángulo α con la horizontal y apunta hacia el este.

a.) (5 puntos) Para un disparo de este cañón, halle una expresión para la velocidad de la bala asumiendo que la tierra está estática. Tenga en cuenta que la bala sale con una velocidad inicial v_0.

b.) (15 puntos) Halle la expresión para la aceleración de Coriolis, teniendo en cuenta que la velocidad angular de la tierra está dada por $\vec{\omega} = -\omega sen\theta\hat{x} + \omega cos\theta\hat{z}$, donde $\hat{x}$ y $\hat{z}$ representan los vectores unitarios relacionados con el sistema coordenado mostrado en la figura.



Doctorado en Ciencias - Física

Examen de Conocimientos - 2015 - 2

Mecánica

PROBLEMA 3. PÉNDULO CON RESORTES.

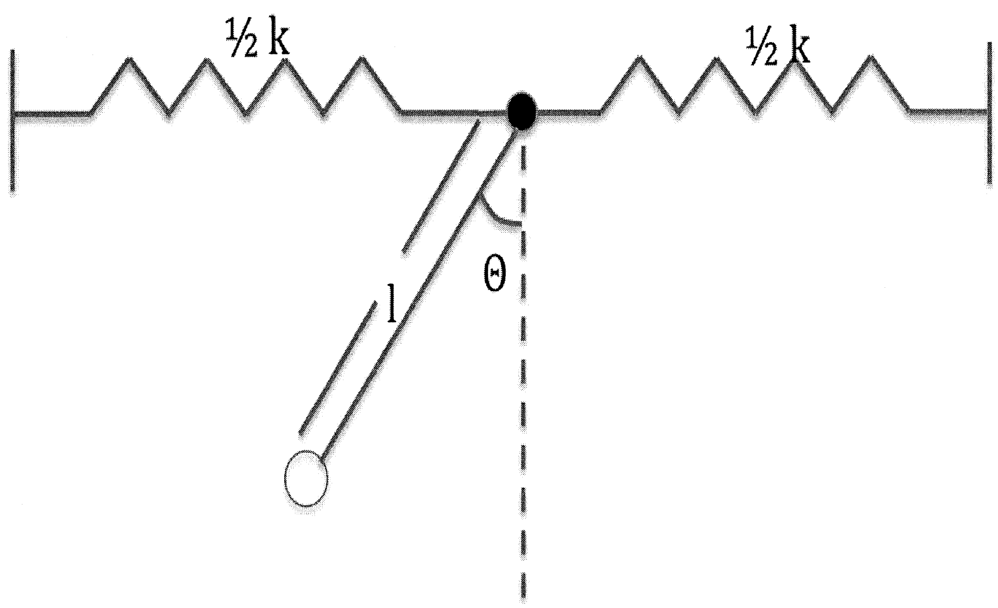
Para el péndulo mostrado en la figura, el punto de suspensión (punto negro) se puede mover en dirección horizontal. Cada resorte mostrado tiene constante $\frac{1}{2}k$.

a.) (10 puntos) Halle el Lagrangiano del sistema.

b.) (5 puntos) Halle las ecuaciones de movimiento.

c.) (10 puntos) Halle la ecuación de movimiento para oscilaciones pequeñas y dé una interpretación física del resultado.

d.) (5 puntos) Halle el Hamiltoniano y los momentos generalizados del sistema.



Universidad de los Andes

Doctorado en Ciencias - Física

Examen de Conocimientos - 2015 - 2

Mecánica

PROBLEMA 4. CORCHETES DE POISSON

Sean F y G dos funciones arbitrarias cuyo corchete de Poisson, $[F, G]_{q,p}$, se define en términos de las coordenadas generalizadas q_i y p_i.

a.) (15 puntos) Si se realiza un cambio de coordenadas de la función G a un conjunto de variables transformadas Q_k y P_k ($G = G(Q_k, P_k)$), las cuales mantienen la forma canónica de las ecuaciones asociadas con F y G, demuestre que el corchete de Poisson se puede expresar como:

$$[F, G]_{q,p} = \sum_k \left(\frac{\partial G}{\partial Q_k}[F, Q_k]_{q,p} + \frac{\partial G}{\partial P_k}[F, P_k]_{q,p} \right)$$

b.) (5 puntos) Determinar el corchete de Poisson para $F = q_i$ y $G = H$, donde H es la función Hamiltoniana. De igual manera, halle el corchete de Poisson para $F = p_i$ y $G = H$.

c.) (10 puntos) Dé su interpretación física de los resultados obtenidos en la parte (b) y discuta la importancia de los corchetes de Poisson y sus aplicaciones en diversas áreas de la física.

Universidad de los Andes

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2015 - 2
Electrodinámica

No se permite el uso de ningún documento, libro o apuntes, ni el uso de ningún dispositivo electrónico tales como celulares, reproductores de música, computadores, tabletas, etc.

Duración total del exámen : 3 horas

PROBLEMA 1. POTENCIAL EN LA SUPERFICIE DE UNA ESFERA.

El potencial sobre la superficie de una esfera hueca de radio R está dado por:

$$V_0\,(\theta) = V_0\{cos\theta\,(1 + 2cos\theta) - cos\,(2\theta)\},$$

donde V_0 es una constante y θ es el ángulo polar en coordenadas esféricas. Se desea hallar el potencial eléctrico en cualquier punto del espacio.

a.) (3 puntos) Escriba explícitamente las condiciones de frontera que debe cumplir el potencial eléctrico en este caso.

b.) (3 puntos) Escriba una ecuación para expandir el potencial eléctrico, en todo punto del espacio, en términos de funciones especiales que mantengan la simetría esférica y que cumpla con las condiciones de frontera.

c.) (4 puntos) Expanda el potencial sobre la superficie de la esfera en términos de funciones especiales que mantengan la simetría esférica.

d.) (10 puntos) Determine el potencial eléctrico dentro y fuera de la esfera.

Universidad de los Andes

Doctorado en Ciencias - Física

Examen de Conocimientos - 2015 - 2

Electrodinámica

PROBLEMA 2. CONDENSADOR ESFÉRICO CON DIELÉCTRICOS

Un condensador consiste de una esfera sólida conductora de radio a y concentrica a un cascarón esférico conductor delgado de radio b (b>a). El espacio entre la esfera y el cascarón se llena con dos materiales dieléctricos diferentes: existe un material con una constante dieléctrica K_1 en la región $a<r<r_1$ y uno con constante dieléctrica K_2 en la región $r_1<r<b$. Existe una carga total Q (-Q) distribuida uniformemente en el conductor interno (externo). Hallar:

a.) (5 puntos) El vector de desplazamiento eléctrico $\vec{D}$ en cada dieléctrico.

b.) (5 puntos) El campo eléctrico en cada dieléctrico.

c.) (5 puntos) La polarización $\vec{P}$ en cada dieléctrico.

d.) (5 puntos) La capacitancia del sistema.

Universidad de los Andes

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2015 - 2
Electrodinámica

PROBLEMA 3. RADIACIÓN DIPOLAR.

El modelo de radiación dipolar es comúnmente usado para describir la emisión de luz por átomos o moléculas con dimensiones inferiores a 10 Angstrom.

a.) (10 puntos) Escriba explicitamente las aproximaciones que hay que usar para hallar los potenciales en la zona de radiación (aproximación dipolar).

b.) (6 puntos) ¿Es la aproximación dipolar válida para emisión de luz visible? ¿Para rayos X? ¿Porqué?

c.) (14 puntos) Determine el potencial eléctrico retardado, en la zona de radiación, para un dipolo eléctrico conformado por dos cargas de signo opuesto que están ubicadas en el eje z y separadas una distancia d. El valor de las cargas oscila con el tiempo de acuerdo a $Q(t)=Q_0\cos(\omega t)$.

Universidad de los Andes

Doctorado en Ciencias - Física

Examen de Conocimientos - 2015 - 2

Electrodinámica

PROBLEMA 4. ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS EN EL VACÍO

Se desea estudiar la ecuación que describe una onda electromagnética para un espacio vacío, libre de cargas y corrientes.

a.) (4 puntos) Escriba las ecuaciones de Maxwell, en forma diferencial, que describen las condiciones especificadas.

b.) (8 puntos) Use las ecuaciones de Maxwell para obtener las ecuaciones diferenciales (ecuaciones de onda) que deben seguir los campos eléctrico y magnético.

c.) (6 puntos) Un estudiante lanza la hipótesis que una posible solución a la ecuación de onda es la siguiente: $f(x,t) = Acos(\alpha_1 t^2 + \alpha_2 tx + \alpha_3 x^2)$, Donde A y α_i's son constantes. ¿Qué condiciones deben cumplir los coeficientes α_1, α_2, α_3 para que la hipótesis del estudiante sea correcta?

d.) (12 puntos) Use las ecuaciones de Maxwell para obtener las ecuaciones de onda para los potenciales magnético y eléctrico y determine el calibre que simetriza las ecuaciones de onda para ambos potenciales.

Universidad de los Andes

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2015 - 2
Formúlas Útiles

$f(r,\theta)=\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(A_\ell r^\ell P_\ell(cos\theta)+\frac{B_\ell}{r^{\ell+1}}P_\ell(cos\theta)\right);$

$\int_{-1}^{1} P_m(x)\,P_\ell(x)\,dx=\frac{2}{2\ell+1}\delta_{m,\ell};$

$P_0(x)=1;$ $\quad P_1(x)=x;$ $\quad P_2(x)=\frac{3x^2-1}{2};$ $\quad P_3(x)=\frac{5x^3-3x}{2};$

$\vec{p}=\alpha\vec{E};$ $\quad \vec{\tau}=\vec{p}\times\vec{E};$ $\quad \vec{F}=\left(\vec{p}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E};$ $\quad \sigma_b=\vec{P}\cdot\hat{n};$ $\quad \rho_b=-\vec{\nabla}\cdot\vec{P};$

$\vec{D}=\epsilon_0\vec{E}+\vec{P};$ $\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho_{libre};$ $\quad \epsilon=\epsilon_0(1+\chi_e);$ $\quad \vec{D}=\epsilon\vec{E};$

$W=\frac{1}{2}\int\left(\vec{D}\cdot\vec{E}\right)dV;$ $\quad \vec{P}=\epsilon_0\chi_e\vec{E};$ $\quad d\vec{F}=Id\vec{\ell}\times\vec{B};$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0;$ $\quad d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2};$

$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\left(\frac{\vec{J}}{r}\right)dV;$ $\quad \Phi=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left(\frac{\rho}{r}\right)dV;$

$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\hat{r}}{r^2};$ $\quad \vec{m}=\frac{I}{2}\oint\left(\vec{r}\times d\vec{\ell}\right)dV;$

$\vec{\tau}=\vec{m}\times\vec{B};$ $\quad \vec{F}=\nabla\left(\vec{m}\cdot\vec{B}\right);$ $\quad \vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\left(\frac{\vec{M}\times\hat{r}}{r^2}\right)dV;$

$\vec{J}_b=\vec{\nabla}\times\vec{M};$ $\quad \vec{K}_b=\vec{M}\times\hat{n};$ $\quad \vec{J}=\sigma\vec{E};$ $\quad \vec{H}=\frac{1}{\mu_0}\vec{B}-\vec{M};$

$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}_{libre};$ $\quad \vec{M}=\chi_m\vec{H};$ $\quad \vec{B}=\mu\vec{H};$ $\quad \vec{S}=\frac{1}{\mu_0}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right);$

$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\vec{B}\cdot\left(\vec{C}\times\vec{A}\right)=\vec{C}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right);$

$\vec{A}\times\vec{B}\times\vec{C}=\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B}-\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C};$

$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\psi=0;$ $\quad \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)=0;$

$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A};$

$\vec{\nabla}\left(\psi\vec{A}\right)=\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\psi+\psi\vec{\nabla}\cdot\vec{A};$

$\vec{\nabla}\times\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\vec{A}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right)-\vec{B}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)+\left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A}-\left(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B}$

Universidad de los Andes

Doctorado en Ciencias - Física

Examen de Conocimientos - 2015 - 2

Mecánica estadística

No se permite el uso de ningún documento, libro o apuntes, ni el uso de ningún dispositivo electrónico tales como celulares, reproductores de música, computadores, tabletas, etc.

Duración total del exámen : 3 horas

PROBLEMA 1. DISTRIBUCIÓN CANÓNICA DEL HELIO.

La diferencia de energía entre el estado base y el primer estado excitado de un átomo de helio es 20 eV. El estado fundamental corresponde a $^1S_0$ y el primer estado excitado corresponde a $^3S_1$.

a.) (3 puntos) En un gas en equilibrio térmico la ocupación de un nivel de energía ϵ_α es proporcional a $g_\alpha e^{-\beta\epsilon_\alpha}$, con g_α representa el degeneramiento del nivel. ¿Cuál es el degeneramiento del primer estado excitado del átomo de helio?
b.) (10 puntos) En un sistema de átomos de helio a 6000K: ¿Qué fracción de los átomos se encontrará en el primer estado excitado?[1] .
c.) (2 puntos) Dé su interpretación física a este resultado.

