Examen de Conocimientos de Doctorado
Electromagnetismo
Horario: 2PM-5PM. enero 14/ 2025

Nombre: ______________________________

Código: ____________________

Sección pregrado
Responder únicamente 2 preguntas

1. (**PREGRADO 20 puntos**) Considere una carga puntual, q, moviéndose con una velocidad, $\vec{v}$, y una aceleración, $\vec{a}$.

   a) (**7 puntos**)En este caso, el flujo de energía que deja la carga, $\frac{dW}{dt_r} = dP_{part}$, y el flujo de energía que atraviesa una esfera de radio $\tilde{r}$, $\frac{dW}{dt} = dP_{rad}$, están relacionados por

   $$\frac{dW}{dt_r} = \frac{dW}{dt}\frac{dt}{dt_r}, \tag{1}$$

   donde $t_r = t - \frac{\tilde{r}}{c}$ es el tiempo de retardo. Teniendo en cuenta que $\frac{dt}{dt_r} = \frac{\vec{\tilde{r}}\cdot\vec{u}}{c\tilde{r}}$ con $\vec{u} = c\hat{\tilde{r}} - \vec{v}$, demuestre que

   $$dP_{part} = \frac{1}{\mu_0 c}|\vec{E}_{rad}|^2\tilde{r}^2 d\Omega\left(\frac{\hat{\tilde{r}}\cdot\vec{u}}{c\tilde{r}}\right), \tag{2}$$

   con $d\Omega$ la unidad de angulo sólido y $\vec{E}_{rad}$ el campo de radiación.

   b) (**7 puntos**) Teniendo en cuenta que solo los campos que tienen en cuenta la aceleración representan radiación, demuestre que

   $$\frac{dP_{part}}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0}\frac{|\hat{\tilde{r}}\times(\vec{u}\times\vec{a})|^2}{(\hat{\tilde{r}}\cdot\vec{u})^5}. \tag{3}$$

   c) (**6 puntos**) Si la carga q se mueve de tal manera que su velocidad, $\vec{V}$, y su aceleración, $\vec{a}$, son perpendiculares, la distribución angular de la potencia radiada por dicha carga en un segmento de área está dada por

   $$\frac{dP_{part}}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2}\frac{a^2\mu_0}{c}\frac{[(1-\beta cos\theta)^2 - (1-\beta^2)sin^2\theta cos^2\phi]}{(1-\beta cos\theta)^5}, \tag{4}$$

donde θ y ϕ denotan los ángulos polar y azimutal, respectivamente y $\beta = \frac{v}{c}$. Para el caso relativista en el que $\beta \approx 1$, dibuje un diagrama de la potencia radiada. Considere un eje de coordenadas tal que $\vec{v} = v\hat{z}$, $\vec{a} = a\hat{x}$. ¿qué nombre recibe este tipo de radiación?

2. (**PREGRADO 20 puntos**) Considere los potenciales

$$V(\vec{r},t) = 0 \qquad\qquad \vec{A}(\vec{r},t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qt}{|\vec{r}|^2}\hat{r} \tag{5}$$

a) **(7 puntos)** encuentre el campo eléctrico y el campo magnético correspondientes. Comente sobre sus resultados.

b) **(7 puntos)** encontrar la carga y la distribución de corriente responsables de generarlos. Comente sobre sus resultados.

c) **(6 puntos)** si se usa la función gauge $\lambda = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qt}{|\vec{r}|}$ para transformar los potenciales, ¿Cuáles son las consecuencias físicas y matemáticas?

3. (**PREGRADO 20 puntos**) Una esfera conductora de radio a está recubierta con una capa aislante que tiene una constante dieléctrica ϵ_r. El radio de la esfera más la capa resulta ser b. Si la esfera se coloca en un campo eléctrico constante, $\vec{E}_0$.

a) (**15 puntos**) ¿Cuál es el potencial en la capa aislante?

b) (**5 puntos**) ¿Cuál es el campo eléctrico en la capa aislante?

Sección posgrado
Responder únicamente 2 preguntas

4. (**POSGRADO 30 puntos**) A partir de las ecuaciones de Maxwell en forma covariante,

$$\begin{aligned} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} &= \mu_0 J^\beta \\ \partial_\alpha \mathcal{F}^{\alpha\beta} &= 0, \end{aligned} \tag{6}$$

donde $F^{\alpha\beta}$ es el tensor de los campos y $\mathcal{F}^{\alpha\beta}$ es su dual, encuentre las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial.

