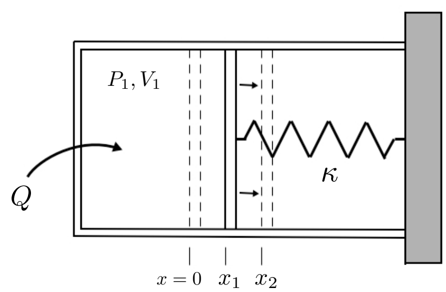
Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos 2016-2
Termodinámica y Mecánica Estadística

No se permite el uso de libros, apuntes, o dispositivos electrónicos.

Duración total del exámen : 3 horas

---

1. (20 puntos) Un gas ideal monoatómico esta confinado en un cilindro con área transversal A, por medio de un pistón conectado a un resorte con constante κ (como se muestra en la figura). Cuando el resorte está relajado (la misma presión en ambas caras del pistón) la posición del resorte es $x = 0$, que corresponde a un volumen interno V_0. Cuando el gas tiene una presión P_1 el pistón se desplaza hasta x_1 (correspondiente a un volumen interno V_1). Adicionamos calor lentamente de tal forma que el pistón se desplace hasta la posición x_2 (correspondiente a un volumen interno V_2 y una presión P_2). Encuentre la cantidad de calor Q que se agregó al gas en el proceso de ir desde (V_1, P_1) hasta (V_2, P_2).



---

2. (20 puntos) Un gas ideal esta contenido en un recipiente de volumen V a una presión P. Calcule dN/dt, la tasa a la cual escapan las moléculas por un agujero muy pequeño de área A.

Suponga una distribución de velocidades de Maxwell:

$$f(\mathbf{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \; d^3\mathbf{v} \, .$$

Ayuda:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \;\; ; \qquad \int_{0}^{\infty} x \, e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}$$

---

3. **(30 puntos)** Considere un sistema de N dipolos magnéticos localizados que no interactúan entre sí. Cada dipolo tiene un momento dipolar magnético μ. Cuando el sistema se encuentra a una temperatura T se aplica un campo magnético uniforme $\mathbf{H} = \mathrm{H}\hat{\mathbf{z}}$.

a) **(10 puntos)** Construya la función de partición Z_N para el sistema.

b) **(10 puntos)** Escriba Z_N en términos de Z_1 y calcule Z_1 en forma explicita como una función de $\beta = 1/kT$, $\mathbf{H}$ y μ.

c) **(10 puntos)** El momento magnético del sistema, $\mathbf{M} = \mathrm{M}_z\hat{\mathbf{z}}$, esta dado por:

$$\mathrm{M}_z = N \langle \mu \cos\theta \rangle ;$$

escriba M_z en términos de Z_1 y calcúlelo en forma explicita como una función de $\beta = 1/kT$, $\mathbf{H}$ y μ, suponiendo un modelo clásico. (10 puntos)

---

4. **(30 puntos)** Dada la distribución de número de ocupación para fermiones y bosones:

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/kT} \pm 1} , \qquad + : \text{fermiones}, \qquad - : \text{bosones},$$

y la densidad de partículas n (el número de partículas por unidad de volumen):

$$n = \frac{g}{h^3} \int d^3\mathbf{p}\ f(p) , \qquad g : \text{número de grados de libertad internos.}$$

Considere los casos de un gas de fotones y de un gas de electrones extremadamente relativista, ambos a temperatura T (asuma $\mu = 0$).

a) **(20 puntos)** Calcule la densidad de partículas n_γ para el gas de fotones.

b) **(10 puntos)** Demuestre que si n_e es la densidad de partículas para el gas de electrones, entonces $n_e = \frac{3}{4}\, n_\gamma$.

(Ayuda: busque una relación algebraica entre los integrandos fermiónico y bosónico)

✸ Ayuda:

$$\int_0^\infty \frac{\xi^n\, d\xi}{e^\xi - 1} = \zeta(n+1)\,\Gamma(n+1) ; \qquad \Gamma(1) = 1 ; \qquad \Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$$

DOCTORADO EN CIENCIAS- FISICA

EXAMEN DE CONOCIMIENTOS 2016-2

(Enero de 2017)

SOLUCION: TERMODINAMICA Y MECANICA ESTADISTICA

PROBLEMA #1

El calor Q suministrado al gas se "reparte" en el trabajo que el gas debe ejercer durante la expansión para contraer el resorte y en el cambio en la energía interna del gas.

$$Q = W_{1\to 2} + \Delta U_{1\to 2}$$

$$W_{12} = ? \quad ; \quad \Delta U_{1\to 2} = ?$$

$$W_{1\to 2} = \int_{V_1}^{V_2} P(V)\, dV \quad \Rightarrow \quad P(V) = ?$$

$$V = V_0 + A x \longrightarrow x = \frac{V - V_0}{A}$$

$$P = P_0 + \kappa x \frac{1}{A} = P_0 + \left(\frac{\kappa}{A}\right) x$$

$$\Rightarrow P(V) = P_0 + \left(\frac{\kappa}{A^2}\right)(V - V_0) \qquad P_0 = 0$$

$$W_{12} = \int_{V_1}^{V_2} \left(\frac{\kappa}{A^2}\right)(V - V_0)\, dV = \left(\frac{\kappa}{A^2}\right)\left[\frac{1}{2}(V_2^2 - V_1^2) - V_0 (V_2 - V_1)\right]$$

$$= \left(\frac{\kappa}{A^2}\right)(V_2 - V_1)\left\{\frac{1}{2}(V_2 + V_1) - V_0\right\}$$

Ahora, $\left.\begin{aligned} P_1 &= \left(\frac{K}{A^2}\right)(V_1 - V_0) \\ P_2 &= \left(\frac{K}{A^2}\right)(V_2 - V_0) \end{aligned}\right\} P_1 + P_2 = \left(\frac{K}{A^2}\right)\left\{(V_1+V_2) - 2V_0\right\}$

$$\Rightarrow \quad W_{1\to 2} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)(V_2 - V_1)$$

$$\Delta U_{1\to 2} = U_2 - U_1 = \frac{3}{2} N K (T_2 - T_1)$$

$$\uparrow$$

$$PV = NKT$$

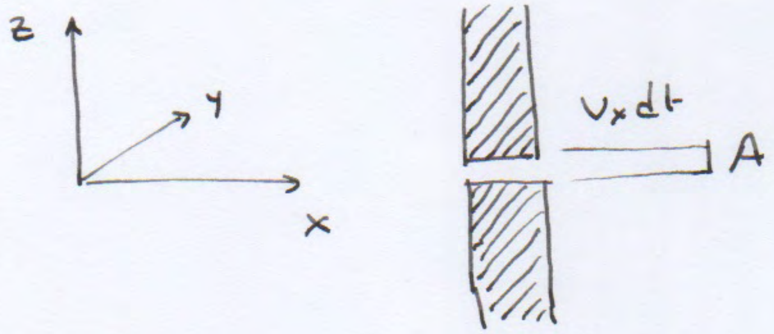
$$\Rightarrow \Delta U_{1\to 2} = \frac{3}{2}(P_2 V_2 - P_1 V_1)$$

$$Q = W_{1\to 2} + \Delta U_{1\to 2}$$

$$\boxed{Q = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)(V_2 - V_1) + \frac{3}{2}(P_2 V_2 - P_1 V_1)}$$

PROBLEMA #2

Supongamos el agujero en la pared perpendicular al eje x, tales que las moleculas que escapan lo hacen con $V_x > 0$.



$$dN = A V_x \, dt \, dn$$
$$dn = n f(\vec{v}) \, d\vec{v}$$

$$\frac{dN}{dt} = An \int_{V_x > 0} V_x f(\vec{v}) \, d^3 v$$

$$f(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} d^3 v$$

$$\frac{dN}{dt} = An \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_y^2}{2kT}} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}} dv_z \int_{-\infty}^{\infty} v_x e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \qquad x^2 = a y^2 \rightarrow x = \sqrt{a}\, y$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad a = \frac{m}{2kT}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = \sqrt{\frac{2\pi kT}{m}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \qquad x^2 = a y^2 \longrightarrow x = \sqrt{a}\, y$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y e^{-ay^2} dy = \frac{1}{2a} = \frac{kT}{m}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} v_x \, e^{-\frac{m v_x^2}{2kT}} dv_x = \frac{kT}{m}$$

$$\Rightarrow \frac{dN}{dt} = An \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \left(\frac{2\pi kT}{m}\right)\left(\frac{kT}{m}\right)$$

$$= An \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} \qquad n = \frac{N}{V}$$

$$\boxed{\frac{dN}{dt} = \frac{AN}{V} \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}}$$

PROBLEMA # 3

(a) La interacción entre un dipolo y un campo magnetico esta dada por

$$\mathcal{E} = -\vec{\mu}\cdot\vec{H}$$

La energía de interacción entre el sistema de dipolos y el campo magnetico externo es:

$$E = -\sum_{i=1}^{N} \vec{\mu}_i \cdot \vec{H} = -\mu H \sum_{i=1}^{N} \cos\theta_i \qquad \beta \equiv 1/kT$$

$$Z_N = \sum_{\{\theta_i\}} \exp\{-\beta E\} = \sum_{\{\theta_i\}} \exp\{\beta\mu H \sum_{i=1}^{N} \cos\theta_i\}$$

Todos los posibles conjuntos de orientaciones de los N dipolos.

(b) $$Z_N = \sum_{\{\theta_i\}} \prod_{i=1}^{N} \exp\{\beta\mu H\cos\theta_i\}$$

$$= \prod_{i=1}^{N} \sum_{\{\theta_i\}} \exp(\beta\mu H\cos\theta_i)$$

$$= \left[\sum_{\{\theta_i\}} \exp(\beta\mu H\cos\theta_i)\right]^N$$

$$= \left[Z_1\right]^N$$

$$Z_N = [Z_1]^N$$ (el factor $\frac{1}{N!}$ no va porque los dipolos son localizados y por tanto distinguibles).

$$\Rightarrow \quad Z_1 = \sum_{\{\theta_i\}} \exp\{\beta \mu H \cos\theta_i\}$$

$\sum_{\{\theta_i\}}$: Todas las posibles orientaciones de un dipolo clasico

$$\hookrightarrow \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$\Rightarrow \quad Z_1 = 2\pi \int_0^{\pi} e^{\beta \mu H \cos\theta} \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

$$u = \beta \mu H \cos\theta \longrightarrow du = -\beta \mu H \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta \, d\theta = -\frac{1}{\beta \mu H} du$$

$$Z_1 = \frac{2\pi}{\beta \mu H} \int_{-\beta\mu H}^{\beta \mu H} e^u du = \frac{2\pi}{\beta \mu H} \left[e^u \Big|_{-\beta\mu H}^{\beta \mu H} \right]$$

$$= \frac{4\pi}{\beta \mu H} \left\{ \frac{e^{\beta\mu H} - e^{-\beta \mu H}}{2} \right\}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{Z_1 = \frac{4\pi}{\beta\mu H} \operatorname{Senh}(\beta\mu H)}$$

(c) $$M_z = \left\langle \sum_{i=1}^{N} \mu \cos\theta_i \right\rangle = N \langle \mu \cos\theta \rangle$$

$$= N \frac{\sum_{\{\theta\}} \mu \cos\theta \exp\{\beta\mu H \cos\theta\}}{\sum_{\{\theta\}} \exp\{\beta\mu H \cos\theta\}}$$

$$= \frac{N}{Z_1} \sum_{\{\theta\}} \mu \cos\theta \exp(\beta\mu H \cos\theta)$$

?