[1] $\frac{1eV}{k_B} = 1{,}16 \times 10^4 K$, donde k_B es la constante de Boltzman

Universidad de los Andes

Doctorado en Ciencias - Física

Examen de Conocimientos - 2015 - 2

Mecánica estadística

PROBLEMA 2. RESISTIVIDAD DE UN METAL.

El objetivo de este problema es deducir la dependencia de la resistividad de un metal con el desplazamiento de los átomos. Para esto tenga en cuenta las siguientes indicaciones:

- La resisitividad de un metal a temperatura ambiente es proporcional a la probabilidad de que un electrón se disperse por vibraciones de una red cristalina. Esta probabilidad es a su vez proporcional al cuadrado del desplazamiento medio de los átomos.
- Se supone que cada átomo de masa m que se desplaza de su posición de equilibrio es sometido a una fuerza de atracción central proporcional al desplazamiento del átomo. En este caso las interacciones entre los átomos se consideran despreciables.

a.) (5 puntos) Haga el cálculo de la resistividad considerando las vibraciones de la red cristalina como osciladores clásicos.
b.) (10 puntos) Haga el cálculo de la resistividad considerando las vibraciones de la red cristalina como osciladores cuánticos.
c.) (5 puntos) Del cálculo cuántico deduzca los valores de temperatura donde la resistividad se reduce al caso clásico y los valores de temperatura donde los efectos cuánticos son dominantes.
d.) (5 puntos) Discuta las diferencias entre el modelo clásico y cuántico de la resistividad.

Universidad de
los Andes

Doctorado en Ciencias - Física

Examen de Conocimientos - 2015 - 2

Mecánica estadística

PROBLEMA 3. CORRECCIONES CUÁNTICAS A LA ECUACIÓN DE ESTADO

Considere fermiones o bosones, de espin S, no interactuantes en equilibrio termodinámico y libres en un cierto volumen Ω. Suponga que la temperatura y la densidad son tales que el cociente entre las capacidades caloríficas a presión y volumen constantes, γ, es:

$$\gamma = \left(\frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}\right)^3 \frac{< N >}{\Omega},$$

donde h es la constante de Planck y k_B es la constante de Boltzman. En este caso, el cociente entre la longitud de onda de *de Broglie* y el volumen de las partículas es pequeño. Queremos calcular correcciones cuánticas de orden ξ (con $\xi = e^{\alpha}$ y $\alpha = \frac{\mu}{k_B T}$ donde μ es el potencial químico) a la ecuación de estado de una gas perfecto clásico, para eso:

a.) (10 puntos) Calcule la función de equipartición
b.) (5 puntos) Halle el valor esperado del número de estados del sistema.
c.) (10 puntos) Calcule el límite de el valor esperado del número de estados del sistema a grandes volumenes.
d.) (5 puntos) Determine la ecuación de estado a primer orden en ξ.

Universidad de los Andes

Doctorado en Ciencias - Física

Examen de Conocimientos - 2015 - 2

Mecánica estadística

PROBLEMA 4. TEORÍA DE CAMPO MEDIO PARA UN MATERIAL FERROMAGNÉTICO

Considere el hamiltoniano de Heissenberg de espín 1/2 para una red cúbica.

$$H = -\frac{J}{2} \sum_{<i,j>} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j + g\mu_B \sum_i \vec{B} \cdot \vec{S}_i,$$

donde, J es la constante de interacción entre espines y se asume mayor que cero, la suma $< i.j >$ indica que se realiza entre vecinos más cercanos, $\vec{B}$ es un campo magnético externo que se asumirá en dirección $\hat{z}$ y μ_B es el magnetón de Bohr. El factor 1/2 en el primer término se incluye de tal manera que cada par de espines se cuente solo una vez. Cada sitio i se asume que tiene un espín $\vec{S}_i$ de valor $S = 1/2$. El signo "+"del segundo término proviene del hecho que la carga del electrón es negativa, por lo tanto el momento magnético se opone a la dirección del espín.

a.) (5 puntos) Centre su atención en un espín particular $\vec{S}_i$ y escriba un hamiltoniano efectivo para el mismo, tratando las otras variables $\vec{S}_j$ con $j \neq i$ como valores esperados $< S_j >$ y no como operadores.

b.) (10 puntos) Los estados propios de $\vec{B} \cdot \vec{S}$ son $\pm B/2$ por lo que se tiene la función de partición:

$$Z = e^{-\beta\mu_B B/2} + e^{\beta\mu_B B/2}$$

con $\beta = 1/k_B T$. Calcule $< S_i >$ en términos de la temperatura y las variables fijas $< S_j >$ para obtener una ecuación de campo autoconsistente.

c.) (5 puntos) Determine la magnetización $M = |\vec{M}|$ en términos de $< \vec{S} >$ y la densidad de espines.

d.) (5 puntos) Encuentre la susceptibilidad magnética a alta temperatura

$$\chi = \frac{dM}{dH} = \mu_0 \frac{dM}{dB}$$

e.) (5 puntos) Para altas temperaturas encuentre la temperatura crítica a la cual χ diverge y explique el significado físico de la misma.

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2015 - 2
Mecánica estadística

FORMULAS GENERALES

1. Funciones de estado y relaciones de Maxwell

Energía interna:	U	$dU = TdS - pdV$
Entalpía:	$H = U + pV$	$dH = TdS + Vdp$
Energía libre:	$F = U - TS$	$dF = -SdT - pdV$
Entalpía libre de Gibbs :	$G = H - TS$	$dG = -SdT + Vdp$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V , \quad \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p , \quad \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T , \quad \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T$$

$$TdS = C_V dT + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV \quad \text{y} \quad TdS = C_p dT - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dp$$

2. Para un gas ideal:

$$S_m = C_V \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + R\ln\left(\frac{V}{V_0}\right) + S_{m0} \quad \text{y} \quad S_m = C_p \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - R\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) + S'_{m0}$$

3. Valores esperados en términos de la función de partición.

$$\begin{aligned} E &= -\frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta} \ , \ p = kT\frac{\partial \ln(Z)}{\partial V} \ , \ S = k\ln(Z) - k\beta\frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta} \ , \ C_V = k\beta^2\frac{\partial^2 \ln(Z)}{\partial \beta^2} \\ F &= -kT\ln(Z) \ , \ N = \frac{\partial \ln(Z)}{\partial \alpha} \ , \ \mu_j = -kT\frac{\partial \ln(Z)}{\partial N_j} \end{aligned}$$

4. Funciones hiperbólicas que pueden ser de utilidad:

$$\begin{aligned} sinh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

Universidad de los Andes

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2015 - 2
Mecánica Cuántica

No se permite el uso de ningún documento, libro o apuntes, ni el uso de ningún dispositivo electrónico tales como celulares, reproductores de música, computadores, tabletas, etc.

Duración total del exámen : 3 horas

PROBLEMA 1. PARTÍCULAS IDÉNTICAS.

Considere un sistema de dos partículas idénticas. Una de ellas está en el estado individual $|\varphi\rangle$ y la otra en el estado individual $|\chi\rangle$. Asumimos que $|\varphi\rangle$ y $|\chi\rangle$ son orto-normales. Suponga que queremos medir, en cada una de las partículas, la cantidad física $\hat{B}$ que tiene asociados los estados propios $|u_n\rangle$ para una de las partículas y $|u_{n'}\rangle$ para la otra. Es decir que matemáticamente tenemos

$$\hat{B}|u_n\rangle = b_n|u_n\rangle \qquad y \qquad \hat{B}|u_{n'}\rangle = b_{n'}|u_{n'}\rangle, \tag{1}$$

donde b_n y $b_{n'}$ son los correspondientes valores propios y asumimos que el espectro de $\hat{B}$ es discreto y no degenerado.

a.) (5 puntos) Para el caso en que las dos partículas son bosones, calcule la probabilidad conjunta, $P^{bosones}(b_n, b_{n'})$, de medir el valor b_n para una de las partículas y $b_{n'}$ para la otra. Dé una interpretación física de este resultado.

b.) (5 puntos) Para el caso en que las dos partículas son fermiones, calcule la probabilidad conjunta, $P^{fermiones}(b_n, b_{n'})$, de medir el valor b_n para una de las partículas y $b_{n'}$ para la otra. Dé una interpretación física de este resultado y compare el resultado con el caso de bosones.

c.) (5 puntos) Para el caso en que las dos partículas son distinguibles, calcule la probabilidad conjunta, $P^{distinguibles}(b_n, b_{n'})$, de medir el valor b_n para una de las partículas y $b_{n'}$ para la otra. Dé una interpretación física de este resultado y compare el resultado con el caso de bosones. Para este caso, considere que el instrumento de medida es tal que aunque las dos partículas no son idénticas, el aparato no es capaz de distinguir entre ellas.

d.) (5 puntos) Si $|u_n\rangle$ y $|u_{n'}\rangle$ son iguales, calcule $P^{bosones}(b_n, b_{n'})$, $P^{fermiones}(b_n, b_{n'})$ y $P^{distinguibles}(b_n, b_{n'})$. Discuta la física detrás de cada uno de estos resultados.

Universidad de los Andes

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2015 - 2
Mecánica Cuántica

PROBLEMA 2. PARTÍCULA BAJO LA INFLUENCIA DE UN POTENCIAL DELTA

Considere una partícula de masa m cuyo Hamiltoniano, $\hat{H}$, está dado por

$$\hat{H} = \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} - \alpha\delta(x), \tag{2}$$

donde α es una constante positiva, $\hbar$ es la constante de Planck dividida por 2π y $\delta(x)$ denota la función delta.

a.) (5 puntos) Si las funciones propias de $\hat{H}$ se denotan por $\varphi(x)$, demuestre que la derivada de estas funciones presenta una discontinuidad en $x = 0$ y demuestre que el valor de esa discontinuidad es $-\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\varphi(0)$.
Sugerencia : integre la ecuación de valores propios de $\hat{H}$ entre $-\varepsilon$ y $+\varepsilon$ y luego aproxime ε a cero.

b.) (5 puntos) Demuestre que, cuando la energía $E < 0$ (estado ligado),

$$\varphi(x) = A_1 e^{\rho x} \qquad para\ \ x < 0 \tag{3}$$

$$\varphi(x) = A_2 e^{-\rho x}, \qquad para\ \ x > 0 \tag{4}$$

donde $\rho = \sqrt{-\frac{2mE}{\hbar^2}}$ y A_1 y A_2 son constantes.

c.) (5 puntos) Calcule el valor de la energía del estado ligado en función de α, m y $\hbar$.

d.) (5 puntos) La función de onda para el estado ligado, $\varphi(x)$, puede escribirse como

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{m\alpha}{\hbar^2}}e^{-\frac{m\alpha}{\hbar^2}|x|}. \tag{5}$$

Dibuje la densidad de probabilidad asociada a esta función de onda y calcule su ancho, Δx, que es correspondiente al FWHM (Full width at half maximum).

Universidad de los Andes

Doctorado en Ciencias - Física

Examen de Conocimientos - 2015 - 2

Mecánica Cuántica

PROBLEMA 3. MÉTODO VARIACIONAL.

En este ejercicio se calculará la energía del estado base del átomo de hidrógeno utilizando el método variacional y se comparará con el valor exacto, $E_0^{exacto} = -\frac{me^2}{2\hbar^2}$, donde m es la masa del electrón, e su carga eléctrica y $\hbar$ la constante de Planck dividida por 2π .
En el método variacional se escogen unas "funciones de prueba" que dependen de un cierto número de parámetros. En este ejercicio, consideraremos como "funciones de prueba" los estados

$$\varphi_\alpha(r) = C(1 - \frac{r}{\alpha}) \qquad para \ r \leq \alpha, \tag{6}$$

y

$$\varphi_\alpha(r) = 0 \qquad para \ r > \alpha. \tag{7}$$

En estas expresiones, C es una constante de normalización y α es el parámetro a optimizar usando el método variacional.

a.) (14 puntos) Demuestre que, en las "funciones de prueba", el valor medio del hamiltoniano del electrón,

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} - \frac{e^2}{r}, \tag{8}$$

puede escribirse como

$$\langle \hat{H} \rangle = \frac{5\hbar^2}{m\alpha^2} - \frac{5e^2}{2\alpha}. \tag{9}$$

b.) (8puntos) De acuerdo con el método variacional, existe un valor óptimo para α, llamado α_0, que se encuentra al minimizar $\langle \hat{H} \rangle$. Calcule el valor de α_0 para el electrón en el átomo de hidrógeno y demuestre que $\alpha_0 = 4a_0$ donde $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$ corresponde al radio de Bohr.

c.) (8 puntos) $\langle \hat{H} \rangle$ evaluado en α_0 constituye una aproximación a la energía del estado base del sistema en consideración. Sabiendo esto, calcule el valor de la energía obtenida por medio del método variacional, discutido en este ejercicio, y compárelo con E_0^{exacto}. Comente sobre el resultado obtenido.