5. (**POSGRADO 30 puntos**) la energía de un sistema de partículas y campo electromagnético está dada por

$$H = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \vec{v}_\alpha^2 + \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\vec{r}[\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2], \tag{7}$$

donde m denota la masa y $\vec{v}$ la velocidad de las partículas. Demuestre que esta cantidad es una constante de movimiento. Para esto siga los siguientes pasos:

   a) (**10 puntos**) usando las ecuaciones de Maxwell y la fuerza de Lorentz demuestre que

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \sum_\alpha q_\alpha \vec{v}_\alpha \cdot \vec{E}(\vec{r}_\alpha, t) - \int d^3\vec{r}\vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) \\ &+ \frac{1}{\mu_0} \int d^3\vec{r}[\vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) - \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t)], \end{aligned} \tag{8}$$

   con $\vec{J}$ siendo la densidad de corriente y q la carga de las partículas.

   b) (**10 puntos**) escribiendo $\vec{J}(\vec{r}, t)$ en función de las variables de las partículas, i.e.,

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \sum_\alpha q_\alpha \vec{v}_\alpha(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_\alpha), \tag{9}$$

   calcule $\int d^3\vec{r}\vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{J}(\vec{r}, t)$.

   c) (**10 puntos**) Finalmente, calcule $\int d^3\vec{r}[\vec{E} \cdot \nabla \times \vec{B} - \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{E}]$, considerando campos que son cero en el infinito, y utilice los resultados de los apartados anteriores para finalizar la demostración.

6. (**POSGRADO 30 puntos**). Considere un electrón como un oscilador con frecuencia natural ω_0, amortiguado (constante de amortiguamiento γ) y bajo la influencia de una fuerza armónica debida a un campo eléctrico $E_{0x}cos(\omega t)$. La ecuación de movimiento es entonces

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + m\gamma\frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = qE_{0x}cos(\omega t). \tag{10}$$

Para elucidar la física detrás de este modelo es conveniente considerar la solución a la ecuación de movimiento tomando en cuenta una ecuación compleja. En este caso la solución compleja de $x(t)$ se puede escribir como

$$\tilde{x}(t) = \frac{q}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}E_{0x}e^{-i\omega t}. \tag{11}$$

a) (**10 puntos**) ¿cuál es entonces el momento dipolar complejo, $\tilde{p}(t)$ para el electrón? Si hay N moléculas por unidad de volumen ¿cuál es entonces la polarización compleja, $\tilde{P}(t)$ para el electrón?

b) (**10 puntos**) En general, los electrones en una molécula tienen diferentes frecuencias naturales, $\omega_0 \rightarrow \omega_j$, y diferentes coeficientes de amortiguamiento, $\gamma \rightarrow \gamma_j$, por lo tanto, al considerar f_j como el número de electrones, con frecuencia ω_j y amortiguamiento γ_j, por molécula, la constante dieléctrica compleja, $\tilde{\epsilon}_r = \frac{\tilde{\epsilon}}{\epsilon_0}$, puede escribirse como

$$\tilde{\epsilon}_r = 1 + \frac{Nq^2}{m\epsilon_0}\sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega}. \tag{12}$$

Si la fracción f_0 corresponde a electrones libres en el sentido que su frecuencia natural es $\omega_0 = 0$, demuestre que si se exhibe explícitamente la parte correspondiente a los electrones libre, la permitividad compleja queda

$$\tilde{\epsilon} = \tilde{\epsilon}_b(\omega) + i\frac{Nq^2 f_0}{m\omega(\gamma_0 - i\omega)}, \tag{13}$$

donde $\tilde{\epsilon}_b(\omega)$ es la contribución que viene de todos los otros electrones y el segundo término es la contribución de los electrones libres. Escriba la expresión explicita de $\tilde{\epsilon}_b(\omega)$.

c) (**10 puntos**) considere la ley de Ampere-Maxwell y un medio que sigue la ley de Ohm $\vec{J} = \sigma\vec{E}$ y cumple $\vec{D} = \tilde{\epsilon}_b\vec{E}$. Para el caso en que $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$ se tiene que

$$\nabla \times \vec{H} = -i\omega(i\frac{\sigma}{\omega} + \tilde{\epsilon}_b)\vec{E}. \tag{14}$$

Esta ecuación tiene la misma forma que la ley de Ampere, en el dominio de la frecuencia, para el caso en que no hay fuentes de carga. Por lo tanto, el término en paréntesis se puede asociar a una permitividad compleja. En este caso, demuestre que

$$\sigma = \frac{Nq2f_0}{m(\gamma_0 - i\omega)} \tag{15}$$

lo que es esencialmente el modelo de Drude de la conductividad.