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial Z_1}{\partial H} = \sum_{\{\theta\}} \beta\mu \cos\theta \exp(\beta\mu H \cos\theta)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\beta} \frac{\partial Z_1}{\partial H} = \sum_{\{\theta\}} \mu \cos\theta \exp(\beta\mu H \cos\theta)$$

$$M_z = \frac{N}{\beta} \frac{1}{Z_1} \frac{\partial Z_1}{\partial H} \quad ; \quad Z_1 = \frac{4\pi}{\beta\mu H} \operatorname{Senh}(\beta\mu H)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial Z_1}{\partial H} = \frac{4\pi}{\beta\mu} \left\{ \beta\mu \operatorname{Cosh}(\beta\mu H)/H - \operatorname{Senh}(\beta\mu H)/H^2 \right.$$

$$= 4\pi \left\{ \frac{\cosh(\beta\mu H)}{H} - \frac{\operatorname{senh}(\beta\mu H)}{\beta\mu H^2} \right\}$$

$$M_z = \frac{N}{\beta}\frac{1}{Z_1}\frac{\partial Z_1}{\partial H}$$

$$= \frac{N}{\beta}\frac{\beta\mu H}{4\pi}\frac{4\pi}{\operatorname{senh}(\beta\mu H)}\left\{\frac{\cosh(\beta\mu H)}{H} - \frac{\operatorname{senh}(\beta\mu H)}{\beta\mu H^2}\right\}$$

$$= N\mu\left\{\coth(\beta\mu H) - \frac{1}{\beta\mu H}\right\}$$

$$\boxed{M_z = N\mu\left\{\coth(\beta\mu H) - \frac{1}{\beta\mu H}\right\}}$$

PROBLEMA # 4

(a)

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/kT} \pm 1}$$

$\mu = 0$

$E = E(p) = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2}$

$\downarrow$

$E(p) = cp$

$\uparrow$

caso extremadamente relativista.

$$f(p) = \frac{1}{e^{cp/kT} \pm 1}$$

$$n = \frac{g}{h^3}\int f(p)\, d^3p = \frac{4\pi g}{h^3}\int_0^\infty p^2 f(p)\, dp$$

$$n = \frac{4\pi g}{h^3}\int_0^\infty \frac{p^2\, dp}{e^{cp/kT} \pm 1}$$

Para fotones $g_\gamma = 2 \leftarrow$ dos polarizaciones.

$$\Rightarrow n_\gamma = \frac{8\pi}{h^3}\int_0^\infty \frac{p^2\, dp}{e^{cp/kT} - 1} \qquad \xi = \frac{c}{kT} \quad p = \frac{kT}{c}\xi$$

$$n_\gamma = \frac{8\pi}{h^3}\left(\frac{kT}{c}\right)^3 \underbrace{\int_0^\infty \frac{\xi^2\, d\xi}{e^\xi - 1}}_{\zeta(3)\Gamma(3) = 2\zeta(3)}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{n_\gamma = \frac{16\pi\,\zeta(3)}{h^3\,c^3}\,(kT)^3}$$

(b) Para electrones $g_e = 2$ ← dos helicidades.

$$n_e = \frac{8\pi}{h^3}\int_0^\infty \frac{p^2\,dp}{e^{cp/kT}+1} \qquad \xi = \frac{c}{kT}p\ ;\ p = \frac{kT}{c}\xi$$

$$n_e = \frac{8\pi}{h^3}\left(\frac{kT}{c}\right)^3 \int_0^\infty \frac{\xi^2\,d\xi}{e^\xi+1}$$ ← igual a n_γ salvo por el integrando.

↓
?

$$\int_0^\infty \frac{\xi^2\,d\xi}{e^\xi+1} \;\vdots\; \int_0^\infty \frac{\xi^2\,d\xi}{e^\xi-1}$$
(?)

$$(e^\xi+1)(e^\xi-1) = e^{2\xi}-1$$ ← Similar a $e^\xi - 1$

$$\frac{1}{e^\xi-1} - \frac{1}{e^\xi+1} = \frac{2}{(e^\xi+1)(e^\xi-1)} = \frac{2}{e^{2\xi}-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{e^\xi+1} = \frac{1}{e^\xi-1} - 2\,\frac{1}{e^{2\xi}-1}$$

$$\int_0^\infty \frac{\xi^2\, d\xi}{e^\xi + 1} = \underbrace{\int_0^\infty \frac{\xi^2\, d\xi}{e^\xi - 1}}_{2\zeta(3)} - 2\int_0^\infty \frac{\xi^2\, d\xi}{e^{2\xi} - 1}$$

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^3 \underbrace{\int_0^\infty \frac{u^2\, du}{e^u - 1}}_{2\zeta(3)}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\xi^2\, d\xi}{e^\xi + 1} = 2\zeta(3)\left\{1 - \frac{1}{4}\right\}$$

$$= \frac{3}{4} \cdot 2\zeta(3)$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^\infty \frac{\xi^2\, d\xi}{e^\xi - 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{n_e = \frac{3}{4} n_\gamma}$$

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2016 - 2
Mecánica Cuántica

No se permite el uso de libros, apuntes, o dispositivos electrónicos.

Duración total del exámen : 3 horas

---

1. (**20 pts.**) Considere una partícula en una dimensión sujeta a un potencial delta atractivo en el origen, con hamiltoniano

$$H = \frac{p_x^2}{2m} - \lambda\delta(x) \qquad \lambda > 0.$$

a) (**8 pts.**) Suponga que la partícula incide desde la izquierda con momentum $\hbar k$. Resuelva la ecuación de Schrödinger suponiendo una solución de la forma

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + r(k)e^{-ikx} & x < 0 \\ t(k)e^{ikx} & x > 0 \end{cases}$$

y determine los coeficientes de reflexión y transmisión $r(k)$ y $t(k)$. Use la continuidad de $\psi(x)$ en el origen y una relación entre las derivadas de $\psi(x)$ a lado y lado del origen, la cual se obtiene integrando las ecuación de Schrödinger resultante en un intervalo infinitesimal alrededor de $x = 0$.

b) (**8 pts.**) Considerando ahora el coeficiente de transmisión como una función en el plano k complejo, demuestre que $t(k)$ tiene un polo simple y encuentre el valor k_0 donde está localizado el polo.

c) (**4 pts.**) Tome la función $\psi(x)$ de la parte (a), divídala por $t(k)$, y evalúela en el polo k_0. Demuestre que la función resultante es un estado ligado de la ecuación de Schrödinger y determine el valor de la energía correspondiente.

---

2. (**20 pts.**) Considere una familia de hamiltonianos $H(\lambda)$ dependiente continuamente de un cierto parámetro real λ, tal que para cada valor de λ se satisface una ecuación de Schrödinger

$$H(\lambda)|n;\lambda\rangle = E_n(\lambda)|n;\lambda\rangle,$$

con estados propios $|n;\lambda\rangle$ y valores propios $E_n(\lambda)$ que también dependen (continuamente, suponemos) de λ.

a) (**8 pts.**) Tomando el valor esperado de $H(\lambda)$ con uno de sus estados propios normalizados y derivando, demuestre el teorema de Hellman-Feynman, el cual dice que

$$\frac{\partial E_n(\lambda)}{d\lambda} = \langle n;\lambda|\frac{\partial \hat{H}(\lambda)}{d\lambda}|n;\lambda\rangle.$$

b) (**8 pts.**) Considere ahora la ecuación de Schödinger radial para el electrón en un átomo hidrogénico con valores de ℓ reales arbitrarios. Las funciones propias radiales $R_{n_r,\ell}(r)$ satifacen:

$$H(\ell)R_{n_r,\ell,k}(r) = E_{n_r}(\ell)R_{n_r,\ell}(r)$$

con

$$H(\ell) = \frac{-\hbar^2}{2m_e}\left(\frac{d}{dr}^2 + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right) - \frac{Ze^2}{r}, \qquad E_{n_r}(\ell) = -\frac{m_e Z^2 e^4/2\hbar^2}{(n_r+\ell)^2},$$

y donde n_r es un número entero estrictamente positivo, de tal manera que el número cuántico principal n usual se entiende como $n = n_r + \ell$, con ℓ entero. Usando el teorema de Hellman-Feynman y derivando con respecto a distintos parámetros, evalúe los valores esperados de $1/r$ y $1/r^2$ para un orbital con números cuánticos n, ℓ.

c) (**4 pts.**) En un tratamiento relativista, la energía cinética del electrón, como función del momento, satisface

$$T = \sqrt{|\vec{p}|^2c^2 + m_e^2c^4} - m_ec^2 = \frac{|\vec{p}|^2}{2m_e} - \frac{|\vec{p}|^4}{8m_e^3c^2} + \ldots,$$

así que la primera corrección relativista a la energía cinética es

$$\Delta T = -\frac{|\vec{p}|^4}{8m_e^3c^2} = -\frac{T_0^2}{2m_ec^2},$$

donde T_0 es la energía cinética no-relativista. Use el resultado de la parte (b) para evaluar la primera corrección perturbativa a la energía del orbital (n, l) debido a efectos relativistas en la energía cinética.