Doctorado en Ciencias - Física

Examen de Conocimientos - 2015 - 2

Mecánica Cuántica

PROBLEMA 4. MOMENTO ANGULAR PARA UN SISTEMA DE DOS PARTÍCULAS

Considere un sistema de dos electrónes. La energía del sistema depende de la orientación relativa de los dos espines, produciendo un termino de energía potencial en el hamiltoniano representado por

$$\frac{J}{\hbar}\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2, \tag{10}$$

donde $\hat{S}_1$ y $\hat{S}_2$ son los operadores de espín para cada partícula, J es una constante y $\hbar$ es la constante de Planck dividida por 2π.

a.) (8 puntos) Haciendo explícitamente el procedimiento para la adición de momento angular, calcule el estado sínglete ($|0,0\rangle$) y los estados tríplete ($|1,-1\rangle$, $|1,0\rangle$, $|1,1\rangle$) que se asocian a la base de espín total (base acoplada) en función de la base desacoplada de spines individuales.

b.) (8 puntos) Demuestre que un operador de la forma dada en ecuación (10) distingue entre el estado sínglete ($|0,0\rangle$) y los estados triplete ($|1,-1\rangle$, $|1,0\rangle$, $|1,1\rangle$) que se asocian a la base de espín total (base acoplada).

c.) (8 puntos) Si el sistema se pone en contacto con un campo magnético de magnitud B en la dirección z, la energía de interacción entre los electrones y el campo se puede escribir como

$$\frac{\mu_B}{\hbar}B(g_1\hat{S}_{1z} + g_2\hat{S}_{2z}), \tag{11}$$

donde μ_B es el magnetón de Bohr, y $g_1 \neq g_2$ indican los correspondientes factores de Landè. Considerando los dos términos de interacción anteriores, escriba la representación matricial de $\hat{H}$ en la base de espín total de las dos partículas (base acoplada).

d.) (6 puntos) Demuestre que cuando $\hbar J >> \mu_B B$ es conveniente trabajar en la base de espín total (base acoplada) de las dos partículas.

Universidad de los Andes

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2015 - 2
Mecánica Cuántica

FORMULAS ÚTILES

1. Oscilador armónico, operadores escalera

$$\hat{a}|n>= \sqrt{n}|n-1> \quad \text{y} \quad \hat{a}^{\dagger}|n>= \sqrt{n+1}|n+1> \tag{12}$$

2.

$$Y_l^m(\theta,\varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} e^{im\varphi} P_l^m(\cos\theta) \tag{13}$$

$$Y_l^m(\pi-\theta,\varphi+\pi) = (-1)^l Y_l^m(\theta,\varphi) \tag{14}$$

3. Para los operadores de momento ángular $\hat{J}$:

$\hat{J}_z|J,m_j>= j(j+1)\hbar|J,m_j>$

$\hat{J}_+|J,m_j>= \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m+1)}|J,m_j+1>$

$\hat{J}_-|J,m_j>= \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m-1)}|J,m_j-1>$

$[\hat{J}_+,\hat{J}_z] = -\hbar\hat{J}_+$

$[\hat{J}_-,\hat{J}_z] = -\hbar\hat{J}_-$

4. Matrices de Pauli

$$\vec{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución Examen Mecánica

1. Pendulo Semi-esférico

a) Usando la expresión para la velocidad en coordenadas esféricas: $\dot{\bar{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\,\hat{\varphi}$, tenemos: $T = \frac{1}{2} m b^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2\theta)$

Debido a que $r = b = cte.$ Como $\theta = \pi - \alpha$, podemos escribir:

$$T = \frac{1}{2} m b^2 (\dot{\alpha}^2 + \dot{\varphi}^2 \operatorname{Sen}^2\alpha)$$

b) $V = - mgb\cos\alpha$

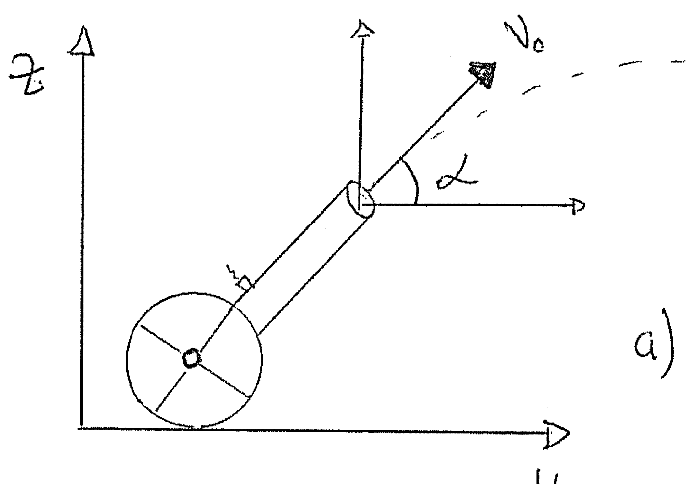
c) $L = \frac{1}{2} m b^2 (\dot{\alpha}^2 + \dot{\varphi}^2 \operatorname{Sen}^2\alpha) + mgb\cos\alpha$

d) $H = T + V = \frac{1}{2} m b^2 (\dot{\alpha}^2 + \dot{\varphi}^2 \operatorname{Sen}^2 \alpha) + mgb \operatorname{Cos}\alpha$

e) Las coordenadas generalizadas son α y φ. Por lo tanto, los momentos generalizados son:

$$P_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} = m b^2 \dot{\alpha} \quad y \quad P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m b^2 \dot{\varphi} \operatorname{Sen}^2 \alpha$$

2. Aceleración de Coriolis



a) $\dot{\bar{r}} = \dot{\bar{r}}_0 + \bar{g}\, t$

$\dot{\bar{r}}_0 = V_0 \operatorname{Cos}\alpha\, \hat{y} + V_0 \operatorname{Sen}\alpha\, \hat{z}$

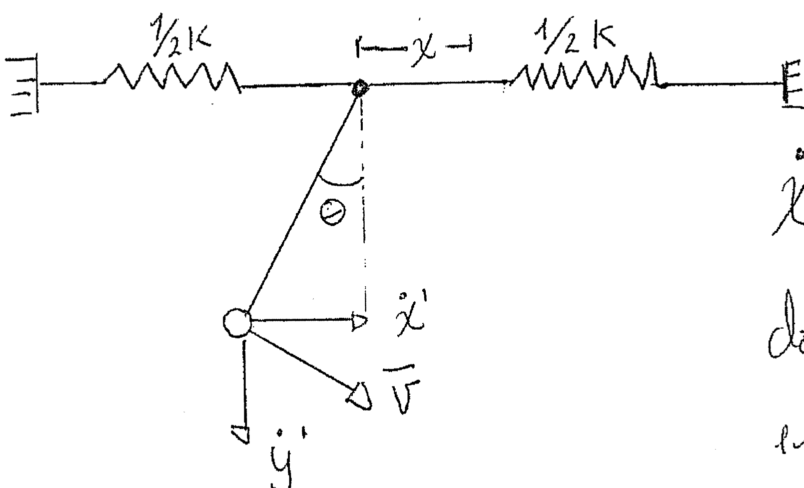
$$\dot{\bar{r}} = V_0 \operatorname{Cos}\alpha\, \hat{y} + (V_0 \operatorname{Sen}\alpha - gt)\, \hat{z}$$

b) Usando la expresión en la hoja de ecuaciones:

$$\ddot{\bar{r}}_{coriolis} = 2\,\dot{\bar{r}} \times \bar{\omega} = 2 \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & V_0 \cos\alpha & V_0 \operatorname{Sen}\alpha - gt \\ -\omega \operatorname{Sen}\theta & 0 & \omega \cos\theta \end{vmatrix}$$

$$\ddot{\bar{r}}_{coriolis} = 2\Big[\, V_0 \omega \cos\alpha \cos\theta\, \hat{x} - (V_0 \omega \operatorname{Sen}\theta \operatorname{Sen}\alpha - \omega g t \operatorname{Sen}\theta)\, \hat{y} + \omega V_0 \cos\alpha \operatorname{Sen}\theta\, \hat{z} \Big]$$

3. Péndulo con Resortes



$$\dot{x}' = \dot{x} + \dot{\theta}\, l \cos\theta$$

donde x representa el desplazamiento horizontal del punto de suspensión.

$\dot{y} = \dot{\theta} l \operatorname{Sen}\theta$. La energía cinética estará dada por: $T = \frac{1}{2} m \left[(\dot{x} + l\dot{\theta}\operatorname{Cos}\theta)^2 + (l\dot{\theta}\operatorname{Sen}\theta)^2 \right]$

y la energía potencial:

$$V = -mgl\operatorname{Cos}\theta + \frac{1}{2} K x^2$$

$$L = \frac{1}{2} m \left[(\dot{x} + l\dot{\theta}\operatorname{Cos}\theta)^2 + (l\dot{\theta}\operatorname{Sen}\theta)^2 \right] + mgl\operatorname{Cos}\theta - \frac{1}{2} K x^2$$

b) Para hallar las ecuaciones de movimiento usamos $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$ y

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

Para x: $$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m(\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m(\ddot{x} + l\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^2 \operatorname{sen}\theta)$$

$\frac{\partial L}{\partial x} = -Kx$. Entonces nos queda:

$$\boxed{m(\ddot{x} + l\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^2 \operatorname{sen}\theta) + Kx = 0} \quad (1)$$

Para θ: $$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2}m(2l^2\dot{\theta} + 2\dot{x}l\cos\theta)$$
$$= m(l^2\dot{\theta} + \dot{x}l\cos\theta)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = m(l^2\ddot{\theta} + \ddot{x}l\cos\theta - l\dot{\theta}\dot{x}\operatorname{sen}\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m\dot{x}\dot{\theta}l\operatorname{sen}\theta - mgl\operatorname{sen}\theta$$

Entonces: $$\boxed{l^2\ddot{\theta} + \ddot{x}l\cos\theta + gl\operatorname{sen}\theta = 0} \quad (2)$$

c) Para θ muy pequeño : $\operatorname{Sen}\theta \simeq \theta$ y

$\operatorname{Cos}\theta \simeq 1$

Por lo tanto:

$$(1) \quad m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} - ml\dot{\theta}^2\theta + kx = 0$$

$$(2) \quad l^2\ddot{\theta} + \ddot{x}l + gl\theta = 0$$

Reordenando:

$$(1) \quad \ddot{x} + l\ddot{\theta} - l\dot{\theta}^2\theta + \frac{k}{m}x = 0.$$

$$(2) \quad \ddot{x} + l\ddot{\theta} + g\theta = 0$$

Como θ es muy pequeño $\dot{\theta}^2\theta \simeq 0$,

entonces:

$$(1) \quad \ddot{x} + l\ddot{\theta} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$(2) \quad \ddot{x} + l\ddot{\theta} + g\theta = 0$$

Restando (1) de (2), tenemos:

$$\frac{K}{m}x - g\theta = 0$$

entonces: $\frac{K}{m}\ddot{x} = g\ddot{\theta}$ (3)

Reemplazando (3) en (1):

$$\frac{mg}{K}\ddot{\theta} + l\ddot{\theta} + g\theta = 0$$

$$\ddot{\theta}\left(\frac{mg}{K} + l\right) + g\theta = 0$$

Llamemos $l' = \frac{mg}{K} + l$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l'}\theta = 0 \quad (4)$$

. La ecuación (4) tiene la misma forma de la ecuación de un péndulo simple!

d) Usando los resultados de la parte "b"

$$P_x = m(\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta) \quad y$$

$$P_\theta = m(l^2\dot{\theta} + \dot{x}l\cos\theta)$$

El Hamiltoniano es $H = T + V$

$$H = \frac{1}{2}m\left[(\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (l\dot{\theta}\operatorname{Sen}\theta)^2\right]$$
$$- mgl\cos\theta + \frac{1}{2}Kx^2$$

4. Corchetes de Poisson

a) Usando la definición de los corchetes de Poisson para este caso, tenemos:

$$[F, G]_{q,p} = \sum_j \left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial G}{\partial q_j}\right)$$

Si $G = G(Q_K, P_K)$, entonces:

$$\frac{\partial G}{\partial p_j} = \sum_K \frac{\partial G}{\partial Q_K}\frac{\partial Q_K}{\partial p_j} + \frac{\partial G}{\partial P_K}\frac{\partial P_K}{\partial p_j}$$

$$\frac{\partial G}{\partial q_j} = \sum_K \frac{\partial G}{\partial Q_K}\frac{\partial Q_K}{\partial q_j} + \frac{\partial G}{\partial P_K}\frac{\partial P_K}{\partial q_j}$$

Reemplazando en el Corchete de Poisson:

$$[F, G]_{q,p} = \sum_{j,K}\left[\frac{\partial F}{\partial q_j}\left(\frac{\partial G}{\partial Q_K}\frac{\partial Q_K}{\partial p_j} + \frac{\partial G}{\partial P_K}\frac{\partial P_K}{\partial p_j}\right) - \frac{\partial F}{\partial p_j}\left(\frac{\partial G}{\partial Q_K}\frac{\partial Q_K}{\partial q_j} + \frac{\partial G}{\partial P_K}\frac{\partial P_K}{\partial q_j}\right)\right]$$