Información útil
Electrodinámica
Horario: 2PM-5PM. enero 14/ 2025

1. Ecuaciones de Maxwell

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot\vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{B} &= 0 \\
\vec{\nabla}\times\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\
\vec{\nabla}\times\vec{B} &= \mu_0\vec{J}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}
\end{aligned}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_{free}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}_{free}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Para un medio lineal:

$$\begin{aligned}
\vec{D}(\vec{r}) &= \epsilon_0\vec{E}+\vec{P} \\
\vec{P} &= \epsilon_0\chi_e\vec{E}
\end{aligned}$$

Los campos de una carga puntual q en movimiento están dados por

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\tilde{r}}{(\vec{\tilde{r}}\cdot\vec{u})^3}[(c^2-v^2)\vec{u}+\vec{\tilde{r}}\times(\vec{u}\times\vec{a})] \qquad \vec{B}(\vec{r},t)=\frac{1}{c}\hat{\tilde{r}}\times\vec{E}(\vec{r},t)$$

El vector de Poynting se puede expresar como

$$\vec{S}(\vec{r},t)=\frac{1}{\mu_0 c}|\vec{E}(\vec{r},t)|^2\hat{\tilde{r}} \tag{16}$$

2.

$$F^{\alpha\beta}=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & -B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{F}^{\alpha\beta}=\begin{bmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & \frac{E_z}{c} & -\frac{E_y}{c} \\ B_y & -\frac{E_z}{c} & 0 & \frac{E_x}{c} \\ B_z & \frac{E_y}{c} & -\frac{E_x}{c} & 0 \end{bmatrix}$$

3. Fuerza magnética y campo magnético de dipolos.

$$\vec{B}=\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{1}{r^3}\left[3(\vec{m}_1\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}-\vec{m}_1\right]$$

$$\vec{F} = \nabla(\vec{m}_2\cdot\vec{B})$$

4. Condiciones de frontera

$$D^{\perp}_{above} - D^{\perp}_{below} = \sigma_f \qquad \vec{D}^{\parallel}_{above} - \vec{D}^{\parallel}_{below} = \vec{P}^{\parallel}_{above} - \vec{P}^{\parallel}_{below} \tag{17}$$

5. Solución a ecuación de Laplace en coordenadas esféricas y con simetría azimutal

$$\psi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{(l+1)}})P_l(cos\theta) \tag{18}$$

6. matématicas útiles

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} &= 4\pi\delta(\vec{r}) \\ \nabla\frac{1}{r} &= \frac{-\hat{r}}{r^2} \end{aligned}$$

7. Polinomios de Legendre

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$
$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn}$$

n	$P_n(x)$
0	1
1	x
2	$(3x^2-1)/2$
3	$(5x^3-3x)/2$
4	$(35x^4-30x^2+3)/8$
5	$(63x^5-70x^3+15x)/8$

(a) $\bar{E} = -\nabla V - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$

$$= 0 - \frac{\partial}{\partial t}\left[-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qt}{r^2}\hat{r}\right]$$

$$\boxed{\bar{E}(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}}$$

- $\bar{B} = \nabla \times \bar{A}$ $\qquad \boxed{\bar{B} = 0}$

$= 0$ ya que A_r solo depende de r.

Estos campos son soluciones validas para una carga puntual, q, en el origen. Sin embargo, los potenciales son diferentes a los estudiados en electrostatica.

(b) utilizando maxwell eqs

- $\nabla \cdot \bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$$\nabla \cdot \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \right] = \rho/\varepsilon_0$$

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) = \rho/\varepsilon_0$$

$$\frac{q}{\cancel{4\pi}\cancel{\varepsilon_0}} \left(\cancel{4\pi} \delta^3(\bar{r}) \right) = \frac{\rho}{\cancel{\varepsilon_0}} \Rightarrow \boxed{\rho(r) = q\,\delta^3(\bar{r})}$$

Tiene sentido con el hecho q' $\bar{E}$ es el de una carga Puntual en el origen.