3. (**30 pts.**) Como ejemplo de un rotor cuántico considere una molécula diatómica rígida con dipolo eléctrico permanente de magnitud d constante y momento de inercia I en torno a su eje. En presencia de un campo eléctrico externo de magnitud $\mathscr{E}$ en la dirección z, el hamiltoniano de la molécula es

$$H = H_0 + V\,, \qquad \text{donde } H_0 = \frac{L^2}{2I}\,, \qquad V = -d\mathscr{E}\cos\theta,$$

siendo $\vec{L}$ el operador de momento angular, con componentes

$$L_\pm = L_x \pm iL_y = \pm\hbar e^{\pm i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \pm i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right), \qquad L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}\,,$$

y θ y ϕ los ángulos polar y azimutal que describe el dipolo con respecto al eje z. Cuando $\mathscr{E} = 0$, los estados de la base de momento angular $|l,m\rangle$ (autoestados de L^2 y L_z) son estados propios de la energía con $E_{l,m} = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2I}$. Analizaremos el efecto de un campo pequeño.

a) (**12 pts.**) Evalúe los elementos de matriz $\langle l_1, m_1|V|l_2, m_2\rangle$ en la base de momento angular. Verifique que V sólo conecta estados con el mismo valor de m y obtenga las reglas de selección para $\Delta l = l_1 - l_2$.

b) (**12 pts.**) De acuerdo a las reglas de selección, es posible aplicar teoría de perturbación no-degenerada dentro de cada subespacio generado por estados $|l,m\rangle$ con el mismo valor de m. Suponiendo que el campo externo es pequeño, encuentre la primera corrección perturbativa no-nula $\delta E_{l,l}$ a la energía de los estados $|l,l\rangle$ (es decir, $m = l$).

c) (**6 pts.**) Para los estados $|l,l\rangle$ perturbados, encuentre el coeficiente de proporcionalidad entre la componente z del dipolo $\langle d_z\rangle = d\langle\cos\theta\rangle$ y el campo $\mathscr{E}$, para campos pequeños. El punto (a) del problema 2 puede ser útil.

Armónicos esféricos:

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \qquad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\,, \qquad Y_1^{\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{\pm i\phi}$$

Integral de tres armónicos esféricos:

$$\int Y_{l_1}^{m_1*}(\Omega)\, Y_{l_2}^{m_2*}(\Omega)\, Y_l^m(\Omega)\, d\Omega = \sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi(2l+1)}}\langle l_1, l_2; 0, 0|l_1, l_2; l, 0\rangle\langle l_1, l_2; m_1, m_2|l_1, l_2; l, m\rangle,$$

donde $\langle l_1, l_2; m_1, m_2|l_1, l_2; l, m\rangle$ son los coeficientes de Clebsch-Gordan para la expansión de la base $|l_1, l_2; l, m\rangle$ en términos de la base producto $|l_1, l_2; m_1, m_2\rangle = |l_1, m_1\rangle \otimes |l_2, m_2\rangle$. Para $l_2 = 1$:

$$\langle l, 1; m, 0|l, 1; l+1, m\rangle = \sqrt{\frac{(l+1-m)(l+1+m)}{(2l+1)(l+1)}}\,, \qquad \langle l, 1; m, 0|l, 1; l-1, m\rangle = \sqrt{\frac{(l-m)(l+m)}{(2l+1)l}}$$

$$\langle l, 1; m, 0|l, 1; l, m\rangle = \frac{m}{\sqrt{l(l+1)}}$$

Para $H = H_0 + \epsilon V$:

$$|n\rangle = |n^{(0)}\rangle + \epsilon\sum_{m\neq n}\frac{\langle m^{(0)}|V|n^{(0)}\rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}|m^{(0)}\rangle + \ldots\,, \qquad E_n = E_n^{(0)} + \epsilon\langle n^{(0)}|V|n^{(0)}\rangle + \epsilon^2\sum_{m\neq n}\frac{\left|\langle m^{(0)}|V|n^{(0)}\rangle\right|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} + \ldots$$

4. (**30 pts.**) *Lea cuidadosamente antes de responder las preguntas:* La tasa $\Gamma(e\to g)$ de decaimiento por emisión espontánea de un estado atómico excitado $|e\rangle$ al estado fundamental $|g\rangle$ se obtiene de un tratamiento cuántico de la interacción átomo-campo electromagnético mediada, en la aproximación dipolar, por el hamiltoniano de interacción $H_I = -\vec{E}(\vec{R}).\vec{d}$, donde $\vec{d} = e\vec{r}$ es el operador de dipolo eléctrico del átomo y $\vec{E}(\vec{R})$ es el operador de campo eléctrico en segunda cuantización evaluado en la posición $\vec{R}$ del átomo (la cual trataremos como variable clásica). Dicho operador está dado por

$$\vec{E}(\vec{R}) = \sum_{\vec{k}}\sum_{s=1,2}\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{V}}\left[\hat{\epsilon}_{\hat{k},s}a_{\vec{k},s}e^{i\vec{k}.\vec{R}} + \hat{\epsilon}^*_{\hat{k},s}a^\dagger_{\vec{k},s}e^{-i\vec{k}.\vec{R}}\right], \qquad \text{con } [a_{\vec{k},s}, a^\dagger_{\vec{k}',s'}] = \delta_{\vec{k},\vec{k}'}\delta_{s,s'},$$

siendo $\hat{\epsilon}_{\vec{k},s}$ los vectores unitarios de polarización, ortogonales a la dirección de propagación $\hat{k} = \vec{k}/k$, y V un volumen de cuantización. En este tratamiento, el estado inicial corresponde al producto tensorial $|e,0\rangle \equiv |e\rangle_a \otimes |0\rangle_{EM}$ del estado atómico excitado $|e\rangle$ y del estado de vacío electromagnético $|0\rangle$, mientras que el estado del atomo decaido corresponde a cualquier estado $|g,1_{\hat{k},s}\rangle = |g\rangle_a \otimes |1_{\hat{k},s}\rangle_{EM}$ del átomo en el estado fundamental $|g\rangle$ y el campo en el estado $|1_{\hat{k},s}\rangle$ de un fotón emitido con frecuencia angular $\omega = (E_e - E_g)/\hbar$, dirección $\hat{k}$ y estado de polarización s. Teniendo en cuenta todos los posibles estados del fotón emitido, la tasa de transición total está dada, según la regla de oro de Fermi, por:

$$\Gamma(e\to g) = \frac{2\pi}{\hbar^2}\int d\Omega \sum_{s=1,2}\left|\left\langle g,1_{\hat{k},\lambda}\left|\vec{E}(\vec{R})\cdot\vec{d}\right|e,0\right\rangle\right|^2\rho(\omega), \qquad \text{con } \rho(\omega) = \frac{V\omega^2}{8\pi^3c^3}, \tag{1}$$

donde la integral de ángulo sólido es sobre todas las direcciones posibles del fotón emitido y $\rho(\omega)$ es la densidad de ondas planas por unidad de frecuencia angular y ángulo sólido.

a) (**12 pts.**) Calcule la tasa de decaimiento $\Gamma(e\to g)$ en términos del elemento de matriz $\vec{\mu}_{eg} \equiv \langle g|\vec{d}|e\rangle$ del dipolo atómico, la frecuencia angular ω, y constantes fundamentales. Use las identidades

$$\sum_{s=1}^{2}\left|\vec{A}^*\cdot\hat{\epsilon}_{\hat{k},\lambda}\right|^2 = |\vec{A}|^2 - |\vec{A}\cdot\hat{k}|^2, \qquad \frac{1}{4\pi}\int d\Omega|\vec{A}\cdot\hat{k}|^2 = \frac{1}{3}|\vec{A}|^2.$$

b) (**12 pts.**) Suponga que dos átomos idénticos a_1 y a_2, se encuentran en posiciones cercanas pero distintas ($\vec{R}_1 \neq \vec{R}_2$). Los átomos se preparan inicialmente en una superposición de estados de dos átomos

$$|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|e\rangle_{a_1}\otimes|g\rangle_{a_2} + \frac{e^{i\eta}}{\sqrt{2}}|g\rangle_{a_2}\otimes|e\rangle_{a_1},$$

donde η es un ángulo de fase arbitrario, y finalmente decaen al estado fundamental de los dos átomos $|f\rangle = |g\rangle_{a_1}\otimes|g\rangle_{a_2}$. Explique cómo se debe modificar la fórmula (1) para dar cuenta de esta nueva situación y encuentre una expresión para la tasa $\Gamma(i\to f)$ correspondiente. La expresión obtenida debe ser similar a la de la parte (a) excepto que el factor $\left|\vec{\mu}_{eg}\right|^2$ se reemplaza por un factor que además de $\vec{\mu}_{eg}$, depende de la fase fase η, la longitud de onda $\lambda = 2\pi/k$ de la radiación emitida, y la posición relativa $\delta\vec{R} = \vec{R}_1 - \vec{R}_2$ entre los dos átomos; este factor lo puede dejar planteado en términos de una integral de ángulo sólido. Desprecie cualquier corrección a las energías de los estados atómicos debida a la proximidad entre los átomos.

c) (**6 pts.**) Simplifique el resultado de la parte (b) en el caso $|\delta\vec{R}| \ll \lambda$, de tal manera que se pueda suponer que $\vec{R}_1 = \vec{R}_2$ y compárelo con el resultado de la parte (a). Encuentre un valor de η para el cual la tasa de decaimiento sea cero en esta aproximación. Decimos que en tal caso tenemos un *estado oscuro*–una superposición cuántica que resulta transparente a la interacción con el campo electromagnético.

Problema 1

a) La ec. de Schrödinger es

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} - \lambda\,\delta(x)\psi = E\psi.$$

Sustituyendo la solución propuesta, la ecuación se satisface para $x \neq 0$ con $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$.