Reordenando terminos:

$$[F, G]_{q,p} = \sum_K\left[\frac{\partial G}{\partial Q_K}\left(\sum_j \frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{\partial Q_K}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial Q_K}{\partial q_j}\right) + \frac{\partial G}{\partial P_K}\left(\sum_j \frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{\partial P_K}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial P_K}{\partial q_j}\right)\right]$$

$$[F, G]_{q,p} = \sum_K\left[\frac{\partial G}{\partial Q_K}[F, Q_K]_{q,p} + \frac{\partial G}{\partial P_K}[F, P_K]_{q,p}\right]$$

b) $F = q_i$, $G = H$

$$[q_i, H]_{q,p} = \sum_K \frac{\partial H}{\partial Q_K}[q_i, Q_K]_{q,p} + \frac{\partial H}{\partial P_K}[q_i, P_K]_{q,}$$

De acuerdo con las propiedades de los corchetes de Poisson: $[q_i, Q_K] = 0$ y

$$[q_i, P_K]_{q,p} = \delta_{iK}$$

Entonces $[q_i, H]_{q,p} = \dfrac{\partial H}{\partial P_i} = \dot{q}_i$

De manera similar, para $F = P_i$ y $G = H$

$$[P_i, H]_{q,p} = \frac{\partial H}{\partial Q_i} = \dot{P}_i$$

Problema 1 Solución — Potencial en la Superficie de una esfera

a) $\lim_{r\to\infty} V(r,\theta) = 0$; $\lim_{r\to 0} V(r) = \text{finito}$

V debe ser continuo en la frontera $\underset{\text{dentro de esfera}}{V(r=R,\theta)} = \underset{\text{fuera de esfera}}{V(r=R,\theta)}$

b) Para $r<R$

$$V_{\text{dentro}}(r,\theta) = \sum_\ell A_\ell r^\ell P_\ell(\cos\theta)$$, así se cumple que V sea finito cuando $r\to 0$

Para $r \geq R$

$$V_{\text{fuera}}(r,\theta) = \sum_\ell \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos\theta)$$, así se cumple que $V\to 0$ cuando $r\to\infty$

c) $$V_0(\theta) = V_0\{\cos\theta(1+2\cos\theta) - \cos(2\theta)\}$$
$$= V_0\{\cos\theta + 2\cos^2\theta - \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\}$$
$$= V_0\{1+\cos\theta\}$$
$$\Rightarrow V_0(\theta) = V_0\{P_0(\cos\theta) + P_1(\cos\theta)\}$$

d) Evaluamos $V_{\text{dentro}}(r,\theta)$ y $V_{\text{fuera}}(r,\theta)$ en la frontera: $r=R$

Para el potencial dentro de la esfera:

$$V_{\text{dentro}}(r=R,\theta) = V_0(\theta) = \sum_\ell A_\ell R^\ell P_\ell(\cos\theta)$$

Usando condición de ortogonalidad de los polinomios de Legendre:

$$\sum_\ell \int_0^\pi A_\ell R^\ell P_\ell(\cos\theta) P_m(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta\, d\theta = \int_0^\pi V_0(\theta) P_m(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

$$A_\ell \frac{2}{2\ell+1} R^\ell = \int_0^\pi V_0 P_0(\cos\theta) P_m(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta\, d\theta + \int_0^\pi V_0 P_1(\cos\theta) P_m(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta\, d\theta$$
$$= 2V_0\delta_{\ell,0} + \frac{2V_0}{3}\delta_{\ell,1}$$

$$\Rightarrow A_0 = V_0 ;\quad A_1 = \frac{V_0}{R}$$

$\Rightarrow$ Dentro de la esfera: $$\boxed{V_{\text{dentro}}(r,\theta) = V_0 + \frac{V_0}{R} r\cos\theta \qquad r<R}$$

Para fuera de la esfera:

$$V_{fuera}(r=R,\theta) = V_0(\theta) = \sum_l \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \sum_l \frac{B_l}{R^{l+1}} \int_0^{\pi} P_l(\cos\theta)\, P_m(\cos\theta)\, \operatorname{sen}\theta\, d\theta = \int_0^{\pi} V_0(\theta)\, P_m(\cos\theta)\, \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

$$\frac{B_l}{R^{l+1}} \frac{2}{2l+1} = \int_0^{\pi} V_0(\theta)\, P_l(\cos\theta)\, \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

$$= V_0 \int_0^{\pi} P_0(\cos\theta)\, P_l(\cos\theta)\, \operatorname{sen}\theta\, d\theta + V_0 \int_0^{\pi} P_1(\cos\theta)\, P_l(\cos\theta)\, \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

$$= 2V_0\, \delta_{l,0} + \frac{2V_0}{3}\, \delta_{l,1}$$

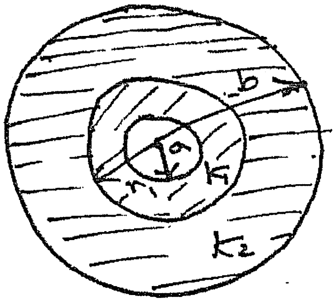
$$\Rightarrow B_0 = V_0 R \;;\quad B_1 = V_0 R^2$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{fuera}(r,\theta) = V_0 \frac{R}{r} + V_0 \frac{R^2}{r^2} \cos\theta}$$

PROBLEMA 2

Condensador esférico con dieléctricos.

SOLUCIÓN



A) Usando la Ley de Gauss:

$$\oint_c \vec{D}\cdot\hat{n}\,da = Q$$

Para $r < a \Rightarrow D = 0$ porque Q reside sobre la superficie.

Para $a < r < b \Rightarrow \vec{D} = \dfrac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}$ → mismo valor para ambos dieléctricos.

B) Dieléctrico 1:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi K_1 \epsilon_0 r^2}\hat{r} \qquad a \leq r < r_1$$

Dieléctrico 2:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi K_2 \epsilon_0 r^2}\hat{r} \qquad r_1 \leq r < b$$

C) $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

Dieléctrico 1: $\vec{P} = \dfrac{Q}{4\pi r^2}\left(1 - \dfrac{1}{K_1}\right)\hat{r}, \; a \leq r < r_1$

Dieléctrico 2: $\vec{P} = \dfrac{Q}{4\pi r^2}\left(1 - \dfrac{1}{K_2}\right)\hat{r} \quad r_1 \leq r < b$

D)

$$V_{ab} = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_b^{r_1}\vec{E}\cdot d\vec{l} - \int_{r_1}^{a}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{1}{K_2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{K_1}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r_1}\right)\right\}$$

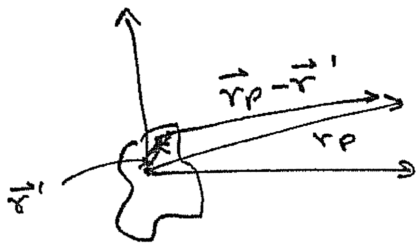
$$C_{eq} = \frac{Q}{|V_{ab}|} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{K_2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{K_1}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r_1}\right)}$$

PROBLEMA 3 Radiación dipolar

SOLUCIÓN

A) Se asume que la distribución de carga es localizada.

Se asume además que $\|\vec{r}_p\| >> \lambda >> \|\vec{r}\,'\|$



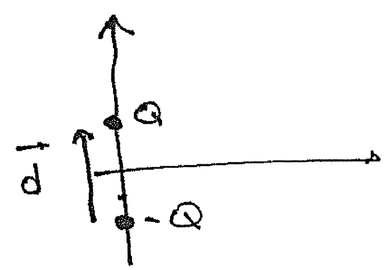
- La posición donde evaluamos los campos es mucho mayor que la longitud de onda emitida por la fuente.
- La longitud de onda emitida por la fuente es mucho mayor que el tamaño de la fuente.

$$\frac{1}{\|\vec{r}_p - \vec{r}\,'\|} = (r_p^2 + r'^2 - 2\vec{r}_p \cdot \vec{r}\,')^{1/2} \simeq \frac{1}{r_p}\left(1 + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r_p^2}\right)$$

$$\|\vec{r}_p - \vec{r}\,'\| \simeq r_p\left(1 - \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2}\right)$$

Para el caso de un dipolo orientado en el eje z:

$$\|\vec{r}_p - \vec{r}\,'\| \simeq r_p\left(1 \mp \frac{d}{2r_p}\cos\theta\right)$$



$$\frac{1}{\|\vec{r}_p - \vec{r}\,'\|} \simeq \frac{1}{r_p}\left(1 \pm \frac{d}{2r_p}\cos\theta\right)$$

Donde d es la distancia entre las dos cargas del dipolo, los signos "+" y "−" se usan para indicar las posiciones de las cargas positiva y negativa, respectivamente.

(B) Luz visible es en el rango de 400nm a 700nm mientras que el tamaño de las moleculas es de 1nm

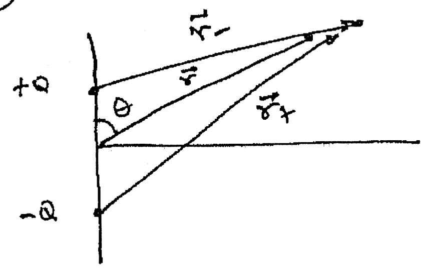
en este caso $\lambda \gg d$ $\quad d =$ diametro de la molecula.

$\Rightarrow$ La aproximación dipolar se puede usar para estudiar emisión de luz visible. Rayos X $\Rightarrow \lambda_{\text{rayos X}} \simeq 10\text{nm} \sim 0.01\text{nm}$

$\Rightarrow \lambda \sim$ Dimensiones molecula

no se puede usar aproximación dipolar.

(C) $\vec{p}(t) = P_0 \cos(\omega t)\,\hat{k}$



$P_0 = Qd$

asumimos $r \gg d$

$$\Rightarrow r_\pm \cong r\left(1 \mp \frac{d}{2r}\cos\theta\right)$$

$$\frac{1}{r_\pm} \cong \frac{1}{r}\left(1 \pm \frac{d}{2r}\cos\theta\right)$$

$$V(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{Q_0\cos(\omega(t - r_+/c))}{r_+} - \frac{Q_0\cos(\omega(t - r_-/c))}{r_-}\right\}$$

$$\cos[\omega(t - r_\pm/c)] \cong \cos\left[\omega t - \frac{\omega r}{c}\left(1 \mp \frac{d}{2r}\cos\theta\right)\right]$$

$$= \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) \pm \frac{\omega d}{2c}\cos\theta\right]$$

$$= \cos[\omega(t - r/c)]\cos\left(\frac{\omega d}{2c}\cos\theta\right) \mp \operatorname{sen}\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\omega d}{2c}\cos\theta\right)$$

pero $\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{c}{\omega} \gg d$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{d}{2(c/\omega)}\cos\theta\right) \approx 1 \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{d}{2(c/\omega)}\cos\theta\right) \approx \frac{d}{2(c/\omega)}\cos\theta$$

$$V(\vec{r},t) = \frac{P_0\cos\theta}{4\pi\epsilon_0}\left\{-\frac{\omega}{c}\operatorname{sen}[\omega(t - r/c)] + \frac{1}{r}\cos[\omega(t - r/c)]\right\}$$

como $r \gg \lambda \Rightarrow r \gg \frac{c}{\omega}$

$$\Rightarrow \boxed{V(\vec{r},t) = -\frac{P_0\omega}{4\pi\epsilon_0 c}\left(\frac{\cos\theta}{r}\right)\operatorname{sen}[\omega(t - r/c)]}$$

Problema 4 Solución

ONDAS E.M. EN EL VACÍO

A) Ecuaciones de Maxwell en el vacío sin fuentes:

(i) $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$

(ii) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$

(iii) $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

(iv) $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

B) $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{B})$

$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \nabla^2\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{B})$

Para $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$ y $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\Rightarrow -\nabla^2\vec{E} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \underbrace{\nabla^2\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0}_{\text{Ecuación de onda para el campo } \vec{E}}$$

$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{E})$

$$\vec{\nabla}(\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{B}}_{0}) - \vec{\nabla}^2\vec{B} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} \Rightarrow \underbrace{\nabla^2\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0}_{\text{Ecuación de onda para el campo } \vec{B}}$$

C) $f(x,t) = A\cos(\alpha_1 t^2 + \alpha_2 t x + \alpha_3 x^2)$

Para que $f(x,t)$ sea solución a la ecuación de onda debe representar una onda viajera, es decir:

$$f(x,t) = A\cos\left((kx \pm \omega t)^2\right) \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}\ ;\ \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$= A\cos(k^2x^2 \pm 2k\omega x t + \omega^2 t^2)$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \omega^2;\ \alpha_2 = \pm 2k\omega;\ \alpha_3 = k^2$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_3} = \frac{\omega^2}{k^2} = c^2\ ;\ \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \pm\frac{1}{2}\frac{\omega}{k} = \pm\frac{c}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha_1 = \alpha_3 c^2}\ ;\ \boxed{\alpha_1 = \pm\frac{c}{2}\alpha_2}$$

D) Como $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \Rightarrow \vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$

De la ecuación de Faraday:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{A})$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\times\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0$$

Dado que $\vec{\nabla}\times\nabla V=0 \quad \forall\ V \Rightarrow$

$$\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}V \Rightarrow \quad \vec{E}=-\vec{\nabla}V-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

De la Ley de Ampere-Maxwell:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\vec{\nabla}V-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})-\vec{\nabla}^2 A = \vec{\nabla}\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}$$

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right) = \nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}$$

Si exigimos el calibre: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}$

$\Rightarrow$ obtenemos ecuación de onda para $\vec{A}$:

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=0$$

De la Ley de Gauss:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0 = \vec{\nabla}\cdot\left(-\vec{\nabla}V-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0$$

$$\nabla^2 V+\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) = 0 = \nabla^2 V+\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow \nabla^2 V-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=0 \rightarrow \text{ecuación de onda para } V.$$

Universidad de los Andes

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2015 - 2
Mecánica estadística

No se permite el uso de ningún documento, libro o apuntes, ni el uso de ningún dispositivo electrónico tales como celulares, reproductores de música, computadores, tabletas, etc.