- $\nabla \times \bar{B} = \mu_0 \bar{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$

$$0 = \mu_0 \bar{J} + \mu_0 \varepsilon_0 (0)$$

$$\boxed{\bar{J} = 0}$$

$$\lambda = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qt}{r}$$

$$V' = V - \frac{\partial \lambda}{\partial t}$$

$$V' = V - \left(-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}\right)$$

$$= 0 + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}$$

$$\boxed{V' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}}$$

$$\bar{A}' = \bar{A} + \nabla\lambda$$

$$\bar{A}' = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{t}{r^2}\hat{r} - \frac{qt}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{t}{r^2}\hat{r} - \frac{qt}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{\hat{r}}{r^2}\right)$$

$$= 0$$

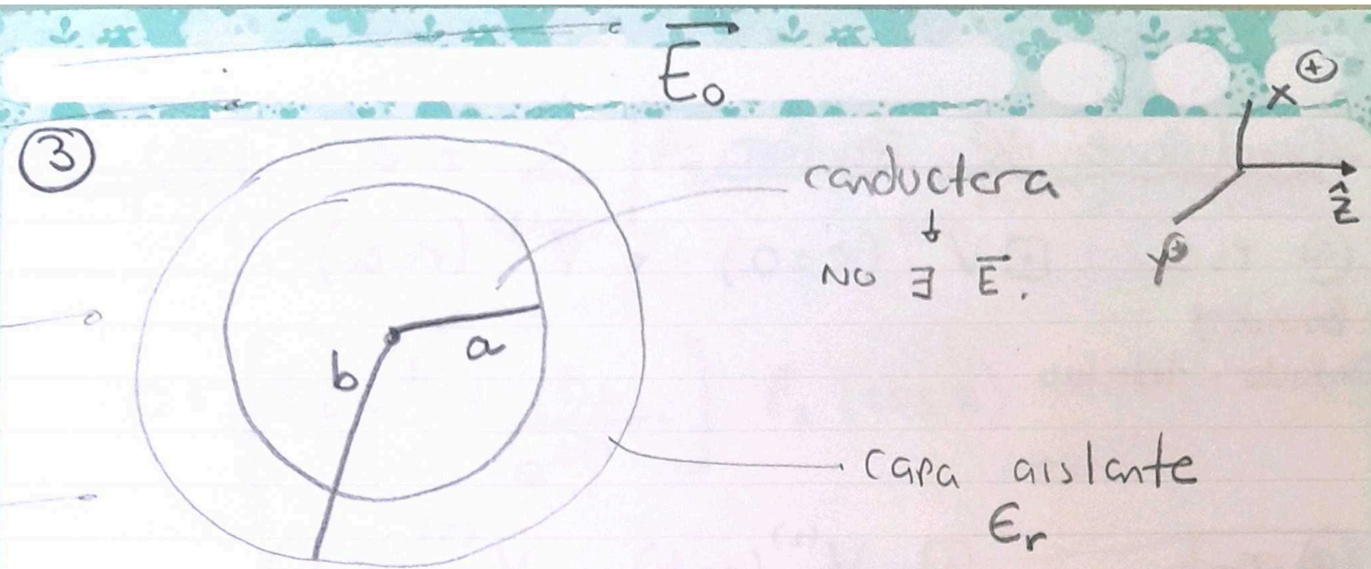
$$\boxed{\bar{A}' = 0}$$

Estos son los potenciales que son usados tipicamente en electrostatica.

Es decir diferentes potenciales, (V y $\bar{A}$) y (V' y A'), producen los mismos campos. Pero los potenciales no están definidos de manera unica.

$\vec{E}_0$

3



a) Resolver $\nabla^2 V = 0$ (ec. de laplace) en coordenadas esfericas con simetria azimuthal.