Para encontrar $r(k)$ y $t(k)$ usamos continuidad de $\psi(x)$ en $x=0$.

$$\psi(0^-) = \psi(0^+) \Rightarrow \boxed{1+r = t}$$

y obtenemos una condición para las derivadas integrando la ec. de Schrödinger en $[0-\epsilon, 0+\epsilon]$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\int_{x=0^-}^{x=0^+}\frac{d^2\psi}{dx^2}dx - \lambda\int_{x=0^-}^{x=0^+}\delta(x)\psi(x)dx = E\int_{x=0^-}^{x=0^+}\psi(x)dx$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\psi'(0^+) - \psi'(0^-)\right] - \lambda\left[\psi(0)\right] = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}ik\left[t - (1-r)\right] - \lambda t = 0$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{\frac{i\hbar^2 k}{2m}(1-r)}{\lambda + \frac{i\hbar^2 k}{2m}} = \frac{1-r}{1 - i\frac{2m\lambda}{\hbar^2 k}}$$

Tenemos:

$$\left.\begin{aligned} 1+r &= t \\ 1-r &= \left[1 - i\frac{2m\lambda}{\hbar^2 k}\right]t \end{aligned}\right\} \rightarrow t = \frac{2}{2 - i\frac{2m\lambda}{\hbar^2 k}}$$

$$\rightarrow \boxed{t = \frac{k}{k - i\frac{m\lambda}{\hbar^2}}}$$

$$\rightarrow \boxed{r = \frac{i\frac{m\lambda}{\hbar^2}}{k - i\frac{m\lambda}{\hbar^2}}}$$

---

b) De la parte (a) se ve que $k = i m\lambda/\hbar^2$ es un polo simple

$$\rightarrow \boxed{k_0 = i m\lambda/\hbar^2}$$

c) Dividiendo por $t(k)$:

$$\frac{\psi(x)}{t(k)} = \begin{cases} \frac{1}{t(k)} e^{ikx} + \frac{r(k)}{t(k)} e^{-ikx} , & x<0 \\ e^{ikx} , & x>0 \end{cases}$$

y evaluando en k_0 :

$$\frac{1}{t(k_0)} = 0 \ , \ \frac{r(k_0)}{t(k_0)} = 1 \ ,$$

$$\rightarrow \boxed{\psi(x) = e^{-\frac{m\lambda}{\hbar^2}|x|}}$$

Para $x \neq 0$, satisface la Ec. de Schrödinger con :

$$E = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{m\lambda}{\hbar^2}\right)^2 = -\frac{m\lambda^2}{2\hbar^2}$$

y satisface $\psi(0^+) = \psi(0^-) = 1$

y $-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\psi'(0^+) - \psi'(0^-)\right]$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\left[-\frac{m\lambda}{\hbar^2} - \frac{m\lambda}{\hbar^2}\right] = \lambda = \lambda\psi(0)$$

Por lo tanto es solución con $\boxed{E = -\frac{m\lambda}{2\hbar^2}}$

Problema #2

a) Partimos de $E_n(\lambda) = \langle n;\lambda | \mathcal{H}(\lambda) | n;\lambda \rangle$

$$\Rightarrow \frac{dE_n(\lambda)}{d\lambda} = \left(\frac{d}{d\lambda}\langle n;\lambda|\right)\mathcal{H}(\lambda)|n;\lambda\rangle + \langle n;\lambda|\mathcal{H}(\lambda)\frac{d}{d\lambda}|n;\lambda\rangle$$
$$+ \langle n;\lambda| \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} |n;\lambda\rangle$$

$$= E_n(\lambda)\left[\left(\frac{d}{d\lambda}\langle n;\lambda|\right)|n;\lambda\rangle + \langle n;\lambda|\frac{d}{d\lambda}|n;\lambda\rangle\right] + \left\langle \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda}\right\rangle$$

$$= E_n(\lambda)\frac{d}{d\lambda}[\underbrace{\langle n;\lambda|n;\lambda\rangle}_{=1}] + \langle \partial \mathcal{H}/\partial\lambda \rangle$$

$$= \langle \partial \mathcal{H}/\partial\lambda \rangle$$

b) $$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{d}{dr}^2 + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}\right] + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} - \frac{Ze^2}{r}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial l} = \dfrac{\hbar^2(2l+1)}{2m}\left(\dfrac{1}{r^2}\right) \\ \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial Z} = -e^2\left(\dfrac{1}{r}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{1}{r^2}\right\rangle_{n,l} = \frac{2m}{\hbar^2(2l+1)}\frac{\partial E_{n_r,l}}{\partial l} = \frac{2m}{\hbar^2(2l+1)}\,\frac{2\frac{Z^2e^4 m}{2\hbar^2}}{(n_r+l)^3}$$

$$= \frac{m^2 Z^2 e^4}{\hbar^4}\frac{1}{(l+1/2)}\frac{1}{n^3} \quad \text{cn } n = n_r + l$$

$$\left\langle \frac{1}{r}\right\rangle_{n,l} = -\frac{1}{e^2}\frac{\partial E_{n_r,l}}{\partial Z} = +\frac{1}{e^2}\left[\frac{2Ze^4 m/\cancel{2}\hbar^2}{(n_r+l)^2}\right]$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \frac{Ze^2 m}{\hbar^2 n^2}$$

Definiendo: $\quad a_0 = \dfrac{\hbar^2}{Ze^2} \equiv$ RADIO DE BOHR

$$\Rightarrow \boxed{\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle_{n,l} = \frac{1}{a_0} \frac{1}{n^2}}$$

$$\boxed{\left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle_{n,l} = \frac{1}{a_0^2} \frac{1}{n^3} \frac{1}{(l+1/2)}}$$

---

c) $\quad T = H - V = H + \dfrac{Ze^2}{r}$

$$\Rightarrow \langle T^2 \rangle_{n,l} = \left\langle H^2 + \left\{ \frac{Ze^2}{r}, H \right\} + (Ze^2)^2 \frac{1}{r^2} \right\rangle_{nl}$$

$$= E_{n,l}^2 + 2E_{n,l}\, Ze^2 \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle_{n,l} + (Ze^2)^2 \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle_{n,l}$$

Usamos: $\quad E_{n,l} = -\dfrac{Ze^2}{2a_0} \dfrac{1}{n^2}$

$$\Rightarrow \langle T^2 \rangle_{n,l} = \left(\frac{Ze^2}{a_0} \right)^2 \left[\frac{1}{4n^4} - 2\left(\frac{1}{2n^2}\right)\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \frac{1}{l+1/2} \right]$$

$$= \left(\frac{Ze^2}{2a_0} \right)^2 \frac{1}{n^4} \left(\frac{4n}{l+1/2} - 3 \right) = E_{n,l}^2 \left(\frac{4n}{l+1/2} - 3 \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta E_{n,l} = \frac{-E_{n,l}^2}{2mc^2} \left(\frac{4n}{l+1/2} - 3 \right)}$$

Problema 3

a) $\langle l_1 m_1 | V | l_2, m_2 \rangle = -d\mathcal{E} \langle l_1 m_1 | \cos\theta | l_2, m_2 \rangle$

tomando: $\cos\theta = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\, Y_1^0 = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\, Y_1^{0*}$

$\Rightarrow \langle l_1 m_1 | V | l_2, m_2 \rangle = -d\mathcal{E} \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \int Y_{l_1}^{m_1 *} Y_1^{0*} Y_{l_2}^{m_2} d\Omega$

$$= -d\mathcal{E} \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \sqrt{\frac{(2l_1+1)\,3}{4\pi\,(2l_2+1)}} \langle l_1, 1; 0 0 | l_1, 1; l_2 0 \rangle \langle l_1, 1; m_1 0 | l_1, 1; l_2, m \rangle$$

$$= -d\mathcal{E} \sqrt{\frac{2l_1+1}{2l_2+1}} \langle l_1, 1; 0 0 | l_1, 1; l_2, 0 \rangle \langle l_1, 1; m_1 0 | l_1, 1; l_2, m \rangle$$

Por adición de momento angular los posibles valores de l_2 son: $|l_1 - 1| \le l_2 \le |l_1 + 1|$

Así que para $l_1 \ge 1$: $l_2 = \{ l_1 - 1, l_1, l_1 + 1 \}$

para $l_1 = 0$: $l_2 = 1$.

Pero $\langle l, 1; 0 0 | l, 1; l 0 \rangle = 0$ así que $l_2 \neq l_1$ (Selección por paridad)

$\Rightarrow l_2 = l_1 \pm 1$

y por propiedades de C.G $m_1 = m_2$.

Ahora:

$$\langle l,1;00|l,1;l+1,0\rangle\langle l,1;m0|l_1,1;l_1+1,m\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{(l+1)^2}{(l+1)(2l+1)}}\sqrt{\frac{(l+1)^2-m^2}{(l+1)(2l+1)}} = \frac{\sqrt{(l+1)^2-m^2}}{2l+1}$$

$$\langle l,1;00|l,1;l-1,0\rangle\langle l,1;m0|l,1;l-1,m\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{l^2}{l(2l+1)}}\sqrt{\frac{l^2-m^2}{l(2l+1)}} = \frac{\sqrt{l^2-m^2}}{2l+1}$$

$$\Rightarrow \langle l_1,m|V|l_2,m\rangle = -d\mathcal{E}\sqrt{\frac{2l_1+1}{2l_2+1}}\begin{cases}\dfrac{1}{2l_1+1}\sqrt{l_2^2-m^2} \\[2ex] \dfrac{1}{2l_1+1}\sqrt{l_1^2-m^2}\end{cases}$$

$$\boxed{\Rightarrow \langle l_1,m|V|l_2,m\rangle = -d\mathcal{E}\begin{cases}\sqrt{\dfrac{l_2^2-m^2}{4l_2^2-1}}, & l_2=l_1+1 \\[2ex] \sqrt{\dfrac{l_1^2-m^2}{4l_1^2-1}}, & l_2=l_1-1\end{cases}}$$

b) Como $\langle l,m|V|l,m\rangle = 0$ necesitamos ir a segundo orden en teoría de perturbación:

$$\delta E_{l,m} = \sum_{\pm}{}' \frac{|\langle l,m|V|l\pm 1,m\rangle|^2}{E_l - E_{l\pm 1}} \qquad (l \neq 0)$$

pero para $m=l$, $|l-1,l\rangle$ no existe, así que sólo se necesita tener en cuenta el signo $+$:

$$\delta E_{l,l} = \frac{|\langle l,l|V|l+1,l\rangle|^2}{\frac{\hbar^2}{2I}[l(l+1)-(l+1)(l+2)]} = -\frac{I}{\hbar^2(l+1)}|\langle l,l|V|l+1,l\rangle|^2$$

de la parte (a):

$$\langle l,l|V|l+1,l\rangle = -d\mathcal{E}\sqrt{\frac{(l+1)^2-l^2}{4(l+1)^2-1}}$$

$$= -d\mathcal{E}\sqrt{\frac{\cancel{(2l+1)}}{\cancel{(2l+1)}(2l+3)}} = \frac{-d\mathcal{E}}{\sqrt{2l+3}}$$

Así que:

$$\boxed{\delta E_{l,l} = -\frac{I}{(2l+3)}\left(\frac{d\mathcal{E}}{\hbar}\right)^2}$$

C) A este orden:

$$\langle d_z \rangle_{ll} = -\left\langle \frac{\partial H}{\partial \mathcal{E}} \right\rangle_{ll} = -\frac{\partial E_{ll}}{\partial \mathcal{E}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle d_z \rangle_{ll} = \frac{2}{2l+3}\left(\frac{I d^2}{\hbar^2}\right)\mathcal{E}_1}$$