Duración total del exámen : 3 horas

PROBLEMA 1. DISTRIBUCIÓN CANÓNICA DEL HELIO.

La diferencia de energía entre el estado base y el primer estado excitado de un átomo de helio es 20 eV. El estado fundamental corresponde a $^1S_0$ y el primer estado excitado corresponde a $^3S_1$.

a.) (3 puntos) En un gas en equilibrio térmico la ocupación de un nivel de energía ϵ_α es proporcional a $g_\alpha e^{-\beta\epsilon_\alpha}$, con g_α representa el degeneramiento del nivel. ¿Cuál es el degeneramiento del primer estado excitado del átomo de helio?
b.) (10 puntos) En un sistema de átomos de helio a 6000K: ¿Qué fracción de los átomos se encontrará en el primer estado excitado?[1] .
c.) (2 puntos) Dé su interpretación física a este resultado.

[1] $\frac{1eV}{k_B} = 1{,}16 \times 10^4 K$, donde k_B es la constante de Boltzman

Solución:

a) El nivel p tiene degeneramiento: 3 (p_x, p_y, p_z)

b) La fracción de átomos que se encuentra en el primer estado excitado es:

$$\frac{P(^3S_1)}{P(^1S_0)} = 3e^{-\beta\varepsilon_1}$$

que lleva a: $$P(^3S_1) = \frac{3e^{-\beta\varepsilon_1}}{1+3e^{-\beta\varepsilon_1}}$$

$$\frac{\varepsilon_1}{k_B T} = \frac{20 \times 1.16 \times 10^4 \, k}{6 \times 10^3 \, k} = 38.6$$

$$P(^3S_1) \simeq 1.3 \times 10^{-17}$$

c) El estado excitado está practicamente vacío, lo que no es sorprendente ya que $20\,eV = 2.4 \times 10^5\,k$. Es decir a 6000k el sistema aún está congelado

Universidad de los Andes

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2015 - 2
Mecánica estadística

PROBLEMA 2. RESISTIVIDAD DE UN METAL.

El objetivo de este problema es deducir la dependencia de la resistividad de un metal con el desplazamiento de los átomos. Para esto tenga en cuenta las siguientes indicaciones:

- La resisitividad de un metal a temperatura ambiente es proporcional a la probabilidad de que un electrón se disperse por vibraciones de una red cristalina. Esta probabilidad es a su vez proporcional al cuadrado del desplazamiento medio de los átomos.
- Se supone que cada átomo de masa m que se desplaza de su posición de equilibrio es sometido a una fuerza de atracción central proporcional al desplazamiento del átomo. En este caso las interacciones entre los átomos se consideran despreciables.

a.) (5 puntos) Haga el cálculo de la resistividad considerando las vibraciones de la red cristalina como osciladores clásicos.
b.) (10 puntos) Haga el cálculo de la resistividad considerando las vibraciones de la red cristalina como osciladores cuánticos.
c.) (5 puntos) Del cálculo cuántico deduzca los valores de temperatura donde la resistividad se reduce al caso clásico y los valores de temperatura donde los efectos cuánticos son dominantes.
d.) (5 puntos) Discuta las diferencias entre el modelo clásico y cuántico de la resistividad.

Solución

a) Para hacer el cálculo clásico. se iguala la energía cinética de oscilador con la ley de equipartición de la energía.

$$\frac{m\omega^2}{2}\langle \vec{x}^2\rangle = \frac{3}{2}k_B T$$

$$\langle \vec{x}^2\rangle = \frac{3k_B}{m\omega^2}T$$

la resistividad de un metal depende linealmente con la temperatura. 4

$$\rightarrow \rho_c = \alpha T \quad \text{con} \quad \alpha = \text{cte}$$

$$\boxed{\rho_c = \frac{\alpha \langle \vec{x}^2 \rangle m\omega^2}{3 k_B}}$$

b. Cálculo cuántico.

la función de partición es: $Z = z^3$ (3 dimensiones)

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(n+1/2)\hbar\omega} = \frac{1}{2\,\text{senh}\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)}$$

En una dimensión

$$\frac{m\omega^2}{2}\langle \vec{x}^2 \rangle = \frac{1}{2} U = -\frac{1}{2}\frac{\partial \ln z}{\partial \beta}$$

En tres dimensiones.

$$\frac{m\omega^2}{2}\langle \vec{x}^2 \rangle = -\frac{3}{2}\frac{\partial \ln z}{\partial \beta}$$

$$\frac{\partial \ln z}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} \ln\left(\frac{1}{2\,\text{senh}\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)}\right)$$

$$= \frac{-\cancel{2\,\text{senh}\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)}\,\cancel{2}\cosh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)\left(\frac{\hbar\omega}{\cancel{2}}\right)}{\cancel{2}\,\text{senh}^{\cancel{2}}\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)}$$

$$= -\hbar\omega \coth\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)$$

$$\frac{m\omega^{\cancel{2}}}{\cancel{2}}\langle \vec{x}^2\rangle = \frac{3}{\cancel{2}}\hbar\cancel{\omega}\coth\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)$$

$$\boxed{\langle \vec{x}^2\rangle = \frac{3\hbar}{m\omega}\coth\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)}$$

c)

Para $k_BT \gg \hbar\omega$

$$\langle \vec{x}^2\rangle \approx \frac{3\cancel{\hbar}}{m\omega}\frac{2}{\beta\cancel{\hbar}\omega}$$

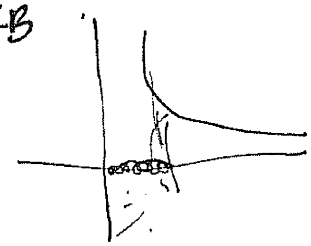
$$\langle \vec{x}^2\rangle \approx \frac{6k_BT}{m\omega^2}$$

→ Se vuelve al caso clásico: dependencia lineal con la Temperatura

Para $k_BT \ll \hbar\omega$

$$\rho_Q = \alpha\langle \vec{x}^2\rangle\frac{m\omega^2}{3k_B}$$

$$= \alpha\frac{\cancel{3}}{2}\frac{\hbar}{\cancel{m\omega}}\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\right)\frac{\cancel{m}\omega^{\cancel{2}}}{\cancel{3}k_B}$$



$$\boxed{\rho_Q = \frac{\alpha\hbar\omega}{2k_B}\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\right)}$$

d) El modelo clásico predice una dependencia lineal con la temperatura. El modelo cuántico introduce una corrección a la resistividad que diverge a bajas temperaturas.

Universidad de los Andes

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2015 - 2
Mecánica estadística

PROBLEMA 3. CORRECCIONES CUÁNTICAS A LA ECUACIÓN DE ESTADO

Considere fermiones o bosones, de espin S, no interactuantes en equilibrio termodinámico y libres en un cierto volumen Ω. Suponga que la temperatura y la densidad son tales que el cociente entre las capacidades caloríficas a presión y volumen constantes, γ, es:

$$\gamma = \left(\frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}\right)^3 \frac{< N >}{\Omega},$$

donde h es la constante de Planck y k_B es la constante de Boltzman. En este caso, el cociente entre la longitud de onda de *de Broglie* y el volumen de las partículas es pequeño. Queremos calcular correcciones cuánticas de orden ξ (con $\xi = e^{\alpha}$ y $\alpha = \frac{\mu}{k_B T}$ donde μ es el potencial químico) a la ecuación de estado de una gas perfecto clásico, para eso:

a.) (10 puntos) Calcule la función de equipartición
b.) (5 puntos) Halle el valor esperado del número de estados del sistema.
c.) (10 puntos) Calcule el límite de el valor esperado del número de estados del sistema a grandes volumenes.
d.) (5 puntos) Determine la ecuación de estado a primer orden en ξ.

Solución:

a) Para calcular la función de equipartición tenemos:

$$A = -P\Omega = -kT \ln Z$$

$$\ln Z = \pm \sum_q \ln\left(1 \pm e^{\alpha - \beta \varepsilon_q}\right) \quad \text{donde} \quad \alpha = \mu\beta, \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

Expandiendo el logaritmo.

$$\ln Z = \sum_q \left[e^{\alpha - \beta\varepsilon_q} \mp \frac{1}{2} e^{2\alpha - 2\beta\varepsilon_q} + O(e^{3\alpha}) \right]$$

$$\ln Z = e^{\alpha} \sum_q e^{-\beta\varepsilon_q} \mp \frac{1}{2} e^{2\alpha} \sum_q e^{-2\beta\varepsilon_q} + O(e^{3\alpha})$$

b. El valor esperado del número de estados del sistema (7)
es:

$$\langle N \rangle = \frac{\partial \ln Z}{\partial \alpha} = e^{\alpha} \sum_q e^{-\beta \varepsilon_q} \mp e^{2\alpha} \sum_q e^{-2\beta \varepsilon_q} + O(e^{3\alpha})$$

Definimos $\Sigma_1 = \sum_q e^{-\beta \varepsilon_q}$.

c. En el límite a grandes volumenes para partículas de espín S,

$$\sum_q e^{-\beta \varepsilon_q} = \frac{\Omega}{h^3} (2s+1) \int d^3p \, e^{-\frac{\beta p^2}{2m}}$$

$$= \frac{\Omega (2s+1)}{h^3} \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{3/2}$$

Si

$$\gamma = \left(\frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}} \right)^3 \frac{\langle N \rangle}{\Omega}$$

Entonces

$$\frac{\Omega}{h^3} = \frac{\langle N \rangle}{\gamma (2\pi m k_B T)^{3/2}}$$

Reemplazando

$$\Sigma_1 = \frac{\langle N \rangle (2s+1) \cancel{(2\pi m k_B T)^{3/2}}}{\gamma \cancel{(2\pi m k_B T)^{3/2}}}$$

$$\Sigma_1 = \frac{(2s+1) \langle N \rangle}{\gamma}$$

$$\Sigma_2 = \sum_q e^{-2\beta \varepsilon_q}$$

$$\Sigma_2 = \frac{\Omega}{h^3}(2s+1)\int d^3p\, e^{-\frac{\cancel{2}\beta p^2}{\cancel{2}m}} = \frac{\Sigma_1}{2^{3/2}}$$

d. la ecuación de estado se puede re-escribir como

$$\frac{P\Omega}{k_B T} = \ln Z = e^{\alpha}\Sigma_1\left(1 \mp \frac{1}{2}\frac{e^{\alpha}}{2^{3/2}} + O(e^{2\alpha})\right)$$

$$\langle N\rangle = e^{\alpha}\Sigma_1 \mp e^{2\alpha}\frac{\Sigma_1}{2^{3/2}} + O(e^{3\alpha})$$

$$\langle N\rangle = e^{\alpha}\Sigma_1\left(1 \mp \frac{e^{\alpha}}{2^{3/2}} + O(e^{2\alpha})\right)$$

$$\boxed{\frac{P\Omega}{k_B T\langle N\rangle} = 1 \pm \frac{1}{2}\frac{e^{\alpha}}{2^{3/2}} + O(e^{2\alpha})}$$

(9)

Universidad de los Andes

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2015 - 2
Mecánica estadística

PROBLEMA 4. TEORÍA DE CAMPO MEDIO PARA UN MATERIAL FERROMAGNÉTICO

Considere el hamiltoniano de Heissenberg de espín 1/2 para una red cúbica.

$$H = -\frac{J}{2}\sum_{<i,j>} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j + g\mu_B \sum_i \vec{B} \cdot \vec{S}_i,$$

donde, J es la constante de interacción entre espines y se asume mayor que cero, la suma $< i.j >$ indica que se realiza entre vecinos más cercanos, $\vec{B}$ es un campo magnético externo que se asumirá en dirección $\hat{z}$ y μ_B es el magnetón de Bohr. El factor 1/2 en el primer término se incluye de tal manera que cada par de espines se cuente solo una vez. Cada sitio i se asume que tiene un espín $\vec{S}_i$ de valor $S = 1/2$. El signo "+"del segundo término proviene del hecho que la carga del electrón es negativa, por lo tanto el momento magnético se opone a la dirección del espín.

a.) (5 puntos) Centre su atención en un espín particular $\vec{S}_i$ y escriba un hamiltoniano efectivo para el mismo, tratando las otras variables $\vec{S}_j$ con $j \neq i$ como valores esperados $< S_j >$ y no como operadores.

b.) (10 puntos) Los estados propios de $\vec{B}\cdot\vec{S}$ son $\pm B/2$ por lo que se tiene la función de partición:

$$Z = e^{-\beta\mu_B B/2} + e^{\beta\mu_B B/2}$$

con $\beta = 1/k_B T$. Calcule $< S_i >$ en términos de la temperatura y las variables fijas $< S_j >$ para obtener una ecuación de campo autoconsistente.

c.) (5 puntos) Determine la magnetización $M = |\vec{M}|$ en términos de $< \vec{S} >$ y la densidad de espines.

d.) (5 puntos) Encuentre la susceptibilidad magnética a alta temperatura

$$\chi = \frac{dM}{dH} = \mu_0 \frac{dM}{dB}$$

e.) (5 puntos) Para altas temperaturas encuentre la temperatura crítica a la cual χ diverge y explique el significado físico de la misma.