$\boxed{r<a}$ $\quad V^{(1)}(\bar{r}) = cte = 0$

$\boxed{a<r<b}$ $\quad V^{(2)}(\bar{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right] P_l(\cos\theta)$

$\boxed{r>b}$ $\quad -\nabla V = \vec{E}_0 \qquad \bar{E}_0 = E_0 \hat{z}$

$-\nabla V = E_0 \hat{z}$

$V = -E_0 z$ (cartesianas)

$V = -E_0 r\cos\theta$ (esfericos).

$$V^{(3)}(r) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\tilde{B}_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta) - E_0 r\cos\theta.$$

Condiciones de Frontera:

@ $r=a$ $\boxed{\cdot}$ $V^{(1)}(r=a) = V^{(2)}(r=a)$

Boundary

Conductor - dielectric

@ $r=b$ $\boxed{\cdot}$ $V^{(2)}(r=b) = V^{(3)}(r=b)$

Boundary

dielectric - dielectric

$\boxed{\cdot}$ $\varepsilon \dfrac{\partial V^{(2)}}{\partial r}\bigg|_{r=b} = \varepsilon_0 \dfrac{\partial V^{(3)}}{\partial r}\bigg|_{r=b}$

$\boxed{@\ r=a}$ $$0 = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l a^l + \frac{B_l}{a^{l+1}} \right] P_l(\cos\theta)$$

$$0 = \left[A_l a^l + \frac{B_l}{a^{l+1}} \right] P_l(\cos\theta)$$

$$A_l a^l = -\frac{B_l}{a^{l+1}} \qquad \boxed{B_l = -A_l a^{2l+1}} \quad (*)$$

$\boxed{@\ r=b}$ $$\sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l b^l + \frac{B_l}{b^{l+1}} \right] P_l(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\tilde{B}_l}{b^{l+1}} P_l(\cos\theta) - E_0 b \cos\theta$$

Note que $P_1(\cos\theta) = \cos\theta \Rightarrow$

Para $l = 1$

$$\left[A_1 b + \frac{B_1}{b^2} \right] P_1(\cos\theta) = \frac{\tilde{B}_1}{b^2} P_1(\cos\theta) - E_0 b P_1(\cos\theta)$$

$$\left(A_1 b + \frac{B_1}{b^2} = \frac{\tilde{B}_1}{b^2} - E_0 b \right) \quad (\Delta)$$

Para $l \neq 1$

$$\left[A_l b^l + \frac{B_l}{b^{l+1}} \right] P_l(\cos\theta) = \frac{\tilde{B}_l}{b^{l+1}} P_l(\cos\theta)$$

$\boxed{@\ r=b}$

$$\varepsilon \frac{\partial V^{(2)}}{\partial r}\bigg|_{r=b} = \epsilon_0 \frac{\partial V^{(3)}}{\partial r}\bigg|_{r=b}$$

$$\varepsilon \left[\sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l \, l \, b^{l-1} + B_l \left(-(l+1)\right) b^{-l-2} \right] P_l(\cos\theta) \right]$$

$$= \epsilon_0 \left[\sum_{l=0}^{\infty} \left[\tilde{B}_l \left(-(l+1)\right) b^{-l-1-1} P_l(\cos\theta) \right] - E_0 \underbrace{\cos\theta}_{P_1(\cos\theta)} \right]$$

Para $l=1$

$$\left[\epsilon A_1 + \epsilon B_1 (-2) b^{-3} \right] \cancel{\cos\theta}$$

$$= \varepsilon_0 \tilde{B}_1 (-2) b^{-3} \cancel{\cos\theta} - \varepsilon_0 E_0 \cancel{\cos\theta}$$

$$\left(\epsilon A_1 - \frac{2\epsilon B_1}{b^3} = -\frac{2\varepsilon_0 \tilde{B}_1}{b^3} - \varepsilon_0 E_0 \right) (\Delta\Delta)$$

Para $l \neq 1$

$$\varepsilon A_l \, l \, b^{l-1} + \epsilon B_l \left(-(l+1)\right) b^{-l-2} = \varepsilon_0 \tilde{B}_l \left(-(l+1)\right) b^{-l-2}$$

Usando $(*)$

$$\varepsilon A_l \, l \, b^{l-1} + \frac{\epsilon}{b^{l+2}} \left(-A_l a^{2l+1} \right) \left(-(l+1)\right) = \frac{\varepsilon_0 \tilde{B}_l \left(-(l+1)\right)}{b^{l+2}}$$

$$\tilde{B}_l = A_l \left[\varepsilon l b^{l-1} + \frac{\varepsilon}{b^{l+2}} a^{2l+1}(l+1) \right] \frac{b^{l+2}}{\varepsilon_0(-(l+1))}$$

$$\tilde{B}_l = -A_l \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \left[\frac{l}{l+1} b^{2l+1} + a^{2l+1} \right]$$

$$\left.\text{Tomando } A_l = 0 \begin{cases} \tilde{B}_l = 0 \\ B_l = 0 \end{cases}\right\} l \neq 1$$