Problema 4

a)

$$\langle g, 1_{k,\lambda} | \vec{E}(\vec{R}) \cdot \vec{d} \,| e, 0 \rangle = \vec{\mu}_{ge} \cdot \langle 1_{k,\lambda} | \vec{E}(\vec{R}) | 0 \rangle$$

como $\langle 1_{k,\lambda} | \vec{E}(\vec{R}) | 0 \rangle = \langle 0 | a_{k,\lambda} \vec{E}(R) | 0 \rangle$

$$= \langle 0 | [a_{k,\lambda}, \vec{E}(R)] | 0 \rangle + \cancel{\langle 0 | \vec{E}(R)\, a_{k,\lambda} | 0 \rangle}^{\,0}$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V}}\, \vec{\varepsilon}^{\,*}_{k,\lambda}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{R}}$$

$$\Rightarrow |\langle g, 1_{k,\lambda} | \vec{E}(\vec{R}) \cdot \vec{d} \,| e, 0 \rangle|^2 = \frac{2\pi\hbar\omega}{V} |\vec{\mu} \cdot \vec{\varepsilon}^{\,*}_{k,\lambda}|^2$$

$$\Rightarrow \Gamma = \frac{2\pi}{\hbar^2} \int d\Omega \left[\frac{2\pi\hbar\omega}{\cancel{V}} \sum_\lambda |\vec{\mu} \cdot \vec{\varepsilon}^{\,*}|^2 \right] \frac{\cancel{V}\omega^2}{8\pi^3 c^3}$$

$$= \frac{2\omega^3}{\hbar c^3} \left[\int \frac{d\Omega}{4\pi} \sum_\lambda |\vec{\mu} \cdot \vec{\varepsilon}^{\,*}|^2 \right]$$

$$= \frac{2\omega^3}{\hbar c^3} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \left[|\mu|^2 - |\vec{\mu} \cdot \hat{k}|^2 \right]$$

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} |\vec{\mu}\cdot\hat{k}|^2 = |\mu|^2 \int \frac{d\Omega}{4\pi} \cos^2\theta = \frac{|\mu|^2}{2} \int_{-1}^{1} dx\, x^2 = \frac{|\mu|^2}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3} |\vec{\mu}_{eg}|^2}$$

b) Con dos átomos, el término de interacción es:

$$H_I = \vec{E}(\vec{R}_1)\cdot\vec{d}_1 + \vec{E}(\vec{R}_2)\cdot\vec{d}_2$$

$$\Rightarrow \langle f 1_{k,\lambda} | H_I | i\, 0 \rangle = \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{V}}\, \vec{\varepsilon}^{\,*}_{k,\lambda} \cdot \left[e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}_1} \langle f | \vec{d}_1 | i \rangle + e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}_2} \langle f | \vec{d}_2 | i \rangle \right]$$

$$\langle f | \vec{d}_1 | i \rangle = \langle gg | (\vec{d}_1 \otimes \mathbb{1}) \frac{|eg\rangle + |ge\rangle e^{i\eta}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{\mu}_{eg}$$

$$\langle f | \vec{d}_2 | i \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{\mu}_{eg} e^{i\eta}$$

$$\Rightarrow \langle f 1_{k,\lambda} | H_I | i\, 0 \rangle = \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{V}} \left(\vec{\varepsilon}^{\,*}_{k,\lambda} \cdot \vec{\mu}_{eg} \right) \left[\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}_1} + e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}_2 + i\eta}}{\sqrt{2}} \right]$$

con $\vec{k} = k\hat{n}$

$$\Rightarrow \Gamma = \frac{2\omega^3}{\hbar c^3}\int \frac{d\Omega}{4\pi}\left|\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}_1} + e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}_2 + i\eta}}{\sqrt{2}}\right|^2 \left[|\vec{\mu}|^2 - |\vec{\mu}\cdot\hat{k}|^2\right]$$

$$\left|e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}_1} + e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}_2+i\eta}\right|^2 = 4\cos^2\left(\frac{\vec{k}\,\delta\vec{R} - \eta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{\Gamma = \frac{4\omega^3}{\hbar c^3}\int\frac{d\Omega}{4\pi}\cos^2\left(\frac{\vec{k}\cdot\delta\vec{R} - \eta}{2}\right)\left(|\vec{\mu}|^2 - |\vec{\mu}\cdot\hat{k}|^2\right)}$$

c) con $\delta\vec{R} \approx 0$

$$\Gamma = \frac{4\omega^3}{\hbar c^3}\cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right)\underbrace{\int\frac{d\Omega}{4\pi}\left(|\vec{\mu}|^2 - |\vec{\mu}\cdot\hat{k}|^2\right)}_{= \frac{2}{3}|\vec{\mu}|^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma = \frac{8\omega^3}{3\hbar c^3}|\vec{\mu}|^2\cos^2(\eta/2)}$$

con $\eta = \pi \longrightarrow \Gamma = 0$

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2016 - II
Electromagnetismo

No se permite el uso de ningún documento, libro o apuntes, ni el uso de ningún dispositivo electrónico tales como celulares, reproductores de música, computadores, tabletas, etc.

Duración total del exámen : 3 horas

PROBLEMA 1 (**20 puntos**) Considere un capacitor cilíndrico formado por un alambre de cobre de radio a y carga $+Q$ y rodeado por un tubo concéntrico de radio c y carga $-Q$. El espacio entre ellos está parcialmente lleno de un dieléctrico de constante ϵ_r a partir de un radio $b > a$ (con $a < b < c$). Encuentre:

1. (4 puntos) Los campos $\vec{E}$ y $\vec{D}$ para todo r
2. (4 puntos) La polarización $\vec{P}$ en el dieléctrico.
3. (4 puntos) La densidad superficial de carga sobre la superficie del dieléctrico para $r = b$ y $r = c$.
4. (4 puntos) La capacitancia por unidad de longitud del cilindro.
5. (4 puntos) El trabajo por unidad de longitud necesario para ensamblar el sistema.

PROBLEMA 2 (25 puntos) Considere un capacitor de placas paralelas circulares de radio a, separadas por una distancia w como se muestra en la figura. El capacitor se carga con una corriente constante en el tiempo $I(t) = I_0$.

1. (5 puntos) Calcule la dirección y magnitud del campo eléctrico, $\vec{E}(t)$, dentro del capacitor.
2. (5 puntos) Calcule la magnitud y dirección del campo magnético, $\vec{B}(t)$, entre las placas del capacitor.
3. (5 puntos) Calcule la dirección y magnitud del vector de Poynting, $\vec{S}(t)$.
4. (5 puntos) Encuentre la densidad de energía almacenada dentro del capacitor ($u_{em}(t)$).
5. (5 puntos) Verifique que la energía se conserva en todo instante de tiempo durante este proceso.

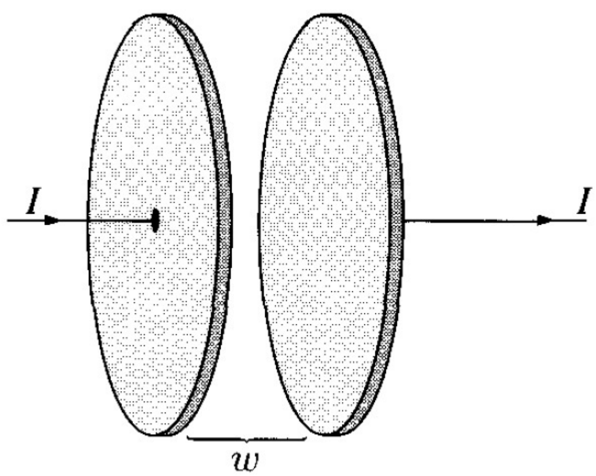


Figure 1

PROBLEMA 3 (25 puntos) Considere un cascarón conductor esférico, sin carga, de radio R ubicado en un campo eléctrico externo uniforme $\vec{E} = E_0 \hat{z}$.

1. (5 puntos) Escriba la solución general de la ecuación de Laplace suponiendo simetría azimutal.
2. (5 puntos) Escriba las condiciones de frontera que debe satisfacer el potencial eléctrico.
3. (10 puntos) Usando estas condiciones de frontera encuentre el potencial eléctrico para todo radio r.
4. (5 puntos) Encuentre la densidad de carga superficial sobre la esfera conductora $\sigma(\theta)$.

Ecuaciones relacionadas:

Polinomios de Legendre

$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = x$$
$$P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}$$
$$P_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2}$$

Ortonormalidad de los polinomios

$$\int_{-1}^{1} P_l(x) P_{l'}(x) dx = \int_0^{\pi} P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta) \sin\theta d\theta = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & l \neq l' \\ \frac{2}{2l+1}, & l = l' \end{array} \right\}$$

PROBLEMA 4 (30 puntos) Suponga una partícula de masa m y carga q_0 que está atada a un resorte con constante k colgando de una mesa. Su posición de equilibrio se encuentra a una distancia h del piso. El resorte es estirado y liberado a una distancia d con respecto a su posición de equilibrio como muestra la figura 2. Los potenciales producidos por la carga en movimiento corresponden a los de un dipolo perfecto que oscila con una frecuencia $\omega = \sqrt{k/m}$, los cuales están dados, en la zona de radiación, por:

$$V(r,\theta,t) = -\frac{q_0 d\omega}{4\pi\epsilon_0 c}\left(\frac{\cos\theta}{r}\right)\sin[\omega(t-r/c)] \tag{1}$$

$$\vec{A} = -\frac{\mu_0 q_0 d\omega}{4\pi r}\sin[\omega(t-r/c)]\hat{z}. \tag{2}$$

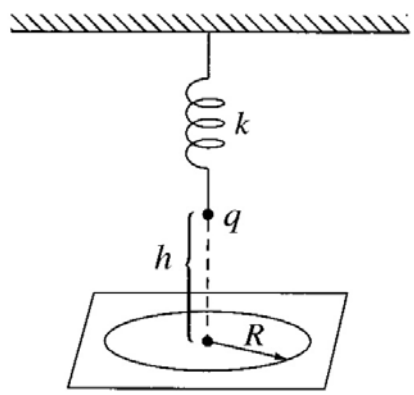


Figure 2

1. (5 puntos) Encontrar la magnitud y la dirección del campo eléctrico producido por este dipolo en cualquier punto $\vec{\mathbf{r}}$ del espacio en la zona de radiación ($r >> c/\omega$).
2. (5 puntos) Encontrar la magnitud y la dirección del campo magnético bajo la misma aproximación.
3. (5 puntos) Calcule el promedio temporal del vector de Poynting.
4. (5 puntos) Calcule la intensidad de la radiación que golpea el piso como función de la distancia R en la figura.
5. (5 puntos) Encuentre el valor de R para el cual la intensidad de la radiación que golpea el piso es máxima.
6. (5 puntos) Encuentre la potencia total irradiada sobre el piso ($\int_0^\infty \frac{x^3}{(x^2+a^2)^{5/2}}dx = \frac{2}{3a}$).