Solución

a. El hamiltoniano para el sitio i es:

$$H_i = \underbrace{\left(g\mu_B B - J\sum_j S_j\right)}_{\text{campo efectivo visto por el sitio } i} S_i$$

$$g\mu_B B_{ef} = g\mu_B B - J\cdot\sum_j S_j$$

tomando los valores esperados

$$g\mu_B \langle B_{ef}\rangle = g\mu_B B - J\sum_j \langle S_j\rangle$$

Entonces $\boxed{H_i = g\mu_B \langle B_{ef}\rangle S_i}$

b. Ahora escribimos la función de partición utilizando el campo efectivo.

$$Z_i = e^{\beta g\mu_B\langle B_{ef}\rangle/2} + e^{-\beta g\mu_B\langle B_{ef}\rangle/2}$$

la energía libre es $F = -k_B T \ln Z$

$$\langle S_i\rangle = \frac{1}{g\mu_B}\frac{\partial F}{\partial\langle B_{ef}\rangle}$$

$$\langle S_i\rangle = -\frac{1}{g\mu_B}\frac{1}{\beta}\frac{\frac{\beta g\mu_B}{2}\left(e^{\beta g\mu_B\langle B_{ef}\rangle/2} - e^{-\beta g\mu_B\langle B_{ef}\rangle/2}\right)}{e^{\beta g\mu_B\langle B_{ef}\rangle/2} + e^{-\beta g\mu_B\langle B_{ef}\rangle/2}}$$

$$\langle S_i\rangle = -\frac{1}{2}\tanh\left(\frac{g\mu_B\beta\langle B_{ef}\rangle}{2}\right)$$

El segundo paso de la teoría de campo medio es hacer $\langle S\rangle$ igual en todos los sitios de la red

$$\langle S\rangle = -\frac{1}{2}\tanh\left(\frac{\beta g\mu_B B - \beta J z\langle S\rangle}{2}\right),$$ con z el # de vecinos j del sitio i

c. El momento magnético por sitio es:

$$m = -g\mu_B \langle S \rangle$$

$$m = \frac{g\mu_B}{2} \tanh\left(\frac{\beta g \mu_B B - \beta J z \langle S \rangle}{2} \right)$$

d. Para calcular la susceptibilidad expandimos el tanh

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta (Jz \langle S \rangle - g\mu_B B)}{2} \right)$$

$$\langle S \rangle \left(1 - \frac{\beta}{4} Jz\right) = -\frac{\beta}{4} g \mu_B B$$

$$\langle S \rangle = \frac{-\frac{\beta}{4} g \mu_B B}{\left(1 - \frac{\beta}{4} Jz\right)}$$

$$\chi = \mu_0 \frac{\partial M}{\partial B} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial B} \frac{g^2 \mu_B^2 \frac{\beta}{4} B}{(1 - \beta/4 Jz)}$$

$$\boxed{\chi = \frac{\mu_0 g^2 \mu_B^2 \beta}{4(1 - \beta/4 Jz)}}$$

e. Para encontrar la temperatura critico. de la ecuación autoconsistente donde se pasa de $\langle S \rangle \neq 0$ a $\langle S \rangle = 0$ hacemos

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\beta J z}{2} \langle S \rangle \right) \quad \text{Para } B = 0.$$

$$\cancel{\langle S \rangle} = \frac{1}{4} \beta J z \cancel{\langle S \rangle} \quad \text{expandiendo el tanh.}$$

$\boxed{k_B T_c = Jz}$ $\longrightarrow$ Esta temperatura es la temp. de Curie

Universidad de los Andes

Doctorado en Ciencias - Física

Examen de Conocimientos - 2015 - 2

Mecánica estadística

FORMULAS GENERALES

1. Funciones de estado y relaciones de Maxwell

Energía interna:	U	$dU = TdS - pdV$
Entalpía:	$H = U + pV$	$dH = TdS + Vdp$
Energía libre:	$F = U - TS$	$dF = -SdT - pdV$
Entalpía libre de Gibbs :	$G = H - TS$	$dG = -SdT + Vdp$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V , \quad \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p , \quad \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T , \quad \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T$$

$$TdS = C_V dT + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV \text{ y } TdS = C_p dT - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dp$$

2. Para un gas ideal:

$$S_m = C_V \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + R\ln\left(\frac{V}{V_0}\right) + S_{m0} \text{ y } S_m = C_p \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - R\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) + S'_{m0}$$

3. Valores esperados en términos de la función de partición.

$$\begin{aligned} E &= -\frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta} , \quad p = kT\frac{\partial \ln(Z)}{\partial V} , \quad S = k\ln(Z) - k\beta\frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta} , \quad C_V = k\beta^2\frac{\partial^2 \ln(Z)}{\partial \beta^2} \\ F &= -kT\ln(Z) , \quad N = \frac{\partial \ln(Z)}{\partial \alpha} , \quad \mu_j = -kT\frac{\partial \ln(Z)}{\partial N_j} \end{aligned}$$

4. Funciones hiperbólicas que pueden ser de utilidad:

$$\begin{aligned} sinh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

Universidad de los Andes

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2015 - 2
Mecánica Cuántica

No se permite el uso de ningún documento, libro o apuntes, ni el uso de ningún dispositivo electrónico tales como celulares, reproductores de música, computadores, tabletas, etc.

Duración total del exámen : 3 horas

PROBLEMA 1. PARTÍCULAS IDÉNTICAS.

Considere un sistema de dos partículas idénticas. Una de ellas está en el estado individual $|\varphi\rangle$ y la otra en el estado individual $|\chi\rangle$. Asumimos que $|\varphi\rangle$ y $|\chi\rangle$ son orto-normales. Suponga que queremos medir, en cada una de las partículas, la cantidad física $\hat{B}$ que tiene asociados los estados propios $|u_n\rangle$ para una de las partículas y $|u_{n'}\rangle$ para la otra. Es decir que matemáticamente tenemos

$$\hat{B}|u_n\rangle = b_n|u_n\rangle \qquad y \qquad \hat{B}|u_{n'}\rangle = b_{n'}|u_{n'}\rangle, \tag{1}$$

donde b_n y $b_{n'}$ son los correspondientes valores propios y asumimos que el espectro de $\hat{B}$ es discreto y no degenerado.

a.) (5 puntos) Para el caso en que las dos partículas son bosones, calcule la probabilidad conjunta, $P^{bosones}(b_n, b_{n'})$, de medir el valor b_n para una de las partículas y $b_{n'}$ para la otra. Dé una interpretación física de este resultado.

b.) (5 puntos) Para el caso en que las dos partículas son fermiones, calcule la probabilidad conjunta, $P^{fermiones}(b_n, b_{n'})$, de medir el valor b_n para una de las partículas y $b_{n'}$ para la otra. Dé una interpretación física de este resultado y compare el resultado con el caso de bosones.

c.) (5 puntos) Para el caso en que las dos partículas son distinguibles, calcule la probabilidad conjunta, $P^{distinguibles}(b_n, b_{n'})$, de medir el valor b_n para una de las partículas y $b_{n'}$ para la otra. Dé una interpretación física de este resultado y compare el resultado con el caso de bosones. Para este caso, considere que el instrumento de medida es tal que aunque las dos partículas no son idénticas, el aparato no es capaz de distinguir entre ellas.

d.) (5 puntos) Si $|u_n\rangle$ y $|u_{n'}\rangle$ son iguales, calcule $P^{bosones}(b_n, b_{n'})$, $P^{fermiones}(b_n, b_{n'})$ y $P^{distinguibles}(b_n, b_{n'})$. Discuta la física detrás de cada uno de estos resultados.

Universidad de los Andes

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2015 - 2
Mecánica Cuántica

SOLUCIÓN PROBLEMA 1.

a.) (5 puntos) La probabilidad conjunta, $P^{bosones}(b_n, b_{n'})$, está dada por

$$P^{bosones}(b_n, b_{n'}) = |\langle\psi_{inicial-b}|\psi_{final-b}\rangle|^2,$$

donde

$$|\psi_{inicial-b}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi;\chi\rangle + |\chi;\varphi\rangle) \qquad y \qquad |\psi_{final-b}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_n;u_{n'}\rangle + |u_{n'};u_n\rangle).$$

En ambas ecuaciones el signo + es debido a que las particulas son bosones.

Con estos estados tenemos:

$$\begin{aligned}
P^{bosones}(b_n, b_{n'}) &= |\langle\psi_{inicial-b}|\psi_{final-b}\rangle|^2 \\
&= \frac{1}{4}|((\langle\varphi;\chi| + \langle\chi;\varphi|)(|u_n;u_{n'}\rangle + |u_{n'};u_n\rangle)|^2 \\
&= \frac{1}{4}|\langle\varphi;\chi|u_n;u_{n'}\rangle + \langle\varphi;\chi|u_{n'};u_n\rangle + \langle\chi;\varphi|u_n;u_{n'}\rangle + \langle\chi;\varphi|u_{n'};u_n\rangle|^2 \\
&= \frac{1}{4}|\langle\varphi|u_n\rangle\langle\chi|u_{n'}\rangle + \langle\varphi|u_{n'}\rangle\langle\chi|u_n\rangle + \langle\chi|u_n\rangle\langle\varphi|u_{n'}\rangle + \langle\chi|u_{n'}\rangle\langle\varphi|u_n\rangle|^2 \\
&= \frac{1}{4}|2\langle\varphi|u_n\rangle\langle\chi|u_{n'}\rangle + 2\langle\varphi|u_{n'}\rangle\langle\chi|u_n\rangle|^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$P^{bosones}(b_n, b_{n'}) = |\langle\varphi|u_n\rangle\langle\chi|u_{n'}\rangle + \langle\varphi|u_{n'}\rangle\langle\chi|u_n\rangle|^2.$$

Este resultado revela un efecto de interferencia que resulta por que hay dos alternativas indistinguibles de obtener como resultado b_n y $b_{n'}$.

b.) (5 puntos) La probabilidad conjunta, $P^{fermiones}(b_n, b_{n'})$, está dada por

$$P^{fermiones}(b_n, b_{n'}) = |\langle\psi_{inicial-f}|\psi_{final-f}\rangle|^2,$$

donde

$$|\psi_{inicial-f}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi;\chi\rangle - |\chi;\varphi\rangle) \qquad y \qquad |\psi_{final-f}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_n;u_{n'}\rangle - |u_{n'};u_n\rangle).$$

En ambas ecuaciones el signo $-$ es debido a que las particulas son fermiones.

Con estos estados tenemos:

$$\begin{aligned}
P^{fermiones}(b_n, b_{n'}) &= |\langle \psi_{inicial-f}|\psi_{final-f}\rangle|^2 \\
&= \frac{1}{4}|(\langle \varphi; \chi| - \langle \chi; \varphi|)(|u_n; u_{n'}\rangle - |u_{n'}; u_n\rangle)|^2 \\
&= \frac{1}{4}|\langle \varphi; \chi|u_n; u_{n'}\rangle - \langle \varphi; \chi|u_{n'}; u_n\rangle - \langle \chi; \varphi|u_n; u_{n'}\rangle + \langle \chi; \varphi|u_{n'}; u_n\rangle|^2 \\
&= \frac{1}{4}|\langle \varphi|u_n\rangle\langle \chi|u_{n'}\rangle - \langle \varphi|u_{n'}\rangle\langle \chi|u_n\rangle - \langle \chi|u_n\rangle\langle \varphi|u_{n'}\rangle + \langle \chi|u_{n'}\rangle\langle \varphi|u_n\rangle|^2 \\
&= \frac{1}{4}|2\langle \varphi|u_n\rangle\langle \chi|u_{n'}\rangle - 2\langle \varphi|u_{n'}\rangle\langle \chi|u_n\rangle|^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$P^{fermiones}(b_n, b_{n'}) = |\langle \varphi|u_n\rangle\langle \chi|u_{n'}\rangle - \langle \varphi|u_{n'}\rangle\langle \chi|u_n\rangle|^2.$$

De nuevo, este resultado revela un efecto de interferencia que resulta por que hay dos alternativas indistinguibles de obtener como resultado b_n y $b_{n'}$.

c.) (5 puntos) La probabilidad conjunta, $P^{distinguibles}(b_n, b_{n'})$, está dada por

$$P^{distinguibles}(b_n, b_{n'}) = |\langle \psi_{inicial-f}|\psi_{final-f}\rangle|^2,$$

donde

$$|\psi_{inicial-d}\rangle = |\varphi; \chi\rangle.$$

Sin embargo, a diferencia del caso de bosones, se tienen dos estados finales,

$$|\psi_{final-d-1}\rangle = |u_n; u_{n'}\rangle \qquad y \qquad |\psi_{final-d-2}\rangle = |u_{n'}; u_n\rangle.$$

Por lo tanto tenemos:

$$\begin{aligned}
P^{distinguibles}(b_n, b_{n'}) &= |\langle \psi_{inicial-d}|\psi_{final-d-1}\rangle|^2 + |\langle \psi_{inicial-d}|\psi_{final-d-2}\rangle|^2 \\
&= |\langle \varphi; \chi|u_n; u_{n'}\rangle|^2 + |\langle \varphi; \chi|u_{n'}; u_n\rangle|^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$P^{distinguibles}(b_n, b_{n'}) = |\langle \varphi|u_n\rangle\langle \chi|u_{n'}\rangle|^2 + |\langle \varphi|u_{n'}\rangle\langle \chi|u_n\rangle|^2.$$

Este resultado revela que NO hay un efecto de interferencia.

d.) (5 puntos)

(bosones)

si $|u_n\rangle = |u_{n'}\rangle$ entonces $|\psi_{final-b}\rangle = |u_n; u_n\rangle$.