$\Rightarrow$ Para $l = 1$

$$\tilde{B}_1 = -\frac{A_1 \epsilon}{\epsilon_0} \left[\frac{1}{2} b^3 + a^3 \right]$$

$$B_1 = -A_1 a^3$$

$$\Rightarrow V^{(2)}(\bar{r}) = A_1 r \cos\theta + \frac{B_1}{r^2} \cos\theta$$

$$= A_1 r \cos\theta - A_1 \frac{a^3}{r^2} \cos\theta$$

$$= A_1 \left[r - \frac{a^3}{r^2} \right] \cos\theta$$

Para encontrar A_1:

Usamos (Δ) y $(\Delta\Delta)$ Junto con $(*)$

$$\begin{cases} A_1 b + \left(-A_1 \frac{a^3}{b^2}\right) = \frac{\tilde{B}_1}{b^2} - E_0 b \\ \varepsilon A_1 - \frac{2\epsilon}{b^3}\left(-A_1 a^3\right) = -\frac{2\epsilon_0}{b^3}\tilde{B}_1 - \epsilon_0 E_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 b - A_1 \frac{a^3}{b^2} = \frac{\tilde{B}_1}{b^2} - E_0 b \\ \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} A_1 + \frac{2\varepsilon}{\varepsilon_0} A_1 \frac{a^3}{b^3} = -\frac{2\tilde{B}_1}{b^3} - E_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 b - A_1 \frac{a^3}{b^2} = \frac{\tilde{B}_1}{b^2} - E_0 b \\ \frac{\epsilon}{\epsilon_0}\frac{A_1 b}{2} + \frac{2}{2}\frac{\epsilon}{\epsilon_0} A_1 \frac{a^3}{b^2} = -\frac{\tilde{B}_1}{b^2} - \frac{E_0 b}{2} \end{cases}$$

sumando las dos eqs:

$$A_1\left[b - \frac{a^3}{b^2} + \frac{\epsilon}{\epsilon_0}\frac{b}{2} + \frac{\epsilon}{\epsilon_0}\frac{a^3}{b^2}\right] = -\frac{3}{2}E_0 b$$

$$A_1\left[2 - 2\frac{a^3}{b^3} + \frac{\epsilon}{\epsilon_0} + \frac{2\epsilon}{\epsilon_0}\frac{a^3}{b^3}\right] = -3E_0$$

$$A_1\left[2\frac{a^3}{b^3}\left(-1 + \frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right) + \frac{\epsilon}{\epsilon_0} + 2\right] = -3E_0$$

$$\Rightarrow \boxed{V^{(2)}(r) = \frac{-3E_0}{\left[2\frac{a^3}{b^3}(-1+\epsilon_r) + \epsilon_r + 2\right]} \left[r - \frac{a^3}{r^2}\right]\cos\theta}$$

(b) $\vec{E}^{(2)}(\bar{r}) = -\bar{\nabla} V^{(2)}(\bar{r})$

$$= -\left[\hat{r}\frac{\partial V^{(2)}}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial V^{(2)}}{\partial \theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V^{(2)}}{\partial \phi}\right]$$

$$= -\left[\hat{r}\left(\alpha - \alpha a^3(-2)r^{-3}\right)\cos\theta + \hat{\theta}\frac{1}{r}\alpha\left[r - \frac{a^3}{r^2}\right](-\sin\theta)\right]$$

$$= \frac{+3E_0}{\left[2\frac{a^3}{b^3}(-1+\epsilon_r) + \epsilon_r + 2\right]}\left[\hat{r}\left(1 + \frac{2a^3}{r^3}\right)\cos\theta - \hat{\theta}\left[1 - \frac{a^3}{r^3}\right]\sin\theta\right]$$

$$\vec{E}^{(2)}(\bar{r}, t) = \frac{3E_0}{\left[2\frac{a^3}{b^3}(-1+\epsilon_r) + \epsilon_r + 2\right]}\left[\hat{r}\cos\theta\left[1 + \frac{2a^3}{r^3}\right] - \hat{\theta}\sin\theta\left[1 - \frac{a^3}{r^3}\right]\right]$$