Fórmulas generales

Identidades vectoriales

$$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})$$

$$\vec{A}\times\vec{B}\times\vec{C} = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

Derivadas vectoriales en coordenadas cartesianas:

$$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial t}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{k}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{k}$$

Derivadas vectoriales en coordenadas esféricas:

$$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial t}{\partial\phi}\hat{\phi}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{v} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}\right]\hat{r} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi)\right]\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right]\hat{\phi}$$

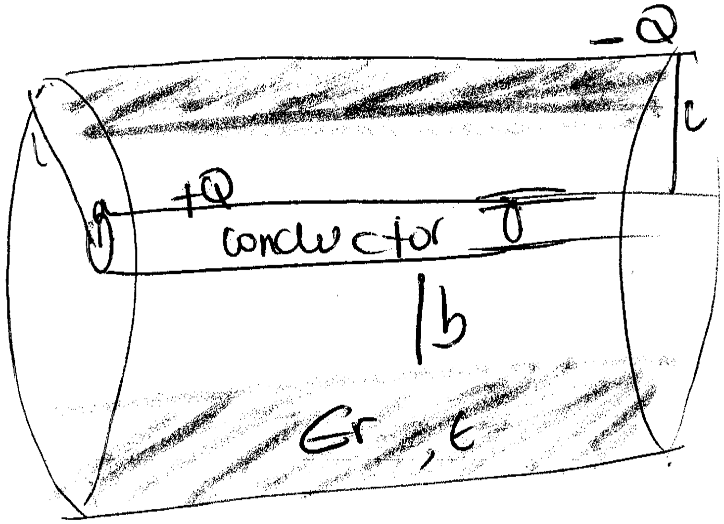
Derivadas vectoriales en coordenadas cilíndricas:

$$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial s}\hat{s} + \frac{1}{s}\frac{\partial t}{\partial\phi}\hat{\phi} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{k}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(s v_s) + \frac{1}{s}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{v} = \left[\frac{1}{s}\frac{\partial v_z}{\partial\phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right]\hat{s} + \left[\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s}\right]\hat{\phi} + \frac{1}{s}\left[\frac{\partial}{\partial s}(s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial\phi}\right]\hat{k}$$

Problema 1



1) Encontra $\vec{E}$ y $\vec{D}$ para todo r

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{en}}{\varepsilon_0}$$

$r < a \rightarrow E = 0$

$a < r < b \rightarrow E \cdot 2\pi r L = \frac{Q_{en}}{\varepsilon_0}$

$$E = \frac{Q}{2\pi r L \varepsilon_0} \hat{r}$$

$b < r < c$ debemos calcular $\vec{D}$

$$\vec{D} \cdot 2\pi r L = Q \quad \Rightarrow \vec{D} = \frac{Q}{2\pi r L} \hat{r}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{Q}{2\pi r L \varepsilon} \hat{r}$$

$r > c \quad Q_{en} = 0 \quad \Rightarrow E = 0.$

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & r<a \\ \dfrac{Q}{2\pi r L \varepsilon_0}\hat{r} & a<r<b \\ \dfrac{Q}{2\pi r L \varepsilon}\hat{r} & b<r<c \\ 0 & r>c \end{cases}$$

$$\vec{D} = \begin{cases} 0 & r<b \\ \dfrac{Q}{2\pi r L} & b<r<c \\ 0 & r>c. \end{cases}$$

b) $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = \varepsilon_0 \chi_e \dfrac{Q}{2\pi r L \varepsilon}$

c) Para ver la densidad de cargas de ligadura.

$\vec{\sigma}_b = \vec{P} \cdot \hat{n} \Rightarrow \hat{n} = \begin{cases} \hat{r} & r=c \\ -\hat{r} & r=b \end{cases}$

$$\sigma_b = \begin{cases} \vec{P}\cdot\hat{r}, \; r=c \Rightarrow & \sigma_+ = \dfrac{\varepsilon_0 \chi_e Q}{2\pi \varepsilon c L} \\ -\vec{P}\cdot\hat{r} \Rightarrow r=b & \sigma_- = -\dfrac{\varepsilon_0 \chi_e Q}{2\pi \varepsilon b L} \end{cases}$$

$$\rho_b = \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r P_r =$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\cancel{r}\frac{\varepsilon_0 \chi_e Q}{2\pi \varepsilon L \cancel{r}}\right) = 0$$

d) Para encontrar la capacitancia

$$V(a) - V(c) = -\int_c^a \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= -\int_c^b \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= \int_a^b \frac{Q}{2\pi r L \varepsilon_0} dr + \int_b^c \frac{Q}{2\pi r L \varepsilon} dr$$

$$= \frac{Q}{2\pi L}\left[\frac{1}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{\varepsilon}\ln\left(\frac{c}{b}\right)\right]$$

$$Q = CV$$

$$\Rightarrow \frac{C}{L} = \frac{2\pi \cancel{L}}{\frac{1}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{\varepsilon}\ln\left(\frac{c}{b}\right)} \frac{1}{\cancel{L}}$$

e) El trabajo necesario para ensamblar la configuración es

$$W = \frac{1}{2}\int \vec{D}\cdot\vec{E}\, dVol = \frac{1}{2}\left[\varepsilon_0 \int_a^b \vec{E}\cdot\vec{E}\, dVol + \epsilon \int_b^c \vec{E}\cdot\vec{E}\, dVol\right]$$

$$dVol = 2\pi r dr L$$

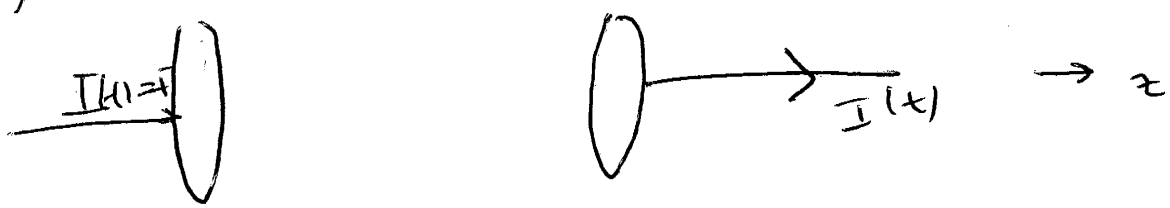
$$W = \frac{1}{2}\left[\int_a^b \varepsilon_0 \left(\frac{Q}{2\pi r \cancel{L} \varepsilon_0}\right)^2 \cdot \cancel{L}\, 2\pi r dr + \int_b^c \epsilon \left(\frac{Q}{\cancel{2\pi} r \cancel{L} \epsilon}\right)^2 \cancel{L}\, \cancel{2\pi} r dr\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{2\pi L}\left[\int_a^b \frac{\cancel{r} dr}{r^{\cancel{2}} \varepsilon_0} + \int_b^c \frac{\cancel{r} dr}{r^2 \epsilon}\right]$$

$$= \frac{Q^2}{4\pi L}\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{\epsilon}\ln\left(\frac{b}{c}\right)\right)$$

Problema 2

a)



$$Q(t) = \sigma(t) A = \sigma A$$

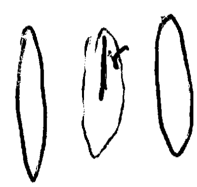
$$\vec{E} = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}$$

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow Q(t) = \int I_0 \, dt = I_0 t$$

$$Q(t) = \sigma(t) A = I_0 t \Rightarrow \sigma(t) = \frac{I_0 t}{A}$$

$\vec{E} = \dfrac{I_0 t}{A \varepsilon_0}$, para un área circular $A = \pi R^2$

$$\vec{E} = \frac{I t}{\pi R^2 \varepsilon_0} \hat{k}$$



b) $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{en} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{d\Phi_E}{dt}$

Entre las placas del capacitor

$$\Phi_E = \int E \, dA = \frac{I_0 t}{A \varepsilon_0} \int d\vec{A} = \frac{I_0 t}{\cancel{\pi} R^2 \varepsilon_0} \cancel{\pi} r^2 = \frac{I_0 t r^2}{R^2 \varepsilon_0}$$

$$I_{en} = 0$$

$$\oint B \cdot dl = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$

$$B \cdot 2\pi \cancel{r} = \mu_0 \frac{\varepsilon_0 I_0 r^{\cancel{2}}}{R^2 \varepsilon_0}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \cancel{\varepsilon_0} I_0 r}{2\pi R^2 \cancel{\varepsilon_0}} \hat{\varphi} = \frac{\mu_0 I_0 r}{2\pi R^2} \hat{\varphi}$$

c) $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$

$$= \frac{1}{\cancel{\mu_0}} \frac{I t}{\pi R^2 \varepsilon_0} \frac{\cancel{\mu_0} I r}{2\pi R^2} \hat{k} \times \hat{\varphi} = \frac{I^2 t}{2\varepsilon_0 (\pi R^2)^2} r (-\hat{r})$$

d) La densidad de energía almacenada esta dada por.

$$u_{em} = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right)$$

$$u_{em} = \frac{1}{2} \left[\varepsilon_0 \left(\frac{I t}{\pi R^2 \varepsilon_0} \right)^2 + \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\mu_0 I_0 r}{2\pi R^2} \right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \frac{I^2}{(\pi R^2)^2} \left[\frac{t^2}{\varepsilon_0} + \frac{\mu_0 r^2}{2^2} \right]$$

e) Para verificar que la energía se conserva veamos

$$\frac{\partial}{\partial t} U_{em} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{S}$$

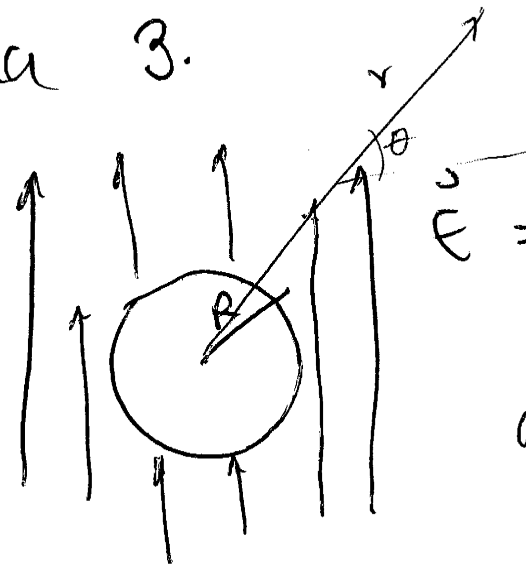
$$\frac{\partial}{\partial t} U_{mem.} = \frac{I^2 t}{(\pi R^2)^2 \varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{S} = \frac{-I^2 t^2}{2\varepsilon_0 (\pi R^2)^2} \quad \vec{\nabla}\cdot(\cancel{s} \hat{r})$$

$$\vec{\nabla}\cdot(r\hat{r}) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r^2 = \frac{2\cancel{r}}{\cancel{r}}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{S} = -\frac{I^2 t}{\varepsilon_0 (\pi R^2)^2}$$ por tanto la energía se conserva.