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} P^{bosones}(b_n, b_{n'}) &= |\langle\psi_{inicial-b}|\psi_{final-b}\rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2}|(\langle\varphi;\chi| + \langle\chi;\varphi|)|u_n;u_n\rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2}|\langle\varphi;\chi|u_n;u_n\rangle + \langle\chi;\varphi|u_n;u_n\rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2}|\langle\varphi|u_n\rangle\langle\chi|u_n\rangle + \langle\chi|u_n\rangle\langle\varphi|u_n\rangle|^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$P^{bosones}(b_n, b_{n'}) = 2|\langle\varphi|u_n\rangle\langle\chi|u_n\rangle|^2.$$

(fermiones) si $|u_n\rangle = |u_{n'}\rangle$ entonces $|\psi_{final-f}\rangle = 0$.

Por lo tanto,

$$P^{fermiones}(b_n, b_{n'}) = 0.$$

Este resultado es de esperarse ya que implica el principio de exclusion de Pauli.

(distinguibles)

La unica opcion para el estado final es $|u_n\rangle = |u_{n'}\rangle$. Por lo tanto,

$$P^{distinguibles}(b_n, b_{n'}) = |\langle\varphi|u_n\rangle\langle\chi|u_n\rangle|^2.$$

Al comparar estos resultados se ve que la expresion para los bosones es mayor que para el caso de particulas indistinguibles. Esto se conoce puede interpretar diciendo que existe una fuerza de interaccion entre los bosones que los hace querer estar en el mismo estado y por lo tanto permite la existencia de condendsados de Bose-Einstein.

Universidad de los Andes

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2015 - 2
Mecánica Cuántica

PROBLEMA 2. PARTÍCULA BAJO LA INFLUENCIA DE UN POTENCIAL DELTA

Considere una partícula de masa m cuyo Hamiltoniano, $\hat{H}$, está dado por

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} - \alpha\delta(x), \tag{2}$$

donde α es una constante positiva, $\hbar$ es la constante de Planck dividida por 2π y $\delta(x)$ denota la función delta.

a.) (5 puntos) Si las funciones propias de $\hat{H}$ se denotan por $\varphi(x)$, demuestre que la derivada de estas funciones presenta una discontinuidad en $x = 0$ y demuestre que el valor de esa discontinuidad es $-\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\varphi(0)$.
Sugerencia : integre la ecuación de valores propios de $\hat{H}$ entre $-\varepsilon$ y $+\varepsilon$ y luego aproxime ε a cero.

b.) (5 puntos) Demuestre que, cuando la energía $E < 0$ (estado ligado),

$$\varphi(x) = A_1 e^{\rho x} \qquad para\ x < 0 \tag{3}$$
$$\varphi(x) = A_2 e^{-\rho x}, \qquad para\ x > 0 \tag{4}$$

donde $\rho = \sqrt{-\frac{2mE}{\hbar^2}}$ y A_1 y A_2 son constantes.

c.) (5 puntos) Calcule el valor de la energía del estado ligado en función de α, m y $\hbar$.

d.) (5 puntos) La función de onda para el estado ligado, $\varphi(x)$, puede escribirse como

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{m\alpha}{\hbar^2}} e^{-\frac{m\alpha}{\hbar^2}|x|}. \tag{5}$$

Dibuje la densidad de probabilidad asociada a esta función de onda y calcule su ancho, Δx, que es correspondiente al FWHM (Full width at half maximum).

Universidad de los Andes

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2015 - 2
Mecánica Cuántica

SOLUCIÓN PROBLEMA 2.

a.) (5 puntos)

De la ecuación de Schrödinger, $\hat{H}\varphi(x) = E\varphi(x)$, tenemos :

$$\begin{aligned}
\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} - \alpha\delta(x)\right)\varphi(x)dx &= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} E\varphi(x)dx \\
-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d}{dx}|_{-\epsilon}^{\epsilon} - \alpha\varphi(0) &= E\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\varphi(x)dx \\
-\frac{\hbar^2}{2m}\lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}|_{\epsilon} - \frac{d\varphi(x)}{dx}|_{-\epsilon}\right) &= \lim_{\epsilon\to 0}\alpha\varphi(0) + E\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\varphi(x)dx \\
-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\varphi'(0^+) - \varphi'(0^-)\right) &= \alpha\varphi(0).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\varphi'(0^+) - \varphi'(0^-) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\varphi(0).$$

Al ser esta resta diferente de 0 entonces la derivada de la función propia, $\varphi(x)$, es discontinua en $x = 0$ y el valor de la discontinuidad es $-\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\varphi(0)$.

b.) (5 puntos)

Considere $\varphi(x)$ para $x < 0$, en este caso como el potencial $V(x) = -\alpha\delta(x)$ tenemos que $V(x) = 0$. Por lo tanto, la ecuación de Schrödinger $\hat{H}\varphi_1(x) = E\varphi_1(x)$ se puede escribir como:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\varphi_1(x) = E\varphi_1(x).$$

Reescribiendo la ecuación de Schrödinger, se tiene

$$\frac{d^2}{dx^2}\varphi_1(x) = \rho^2\varphi_1(x),$$

con $\rho^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2}$.

Como $E < 0$, ϱ es real y por lo tanto,

$$\varphi_1(x) = A_1 e^{\rho x} + A_1^{'} e^{-\rho x} \quad \text{para} \quad x < 0.$$

Sin embargo, como esta función debe ser de cuadrado integrable, $A_1^{'} = 0$ y por lo tanto se demuestra que

$$\varphi_1(x) = A_1 e^{\rho x} \quad \text{para} \quad x < 0.$$

Para el caso $x > 0$, tambien se tiene que $V(x) = 0$ y por lo tanto vale

$$\frac{d^2}{dx^2}\varphi_2(x) = \rho^2\varphi_2(x),$$

con $\rho^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2}$.

Por lo tanto

$$\varphi_2(x) = A_2 e^{\rho x} + A_2^{'} e^{-\rho x} \quad \text{para} \quad x > 0.$$

Como esta función debe ser de cuadrado integrable, $A_2 = 0$ y entonces

$$\varphi_2(x) = A_2^{'} e^{-\rho x} \quad \text{para} \quad x > 0.$$

c.) (5 puntos) Para este calculo se tienen en cuenta la discontinuidad de la primera derivada en cero (parte a del ejercicio) y la continuidad de la funcion de onda en cero. De la discontinuidad de la derivada tenemos

$$\begin{aligned}
\varphi_2'(0) - \varphi_1'(0) &= -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\varphi(0) \\
-A_2^{'}\rho - A_1\rho &= -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\varphi(0).
\end{aligned}$$

De la continuidad de la función de onda tenemos $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi(0)$ y por lo tanto $A_1 = A_2' = \varphi(0)$. Con esto

$$\rho = \frac{m\alpha}{\hbar^2}.$$

Notando que de la parte b sabemos que $\rho^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2}$ al igualarlo a la ecuació anterior, se encuentra que los valores de la energía son

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}.$$

Al ser α una constante positiva, $E < 0$ como se requiere para un estado ligado.

d.) (5 puntos)

La densidad de probabilidad está dada por $|\psi(x)|^2$, por lo tanto

$$|\psi(x)|^2 = \frac{m\alpha}{\hbar^2} e^{-2\frac{m\alpha}{\hbar^2}|x|}.$$

Un ancho estimado de la función de onda puede encontrarse al considerar el FWHM de $\psi(x)$ de donde tenemos $\Delta x = \ln 2 \frac{\hbar^2}{m\alpha}$.

Universidad de los Andes

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2015 - 2
Mecánica Cuántica

PROBLEMA 3. MÉTODO VARIACIONAL.

En este ejercicio se calculará la energía del estado base del átomo de hidrógeno utilizando el método variacional y se comparará con el valor exacto, $E_0^{exacto} = -\frac{me^2}{2\hbar^2}$, donde m es la masa del electrón, e su carga eléctrica y $\hbar$ la constante de Planck dividida por 2π .
En el método variacional se escogen unas "funciones de prueba" que dependen de un cierto número de parámetros. En este ejercicio, consideraremos como "funciones de prueba" los estados

$$\varphi_\alpha(r) = C(1 - \frac{r}{\alpha}) \qquad para\ \ r \leq \alpha, \tag{6}$$

y

$$\varphi_\alpha(r) = 0 \qquad para\ \ r > \alpha. \tag{7}$$

En estas expresiones, C es una constante de normalización y α es el parámetro a optimizar usando el método variacional.

a.) (14 puntos) Demuestre que, en las "funciones de prueba", el valor medio del hamiltoniano del electrón,

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} - \frac{e^2}{r}, \tag{8}$$

puede escribirse como

$$\langle \hat{H} \rangle = \frac{5\hbar^2}{m\alpha^2} - \frac{5e^2}{2\alpha}. \tag{9}$$

b.) (8puntos) De acuerdo con el método variacional, existe un valor óptimo para α, llamado α_0, que se encuentra al minimizar $\langle \hat{H} \rangle$. Calcule el valor de α_0 para el electrón en el átomo de hidrógeno y demuestre que $\alpha_0 = 4a_0$ donde $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$ corresponde al radio de Bohr.

c.) (8 puntos) $\langle \hat{H} \rangle$ evaluado en α_0 constituye una aproximación a la energía del estado base del sistema en consideración. Sabiendo esto, calcule el valor de la energía obtenida por medio del método variacional, discutido en este ejercicio, y compárelo con E_0^{exacto}. Comente sobre el resultado obtenido.

Universidad de los Andes

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2015 - 2
Mecánica Cuántica

SOLUCIÓN PROBLEMA 3.

(a) $\langle V \rangle$

$$\langle V \rangle = \left\langle -\frac{e^2}{r} \right\rangle$$

$\varphi(r) = C\left(1 - \frac{r}{\alpha}\right) \quad r \leq \alpha$

$\varphi(r) = 0 \quad r > \alpha$

$$= 4\pi \int_0^{\alpha} C^*\left(1 - \frac{r}{\alpha}\right)\left(-\frac{e^2}{r}\right) C\left(1 - \frac{r}{\alpha}\right) r^2 dr$$

$$= -|C|^2 e^2 4\pi \int_0^{\alpha} \left(1 - \frac{r}{\alpha}\right)^2 r\, dr$$

$\boxed{+4}$

$$= -|C|^2 e^2 4\pi \int_0^{\alpha} \left(r + \frac{r^3}{\alpha^2} - \frac{2r^2}{\alpha}\right) dr$$

$$= -|C|^2 e^2 4\pi \left[\frac{2\alpha^2}{4} + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{2\alpha^2}{3}\right]$$

$$= -|C|^2 e^2 4\pi \left[\frac{\alpha^2}{12}\right] = \boxed{-|C|^2 e^2 \frac{\pi\alpha^2}{3} = \langle V \rangle}$$

$\langle K \rangle$

$$\langle K \rangle = \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\int_0^{\infty} \varphi^* \nabla^2 \varphi \, r^2 4\pi dr$$

$u = \varphi^* \quad dv = \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)$

$du = \frac{\partial \varphi^*}{\partial r} dr \quad v = r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} 4\pi \int_0^{\infty} \varphi^* \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) r^2 dr$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} 4\pi \left[\varphi^* r^2 \frac{\partial}{\partial r}\varphi \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{\partial \varphi^*}{\partial r} dr\right]$$

$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0$ for $r > \alpha$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} 4\pi \left[-\int_0^{\alpha} r^2 \left(-\frac{C}{\alpha}\right)^2 dr\right] = \frac{\hbar^2}{2m} 4\pi \frac{C^2}{\alpha^2}\int_0^{\alpha} r^2 dr = \frac{\hbar^2}{m} 2\pi |C|^2 \frac{\alpha}{3}$$

$$\boxed{\langle K \rangle = \frac{\hbar^2}{m} 2\pi |C|^2 \frac{\alpha}{3}}$$

$\boxed{+4}$

$$1 = \int_0^{\alpha} |C|^2 \left(1 - \frac{r}{\alpha}\right)^2 r^2 \, 4\pi \, dr$$

$$1 = |C|^2 \int_0^{\alpha} \left(r^2 + \frac{r^4}{\alpha^2} - \frac{2r^3}{\alpha}\right) 4\pi \, dr$$

$$1 = C^2 4\pi \left\{ \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^3}{5} - \frac{\alpha^3}{2} \right\} = |C|^2 4\pi \left[\frac{10\alpha^3 + 6\alpha^3 - 15\alpha^3}{30} \right] = \frac{|C|^2 2\pi \alpha^3}{15}$$

$$\boxed{C = \left(\frac{15}{2\pi\alpha^3}\right)^{1/2}}$$

$\boxed{+4}$

$$\langle H \rangle = \langle K \rangle + \langle V \rangle$$

$\boxed{+2}$

$$= \frac{\hbar^2 2}{m} \frac{\pi\alpha}{3} \frac{15}{2\pi\alpha^3} - \frac{e^2 \pi \alpha^2}{3} \frac{15}{2\pi\alpha^3} = \boxed{\frac{\hbar^2 5}{m\alpha^2} - \frac{e^2 5}{2\alpha} = \langle H \rangle}$$