Considere: $\boxed{\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \mu_0 J^\beta}$

Tomando $\beta = 0 \Rightarrow$

$$\partial_\nu F^{\nu 0} = \mu_0 J^0$$

$$\partial_0 F^{00} + \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \mu_0 J^0$$

$$\cancel{\partial_0 (0)} + \partial_1 \left(+\frac{E_x}{c}\right) + \partial_2 \left(+\frac{E_y}{c}\right) + \partial_3 \left(+\frac{E_z}{c}\right) = \mu_0 c \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \mu_0 c^2 \rho = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

ley de Gauss

1

Tomando $\beta = 1$

$$\partial_\nu F^{\nu 1} = \mu_0 J^1$$

$$\partial_0 F^{01} + \partial_1 F^{11} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} = \mu_0 J^1$$

$$\partial_0 \left(-\frac{E_x}{c}\right) + \cancel{\partial_1 (0)}^{0} + \partial_2 \left(B_z\right) + \partial_3 \left(-B_y\right) = \mu_0 J^1$$

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 J^1$$

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} + \left(\nabla \times \bar{B}\right)_x = \mu_0 J^1$$

Tomando $\beta = 2$

$$\partial_\nu F^{\nu 2} = \mu_0 J^2$$

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t} + \left(-\frac{\partial B_z}{\partial x} + \frac{\partial B_x}{\partial z}\right) = \mu_0 J^2$$

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t} + \left(\nabla \times \bar{B}\right)_y = \mu_0 J^2$$

Tomando $\beta = 3$

$$\partial_\nu F^{\nu 3} = \mu_0 J^3$$

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \mu_0 J^3$$

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial t} + \left(\nabla \times \bar{B}\right)_z = \mu_0 J^3$$

$\Rightarrow$ Combinando $\beta=1$ con $\beta=2$ con $\beta=3$

$$\boxed{-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\bar{E} + \nabla \times \bar{B} = \mu_0 \vec{J}}$$ Ley de Ampere-Maxwell.

Tenemos eq Maxwell homogeneas:

$\nabla \cdot \bar{B} = 0$ (No-monopolos)

$\nabla \times \bar{E} + \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = 0$ (Ley de Faraday)

Considere $$\boxed{\partial_\alpha \tilde{F}^{\alpha\beta} = 0}$$

Tomando $\beta = 0$

$$\partial_\alpha \tilde{F}^{\alpha 0} = 0$$

$$\cancel{\partial_0 \tilde{F}^{00}}^{\,0} + \partial_1 \tilde{F}^{10} + \partial_2 \tilde{F}^{20} + \partial_3 \tilde{F}^{30} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} B_x + \frac{\partial}{\partial y} B_y + \frac{\partial}{\partial z} B_z = 0$$

$$\boxed{\nabla \cdot \bar{B} = 0}$$ No monopolos.

Tomando $\beta = 1$

$$\partial_\alpha \tilde{F}^{\alpha 1} = 0$$

$$\partial_0 \tilde{F}^{01} + \cancel{\partial_1 \tilde{F}^{11}}^{0} + \partial_2 \tilde{F}^{21} + \partial_3 \tilde{F}^{31} = 0$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(-B_x) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{E_z}{c}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{E_y}{c}\right) = 0$$

$$-\frac{\partial B_x}{\partial t} - (\nabla \times \bar{E})_x = 0$$

Tomando $\beta = 2$ $\quad \partial_\alpha \tilde{F}^{\alpha 2} = 0$

$$\partial_0 \tilde{F}^{02} + \partial_1 \tilde{F}^{12} + \cancel{\partial_2 \tilde{F}^{22}} + \partial_3 \tilde{F}^{32} = 0$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(-B_y) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{E_z}{c}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{E_x}{c}\right) = 0$$

$$-\frac{\partial B_y}{\partial t} - (\nabla \times \bar{E})_y = 0$$

Tomando $\beta = 3$ $\quad \partial_\alpha \tilde{F}^{\alpha 3} = 0$

$$\partial_0 \tilde{F}^{03} + \partial_1 \tilde{F}^{13} + \partial_2 \tilde{F}^{23} + \cancel{\partial_3 \tilde{F}^{33}}^{0} = 0$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(-B_z) + \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{E_y}{c}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{E_x}{c}\right) = 0$$

$$-\frac{\partial B_z}{\partial t} - (\nabla \times \bar{E})_z = 0$$

Combinando $\beta = 1$ con $\beta = 2$ y $\beta = 3$

$$-\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} - (\nabla \times \bar{E}) = 0 \Rightarrow \boxed{\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}}$$

ley de Faraday.