Problema 3.



$\vec{E} = E_0 \hat{z}$

a) $V(r,\theta) = \sum \left(A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} \right) P_\ell(\cos\theta)$

b) Condiciones de frontera.

1) Potencial debe ser continuo.

$V_{out}(R) = V_{in}(R) = 0$

2) Para $r \to \infty$

$V \approx -E_0 r\cos\theta = -\vec{r}\cdot\vec{E} = -E_0 r\cos\theta$.

c) De la condición de frontera 1

$A_\ell R^\ell + \frac{B_\ell}{R^{\ell+1}} = 0 \Rightarrow A_\ell = -\frac{B_\ell}{R^{2\ell+1}}$

$B_\ell = -A_\ell R^{2\ell+1}$

de la condición de frontera 2 tenemos

$$r \to \infty \Rightarrow \frac{1}{r^{l+1}} \to 0 \quad \text{y tenemos}$$

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l (r^l) P_l(\cos\theta) = -E_0 r \cos\theta.$$

integrando a ambos lados y usando la ecuación de ortonormalidad

$$\sum_{l=0}^{\infty} \int A_l r^l P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta) \sin\theta d\theta = -E_0 r \int P_{l'}(\cos\theta) \underbrace{\cos\theta}_{P_1(\cos\theta)} \sin\theta d\theta$$

$$A_1 \cancel{r} \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}l+1} = -\delta_{l'1} \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}l+1} E_0 \cancel{r}$$

$$A_1 = -E_0$$

$$l \neq 1 \Rightarrow A_l = 0$$

usando esto podemos escribir el potencial en cualquier punto del espacio como.

$$V(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell \left(r^\ell + \frac{R^{2\ell+1}}{r^{\ell+1}} \right) P_\ell(\cos\theta)$$

como $\ell = 1$, $A_\ell = -E_0$

$$V(r,\theta) = -E_0 \left(r + \frac{R^3}{r^2} \right) \cos\theta \qquad \forall r$$

cuando $r < R$ el ~~super~~ potencial dentro de la esfera conductora es igual al de la superficie

$R = r$.

$V(R,\theta) = 0 \rightarrow$ de la condición de frontera 1.

d) la densidad superficial de casa esta dada por

$$\sigma(\theta) = -\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial r}\bigg|_{r=R} = +E_0 \left(1 + 2\frac{\cancel{R^3}}{\cancel{r^3}} \right) \cos\theta$$

$$= +3E_0 \cos\theta \cdot \varepsilon_0 .$$ //

Problema 4

$$V(r,\theta,t) = \frac{-p_0\omega}{4\pi\varepsilon_0 c}\left(\frac{\cos\theta}{r}\right)\sin\left[\omega\left(t-r/c\right)\right]$$

$$\vec{A} = \frac{-\mu_0 p_0\omega}{4\pi r}\sin\left[\omega\left(t-r/c\right)\right]\hat{k}$$

a) $$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\hat{\theta}$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{p_0\omega}{4\pi\varepsilon_0}\cos\theta\left(\frac{-1}{r^2}\sin\left[\omega\left(t-r/c\right)\right] - \frac{\omega}{c}\frac{1}{r}\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\right)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} = \frac{p_0\omega}{c4\pi\varepsilon_0 r^2}\sin\theta\sin\left[\omega\left(t-r/c\right)\right]$$

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{-\mu_0 p_0\omega^2}{4\pi r}\cos\left[\omega\left(t-r/c\right)\right]\hat{k}$$

$\hat{k} = \cos\theta\,\hat{r} - \sin\hat{\theta}$ y tomando el límite

$r \gg \omega/c \Rightarrow 1/r^2 \to 0$ tenemos

$$\vec{E} = -\frac{p_0\omega^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\cos\theta}{r}\cos[\omega(t-r/c)]\,\hat{r} + \frac{\mu_0 p_0\omega^2}{4\pi r}\cos(\omega(t-r/c))(\cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta})$$

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0 p_0\omega^2}{4\pi r}\sin\theta\cos(\omega(t-r/c))\,\hat{\theta}$$

b) $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\varphi$$

$$\vec{A} = \frac{-\mu_0 p_0\omega}{4\pi r}\sin[(\omega(t-r/c))](\cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta})$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) = \frac{\mu_0 p_0\omega}{4\pi}\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}[\sin[\omega(t-r/c)]]$$

$$= -\frac{\mu_0 p_0\omega^2}{4\pi c}\sin\theta\cos[\omega(t-r/c)]$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}A_r = -\frac{\mu_0 p_0\omega}{4\pi r}\sin[\omega(t-r/c)](-\sin\theta)$$

$$\vec{B} = \frac{1}{r}\left[-\frac{\mu_0 p_0\omega^2}{4\pi c r}\sin\theta\cos[\omega(t-r/c)] - \cancel{\frac{\mu_0 p_0\omega}{4\pi r^2}}\sin[\omega(t-r/c)]\sin\right.$$

$\to 0$

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 P_0 \omega^2}{4\pi c r} \sin\theta \cos[\omega(t - r/c)]\,\hat{\varphi}$$

c) $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$

Valor medio $\frac{1}{2}$

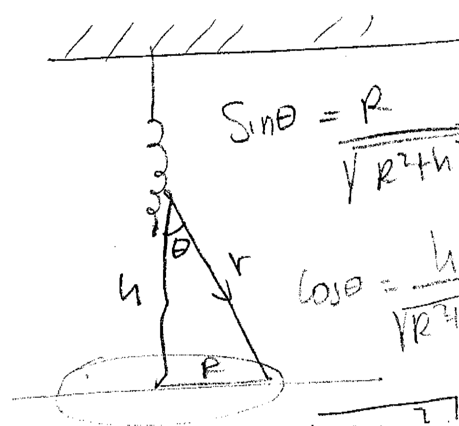
$$= \frac{\mu_0 P_0^2 \omega^4}{(4\pi)^2 c r^2} \sin^2\theta \cos^2[\omega(t - r/c)]$$

$\langle \vec{S} \rangle \frac{\mu_0}{c}\left(\frac{P_0\omega^2}{4\pi r}\right)^2 \sin^2\theta \, \frac{1}{2}\hat{r} \Rightarrow$ Intensidad total en un ciclo

d) Para ver la intensidad de la radiación que golpea el piso veamos

$I_f = \langle \vec{S} \rangle \cdot \hat{k} =$

Para este caso particular



$\sin\theta = \frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}}$

$\cos\theta = \frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}$

$r = \sqrt{R^2+h^2}$

$$\hat{k} = \cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}$$

$$I_{floor} = \frac{1}{2}\frac{\mu_0}{c}\left(\frac{P_0\omega^2}{4\pi r}\right)^2 \sin^2\theta \cdot \cos\theta$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\mu_0}{c}\left(\frac{P_0\omega^2}{4\pi}\right)^2 \frac{R^2 h}{(R^2+h^2)^{5/2}}$$

e) la intensidad es máxima

$$\frac{dI}{dR} = 0$$

$$\frac{dI}{dr} = \text{cte}\left[\frac{2Rh}{[R^2+h^2]^{5/2}} + R^2h\left(-\frac{5}{2}\right)\frac{2R}{(R^2+h^2)^{7/2}}\right] = 0$$

$$= \frac{1}{(R^2+h^2)^{7/2}}\left[2Rh(R^2+h^2) - 5R^3h\right] = 0$$

$$2\cancel{R}^3h + 2Rh^3 - 5R^3h$$

$$2h^2 = 3R^2 \Rightarrow R = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\,h.$$

f) Potencia total irradiada sobre el piso

$$P = \int \langle S \rangle \cdot d\vec{A}$$

$$dA = 2\pi R\,dR$$

$$P = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c}\int_0^\infty \frac{R^2 h}{(R^2+h^2)^{5/2}} \cdot 2\pi R\,dR$$

$$= \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c}\, h \cdot 2\pi\, \frac{2}{3h} = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega_0^4}{24\pi c}.$$

Mecánica Analítica 2017-01

1. Problema 1 (20 puntos).

   Considere un péndulo ideal suspendido desde el techo de un tren que se mueve con aceleración constante (movimiento unidimensional).

   - Deduzca el Lagrangiano que describe el movimiento del péndulo (5 puntos).
   - Deduzca las ecuaciones de Lagrange correspondientes (5 puntos).
   - Existe algún ángulo de equilibrio? (5 puntos).
   - En caso afirmativo, estudie pequeñas oscilaciones alrededor de dicho ángulo y calcule la frecuencia de oscilación (5 puntos).

2. Problema 2 (30 puntos)

   - Defina transformación canónica (6 puntos).
   - Para una transformación canónica, defina lo que es una función generatriz (6 puntos).
   - Obtenga la ecuación de movimiento para un sistema cuyo Lagrangiano viene dado por $L = e^{bt/2m}\left(\frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{k}{2}q^2\right)$, con $b, k, m \in \mathcal{R}$. (6 puntos).
   - Obtenga el Hamiltoniano (6 puntos).
   - Encuentre una transformación canónica que pase a un Hamiltoniano constante en función del tiempo (6 puntos).

3. Problema 3 (30 puntos)

- Defina función principal de Hamilton (7 puntos).
- Deduzca la ecuación de Hamilton–Jacobi para un oscilador armónico unidimensional (7 puntos).
- Escriba una posible solución de dicha ecuación (8 puntos).
- Evalúen la variable de acción, J, para un oscilador armónico unidimensional (8 puntos).

4. Problema 3 (20 puntos). Considere el Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) - U(r). \tag{1}$$

- Demuestre que L es invariante bajo las transformaciones $\tilde{r}(\sigma) = r$ y $\tilde{\phi}(\sigma) = \phi + \sigma$ (10 puntos).
- Utilizando el teorema de Noether, encontrar la cantidad conservada (10 puntos).