(b) $$\frac{\partial \langle H \rangle}{\partial \alpha} = 0 = -2\alpha^{-3} \frac{\hbar^2 2}{m} + \alpha^{-2} e^2$$

$\boxed{+4}$

$$\frac{4\hbar^2}{m} \frac{1}{\alpha^3} = \frac{e^2}{\alpha^2} \qquad \boxed{\frac{4\hbar^2}{m} \cdot \frac{1}{e^2} = \alpha_0} \quad \boxed{+2} \qquad a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha_0 = 4a_0} \quad \boxed{+2}$$

(c) $$\langle H \rangle = \frac{5}{\alpha} \left[\frac{\hbar^2}{m} \cdot \frac{1}{\alpha} - \frac{e^2}{2} \right]$$

$$= \frac{5me^2}{4\hbar^2} \left[\frac{\hbar^2}{m} \frac{me^2}{4\hbar^2} - \frac{2e^2}{4} \right]$$

$$= \frac{5}{4} \frac{me^2}{\hbar^2} \left[-\frac{e^2}{4} \right] \qquad \boxed{E_{var} = -\frac{5}{16} \frac{me^4}{\hbar^2}} \quad \boxed{+4}$$

$$E_0^{exacto} = -\frac{me^4}{2\hbar^2} \Rightarrow \boxed{E_{variat} = \frac{5}{8} E_0^{exacto}}$$

It makes sense because $E_{var} > E_0^{exacto}$

comparo $\boxed{+2}$

comento $\boxed{+2}$

Universidad de los Andes

Doctorado en Ciencias - Física

Examen de Conocimientos - 2015 - 2

Mecánica Cuántica

PROBLEMA 4. MOMENTO ANGULAR PARA UN SISTEMA DE DOS PARTÍCULAS

Considere un sistema de dos electrónes. La energía del sistema depende de la orientación relativa de los dos espines, produciendo un termino de energía potencial en el hamiltoniano representado por

$$\frac{J}{\hbar}\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2, \tag{10}$$

donde $\hat{S}_1$ y $\hat{S}_2$ son los operadores de espín para cada partícula, J es una constante y $\hbar$ es la constante de Planck dividida por 2π.

a.) (8 puntos) Haciendo explícitamente el procedimiento para la adición de momento angular, calcule el estado sínglete ($|0,0\rangle$) y los estados tríplete ($|1,-1\rangle$, $|1,0\rangle$, $|1,1\rangle$) que se asocian a la base de espín total (base acoplada) en función de la base desacoplada de spines individuales.

b.) (8 puntos) Demuestre que un operador de la forma dada en ecuación (10) distingue entre el estado sínglete ($|0,0\rangle$) y los estados triplete ($|1,-1\rangle$, $|1,0\rangle$, $|1,1\rangle$) que se asocian a la base de espín total (base acoplada).

c.) (8 puntos) Si el sistema se pone en contacto con un campo magnético de magnitud B en la dirección z, la energía de interacción entre los electrones y el campo se puede escribir como

$$\frac{\mu_B}{\hbar}B(g_1\hat{S}_{1z} + g_2\hat{S}_{2z}), \tag{11}$$

donde μ_B es el magnetón de Bohr, y $g_1 \neq g_2$ indican los correspondientes factores de Landè. Considerando los dos términos de interacción anteriores, escriba la representación matricial de $\hat{H}$ en la base de espín total de las dos partículas (base acoplada).

d.) (6 puntos) Demuestre que cuando $\hbar J >> \mu_B B$ es conveniente trabajar en la base de espín total (base acoplada) de las dos partículas.

Universidad de los Andes

Doctorado en Ciencias - Física

Examen de Conocimientos - 2015 - 2

Mecánica Cuántica

SOLUCIÓN PROBLEMA 4

a.) (8 puntos) Dos electrones, únicamente espín. El espín total ira desde $|S_1 + S_2|$ hasta $|S_1 - S_2|$. Es decir desde 1 hasta 0. Tenemos entonces, tripletes $|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle$ y el sínglete $|0,0\rangle$.

La base desacoplada la escribimos como:

$$\left|\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right\rangle, \quad \left|\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right\rangle, \quad \left|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right\rangle, \quad \left|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right\rangle$$

Aplicando las reglas de adición de momento angular tenemos garantizado dos de los estados tríplete: $|1,-1\rangle = |1/2,-1/2;1/2,-1/2\rangle$ y $|1,1\rangle = |1/2,1/2;1/2,1/2\rangle$

Para encontrar el otro estado tríplete, aplicamos $\hat{J}_-$ a $|1,1\rangle$ y a $|1/2,1/2;1/2,1/2\rangle$. Igualando los dos resultados tenemos
$|1,0\rangle = 1/\sqrt{2}(|1/2,-1/2;1/2,1/2\rangle + |1/2,1/2;1/2,-1/2\rangle)$.

El estado sínglete $|0,0\rangle$ se obtiene por ortogonalidad con $|1,0\rangle$ obteniendo

$|0,0\rangle = 1/\sqrt{2}(|1/2,-1/2;1/2,1/2\rangle - |1/2,1/2;1/2,-1/2\rangle)$

b.) (8 puntos) Note que

$$\frac{J}{\hbar}\hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}}_2 = \frac{J}{2\hbar}\left(\hat{\mathbf{S}}^2 - \hat{\mathbf{s}}_1^2 - \hat{\mathbf{s}}_2^2\right)$$

Por sencillez, llamamos a la base desacoplada como

$$\left|\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle, \quad \left|\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right\rangle = |\uparrow\downarrow\rangle, \quad \left|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right\rangle = |\downarrow\uparrow\rangle, \quad \left|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle$$

La base acoplada en la que se escriben los estados singlete y triplete queda entonces:

Singlete:

$$|0,0\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left[|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right]$$

Tripletes:

$$|1,1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle \ ; \quad |1,0\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left[|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right] \ ; \quad |1,-1\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle$$

Aplicando el operador a cada uno de estos estados tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{J}{\hbar}\hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}}_2 \,|0,0\rangle &= \frac{J}{2\hbar}\left(\hat{\mathbf{S}}^2 - \hat{\mathbf{s}}_1^2 - \hat{\mathbf{s}}_2^2\right)|0,0\rangle \\
&= \frac{J}{2\hbar}\left[\hat{\mathbf{S}}^2\,|0,0\rangle - \hat{\mathbf{s}}_1^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right]\right) - \hat{\mathbf{s}}_2^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right]\right)\right] \\
&= \frac{J}{2\hbar}\left[0\cdot|0,0\rangle - \frac{3}{4}\hbar^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right]\right) - \frac{3}{4}\hbar^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right]\right)\right] \\
&= -\frac{2J}{2\hbar}\left[\frac{3}{4}\hbar^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right]\right)\right] \\
&= -\frac{3}{4}J\hbar\,|0,0\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{J}{\hbar}\hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}}_2 \,|1,1\rangle &= \frac{J}{2\hbar}\left(\hat{\mathbf{S}}^2 - \hat{\mathbf{s}}_1^2 - \hat{\mathbf{s}}_2^2\right)|1,1\rangle \\
&= \frac{J}{2\hbar}\left[\hat{\mathbf{S}}^2\,|1,1\rangle - \hat{\mathbf{s}}_1^2\,|\uparrow\uparrow\rangle - \hat{\mathbf{s}}_2^2\,|\uparrow\uparrow\rangle\right] \\
&= \frac{J}{2\hbar}\left[2\hbar^2\,|1,1\rangle - \frac{3}{4}\hbar^2\,|\uparrow\uparrow\rangle - \frac{3}{4}\hbar^2\,|\uparrow\uparrow\rangle\right] \\
&= \frac{J}{2\hbar}\hbar^2\left[2 - \frac{3}{2}\right]|1,1\rangle \\
&= \frac{J}{2}\hbar\left[\frac{1}{2}\right]|1,1\rangle \\
&= \frac{J}{4}\hbar\,|1,1\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{J}{\hbar}\hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}}_2 \,|1,-1\rangle &= \frac{J}{2\hbar}\left(\hat{\mathbf{S}}^2 - \hat{\mathbf{s}}_1^2 - \hat{\mathbf{s}}_2^2\right)|1,-1\rangle \\
&= \frac{J}{2\hbar}\left[\hat{\mathbf{S}}^2\,|1,-1\rangle - \hat{\mathbf{s}}_1^2\,|\downarrow\downarrow\rangle - \hat{\mathbf{s}}_2^2\,|\downarrow\downarrow\rangle\right] \\
&= \frac{J}{2\hbar}\left[2\hbar^2\,|1,-1\rangle - \frac{3}{4}\hbar^2\,|\downarrow\downarrow\rangle - \frac{3}{4}\hbar^2\,|\downarrow\downarrow\rangle\right] \\
&= \frac{J}{2\hbar}\hbar^2\left[2 - \frac{3}{2}\right]|1,-1\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{J}{2}\hbar\left[\frac{1}{2}\right]|1,-1\rangle \\
&= \frac{J}{4}\hbar\,|1,-1\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{J}{\hbar}\hat{\mathbf{s}}_1\cdot\hat{\mathbf{s}}_2\,|1,0\rangle &= \frac{J}{2\hbar}\left(\hat{\mathbf{S}}^2-\hat{\mathbf{s}}_1^2-\hat{\mathbf{s}}_2^2\right)|1,0\rangle \\
&= \frac{J}{2\hbar}\left[\hat{\mathbf{S}}^2\,|1,0\rangle-\hat{\mathbf{s}}_1^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\uparrow\downarrow\rangle-|\downarrow\uparrow\rangle\right]\right)-\hat{\mathbf{s}}_2^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\uparrow\downarrow\rangle-|\downarrow\uparrow\rangle\right]\right)\right] \\
&= \frac{J}{2\hbar}\left[2\hbar^2\,|1,0\rangle-\frac{3}{4}\hbar^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\uparrow\downarrow\rangle-|\downarrow\uparrow\rangle\right]\right)-\frac{3}{4}\hbar^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\uparrow\downarrow\rangle-|\downarrow\uparrow\rangle\right]\right)\right] \\
&= -\frac{2J}{2\hbar}\left[2\hbar^2\,|1,0\rangle-\frac{3}{2}\hbar^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\uparrow\downarrow\rangle-|\downarrow\uparrow\rangle\right]\right)\right] \\
&= \frac{J}{\hbar}\left[2-\frac{3}{2}\right]|1,0\rangle \\
&= \frac{J}{4}\hbar\,|1,0\rangle
\end{aligned}
$$

Como podemos ver que al aplicar el operador $\frac{J}{\hbar}\hat{\mathbf{s}}_1\cdot\hat{\mathbf{s}}_2$ obtenemos valores propios distintos, este operador distingue entre los estados sínglete y tríplete.

c.) (8 puntos) Note que el Hamiltoniano en este caso es:

$$
\hat{H} = \frac{J}{\hbar}\hat{\mathbf{s}}_1\cdot\hat{\mathbf{s}}_2+\frac{\mu_B B}{\hbar}\left(g_1\hat{S}_{1,z}+g_2\hat{S}_{2,z}\right)
$$

Escribiremos H en la base $\{|0,0\rangle\,,|1,1\rangle\,,|1,0\rangle\,,|1,-1\rangle\}$.

Obteniendo los elementos matriciales se obtiene:

$$
\begin{aligned}
\hat{H} &= \frac{J}{\hbar}\hat{\mathbf{s}}_1\cdot\hat{\mathbf{s}}_2+\frac{\mu_B B}{\hbar}\left(g_1\hat{S}_{1,z}+g_2\hat{S}_{2,z}\right) \\
&= J\hbar\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}+\mu_B B\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{g_1-g_2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{g_1+g_2}{2} & 0 & 0 \\ \frac{g_1-g_2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{g_1+g_2}{2}\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{3}{4}J\hbar & 0 & \mu_B B\cdot\frac{g_1-g_2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}J\hbar+\mu_B B\cdot\frac{g_1+g_2}{2} & 0 & 0 \\ \mu_B B\cdot\frac{g_1-g_2}{2} & 0 & \frac{1}{4}J\hbar & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}J\hbar-\mu_B B\cdot\frac{g_1+g_2}{2}\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

d.) (6 puntos) Cuando $\hbar J \gg \mu_B B$,

$$H \approx J\hbar \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Como esta matriz es diagonal, vemos que cuando $\hbar J \gg \mu_B B$ es más conveniente trabajar con los vectores en la base acoplada.