Problema 1 (~~[illegible]~~ (20 puntos)

Número de grados de libertad: 1 (péndulo). El tren circula con a constante. Tomamos el origen en el techo del cual pende la masa.
La coordenada generalizada es $q = \theta$.

Coordenadas inerciales de la masa

$$x = \frac{1}{2} a t^2 + l \sin\theta$$

$$y = -l \cos\theta$$

Tomamos $t_0 = x_0 = v_0 = 0$.

Velocidades inerciales cartesianas:

$$\dot{x} = at + l\dot{\theta}\cos\theta$$

$$\dot{y} = \dot{\theta} l \sin\theta$$

El Lagrangiano es

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy =$$

$$= \frac{1}{2} m (at + l\dot{\theta}\cos\theta)^2 + \frac{1}{2} m\dot{\theta}^2 l^2 \sin^2\theta + mgl\cos\theta =$$

$$= \frac{1}{2} ma^2t^2 + \frac{1}{2} ml^2\dot{\theta}^2 + matl\dot{\theta}\cos\theta + mgl\cos\theta$$

Ecuaciones de Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = -matl\dot{\theta}\sin\theta - mgl\sin\theta -$$

$$- \frac{d}{dt}\left(ml^2\dot{\theta} + matl\cos\theta\right)$$

$$= -matl\dot{\theta}\sin\theta - mgl\sin\theta - ml^2\ddot{\theta} - mal\cos\theta + matl\dot{\theta}\sin\theta$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{a}{l}\cos\theta + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

Punto de equilibrio : $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$

Ángulo de equilibrio, θ_e :

$$\frac{a}{\ell}\cos\theta_e + \frac{g}{\ell}\sin\theta_e = 0 \Rightarrow \tan\theta_e = -\frac{a}{g}$$

Pequeñas oscilaciones alrededor de θ_e

$$\eta := \theta - \theta_e \qquad (|\eta| \ll 1)$$

Ecuación de movimiento + condición equilibrio +

+ $\sin\eta \simeq \eta$:

$$\ddot{\eta} + \frac{a}{\ell}\cos(\eta + \theta_e) + \frac{g}{\ell}\sin(\eta + \theta_e) =$$

$$= \ddot{\eta} + \frac{a}{\ell}(\cos\eta\cos\theta_e - \sin\eta\sin\theta_e) +$$

$$+ \frac{g}{\ell}(\sin\eta\cos\theta_e + \cos\eta\sin\theta_e) =$$

$$= \ddot{\eta} + \left(\frac{a}{\ell}\cos\theta_e + \frac{g}{\ell}\sin\theta_e\right)\cos\eta +$$

$$+ \left(-\frac{a}{\ell}\sin\theta_e + \frac{g}{\ell}\cos\theta_e\right)\sin\eta = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\eta} + \left(\frac{a}{\ell}\sin\theta_e - \frac{g}{\ell}\cos\theta_e\right)\eta = 0$$

Péndulo simple. Frecuencias de oscilación:

$$a \cos\theta_e + g \sin\theta_e = 0$$

$$\cos^2\theta_e + \sin^2\theta_e = 1$$

$$\cos\theta_e = \frac{g}{\sqrt{g^2+a^2}} \quad ; \quad \sin\theta_e = -\frac{a}{\sqrt{g^2+a^2}}$$

La ecuación queda

$$\ddot{\eta} + w^2\eta = 0 \qquad \text{con} \qquad w^2 = \frac{\sqrt{g^2+a^2}}{l}.$$

Problema 2 (30 puntos)

Sea $H(q,p,t)$ un Hamiltoniano tal que

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad ; \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

Decimos que una transformación en el espacio de fases,

$$Q = Q(q,p)$$
$$P = P(q,p)$$

es canónica cuando $\exists$ un Hamiltoniano

$H'(Q, P, t)$ tal que

$$H'(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F}{\partial t}$$ con Q y P

variables canónicas :

$$\dot{P} = -\frac{\partial H'}{\partial Q} \quad ; \quad \dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial P} .$$

F es la función generatriz construida como

$$dF_1(q, Q, t) = p\,dq - P\,dQ$$
$$dF_2(q, P, t) = p\,dq + Q\,dP$$
$$dF_3(p, Q, t) = -q\,dp - P\,dQ$$
$$dF_4(p, P, t) = -q\,dp + Q\,dP$$

La ecuación de movimiento para el Lagrangiano

$$L = e^{\frac{bt}{m}}\left(\frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{k}{2}q^2\right) \qquad b, m \in \mathbb{R}$$

es

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{bt}{m}} m\dot{q}\right) + e^{\frac{bt}{m}} Kq = 0$$

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + Kq = 0$$

El Hamiltoniano lo calculamos como

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = e^{\frac{bt}{m}} m\dot{q}$$

$$\dot{q} = e^{-bt/m} \frac{p}{m} \quad , \quad \text{luego}$$

$$H = e^{-bt/m} \frac{p^2}{2m} + e^{bt/m} \frac{Kq^2}{2}$$

H NO es una constante del movimiento.

Para encontrar una transformación canónica (de tipo 2) que pase a un Hamiltoniano constante, tomamos:

$$F_2(q, \hat{p}, t) = e^{\frac{bt}{2m}} q\hat{p}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial q} = e^{bt/2m}\hat{p} = p$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \hat{p}} = e^{bt/2m} q = \hat{q}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} = \frac{b}{2m} e^{bt/2m} q\hat{p}$$

las nuevas variables son

$$\hat{p} = e^{-bt/2m} p$$
$$\hat{q} = e^{bt/2m} q$$

y el nuevo H es

$$\hat{H}(\hat{q}, \hat{p}) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{K\hat{q}^2}{2m} + \frac{b}{2m}\hat{q}\hat{p}$$ (30 puntos)

Problema 3

La función principal de Hamilton es una función generatriz de segunda especie $S(q, P, t)$ tal que

$$H' = H + \frac{\partial S(q, P, t)}{\partial t} = 0$$

$$P = \frac{\partial S}{\partial q}$$

$$Q = \frac{\partial S}{\partial P}$$

Como $H'=0$, todas las coordenadas son cíclicas y sus momentos conjugados son constantes: $P = \alpha$.

H-J:
$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Si H no depende explícitamente del tiempo

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Para un oscilador armónico unidimensional:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2$$, luego

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 = 0$$

Como dicha ecuación no contiene t explícitamente, hacemos el cambio

$$S(q,t) = S'(q,E) - Et$$ y queda

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S'}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 = E \, .$$

Resolvemos la ecuación:

$$S' = \int \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2}\, dq =$$

$$= \frac{E}{\omega}\left(\arcsin \frac{m\omega q}{\sqrt{2mE}} + \frac{m\omega q}{\sqrt{2mE}} \left[1 - \left(\frac{m\omega q}{\sqrt{2mE}}\right)^2 \right]^{1/2} \right)$$

La integral se hace así:

$$S' = \int \sqrt{2mE - m^2 w^2 q^2}\, dq$$

$$q := \sin\theta \sqrt{2mE}\, \frac{1}{mw}$$

$$S' = \int \sqrt{2mE - 2mE \sin^2\theta}\, \frac{\sqrt{2mE}}{mw} \cos\theta \, d\theta$$

$$= \int \sqrt{2mE} \cos\theta \frac{\sqrt{2mE}}{mw} \cos\theta \, d\theta$$

$$= \frac{2E}{w} \int \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} d\theta = \frac{E}{w} \left(\theta + \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right)$$

y después se deshace el cambio efectuado.

Definimos la variable de acción como

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint_{\substack{\text{período} \\ \text{completo}}} p\, dq$$

Para nuestro oscilador armónico:

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint p\, dq = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial S'}{\partial q} dq$$

$$= \frac{\sqrt{2m}}{2\pi} \oint dq \sqrt{E - \frac{1}{2} m\omega^2 q^2} =$$

$$= \frac{E}{\omega}$$

de nuevo un cambio:

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin\theta$$

Problema 4 (20 puntos)

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - U(r)$$

Teorema. Consideren las transformaciones continuas de las coords. generalizadas que dependen de un parámetro real, α:

$$\tilde{q}_i = f_i(\tilde{q}_j, t, \sigma) = \tilde{q}_i(q_j, t, \sigma),$$

donde σ se varía de manera continua desde σ_0 tal que $\sigma = \sigma_0 \Rightarrow f_i = \tilde{q}_i = q_i$.

Si el lagrangiano de un sistema, $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ es invariante bajo las transformaciones anteriores:

$$\tilde{L}[\tilde{q}_i(q_i, t, \sigma), \dot{\tilde{q}}_i(\dot{q}_i, t, \sigma), t] = L(q_i, \dot{q}_i, t)$$

(no hay dependencia de σ), entonces se tiene una cantidad conservada, I, asociada con dicha simetría por cada parámetro σ de la transformación.

$$I_i = \sum_{j=1}^{s} p_j \left.\frac{d\tilde{q}_j}{d\sigma_i}\right|_{\sigma_i=\sigma_0} = \text{cte} \quad (**)$$

Para nuestro lagrangiano, las coords. generalizadas son r y φ ($s=2$ grados de libertad). Para $\sigma=0$, las transformaciones dadas son la transf. identidad.

Sustituimos las transformaciones en el lagrangiano:

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{\tilde{r}}^2 + \tilde{r}^2\dot{\tilde{\varphi}}^2\right) - V(\tilde{r})$$

$$= \frac{1}{2}m\left\{\dot{r}^2 + r^2\left(\frac{d}{dt}(\varphi+\sigma)\right)^2\right\} - V(r)$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - V(r)$$

De (**) se tiene que:

$$I = \sum_{j=1}^{s=2} p_j \frac{d\tilde{q}_j}{d\sigma}\bigg|_{\sigma=0} = \sum_{j=1}^{s=2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\tilde{q}_j}{d\sigma}\bigg|_{\sigma=0}$$

$$= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \frac{d\tilde{r}}{d\sigma}\bigg|_{\sigma=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \frac{d\varphi}{d\sigma}\bigg|_{\sigma=0}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \dot{r}}\left(\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - V(r)\right)\frac{dr}{d\sigma}\bigg|_{\sigma=0} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}\left(\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - V(r)\right)\frac{d}{d\sigma}(\varphi+\sigma)\bigg|_{\sigma=0}$$

$$= mr^2\dot{\varphi} = \text{constante}.$$