ⓐ calcule $\frac{dH}{dt}$

$$\frac{dH}{dt} = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \frac{d\vec{V}_\alpha^2}{dt} + \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3\bar{r}\, \frac{d}{dt}\left[\bar{E}^2 + c^2\bar{B}^2\right]$$

$$= \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \frac{d}{dt}\left(\bar{V}_\alpha \cdot \bar{V}_\alpha\right) + \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3\bar{r}\left(\frac{d}{dt}(\bar{E}\cdot\bar{E}) + c^2\frac{d}{dt}(\bar{B}\cdot\bar{B})\right)$$

$$= \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \left[\left(\frac{d\bar{V}_\alpha}{dt}\right)\cdot\bar{V}_\alpha + \vec{V}_\alpha\cdot\left(\frac{d\bar{V}_\alpha}{dt}\right)\right]$$

$$+ \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3\bar{r}\left[2\bar{E}\cdot\frac{\partial\bar{E}}{\partial t} + c^2 2\bar{B}\cdot\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}\right]$$

$$\frac{dH}{dt} = \sum_\alpha m_\alpha \bar{V}_\alpha \cdot \frac{d\bar{V}_\alpha}{dt} + \varepsilon_0\int d^3\bar{r}\left[\bar{E}\cdot\frac{\partial\bar{E}}{\partial t} + c^2\bar{B}\cdot\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}\right]$$

Usando Fuerza de lorentz y las eq. de Maxwell

- $\vec{F}_\alpha = q_\alpha\bar{E} + q_\alpha\bar{V}_\alpha\times\bar{B} = m_\alpha\frac{d\bar{V}_\alpha}{dt}$

- $\nabla\times\bar{B} = \mu_0\bar{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\bar{E}}{\partial t} \Rightarrow \varepsilon_0\frac{\partial\bar{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0}\nabla\times\bar{B} - \bar{J}$

- $\nabla\times\bar{E} = -\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}$

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$$

$$\frac{dH}{dt} = \sum_\alpha \overline{V}_\alpha \cdot \left(q_\alpha \overline{E} + q_\alpha \overline{V}_\alpha \times \overline{B} \right)$$

$$+ \int d^3\bar{r} \left[\overline{E} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \overline{B} - \overline{J} \right) - \varepsilon_0 c^2 \, \overline{B} \cdot \nabla \times \overline{E} \right]$$

$$\frac{dH}{dt} = \sum_\alpha q \overline{V}_\alpha \cdot \overline{E} + 0 - \int d^3\bar{r} \, \overline{E} \cdot \overline{J}$$

$$+ \int d^3\bar{r} \left[\frac{\overline{E} \cdot \nabla \times \overline{B}}{\mu_0} - \frac{\overline{B} \cdot \nabla \times \overline{E}}{\mu_0} \right] \quad (*)$$

(b) Escribiendo $\overline{J}$ en funcion de las variables de las particulas i.e $\overline{J}(\bar{r}, t) = \sum_\alpha q_\alpha \overline{V}_\alpha(t) \, \delta(\bar{r} - \bar{r}_\alpha(t))$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\cdot} \int d^3\bar{r} \, \overline{E} \cdot \overline{J} = \int d^3\bar{r} \, \overline{E} \cdot \sum_\alpha q_\alpha \overline{V}_\alpha(t) \, \delta(\bar{r} - \bar{r}_\alpha(t))$$

$$= \sum_\alpha q_\alpha \int d^3\bar{r} \, \overline{E}(\bar{r}, t) \cdot \overline{V}_\alpha(t) \, \delta(\bar{r} - \bar{r}_\alpha(t))$$

$$= \sum_\alpha q_\alpha \, \overline{E}(\bar{r}_\alpha, t) \cdot \overline{V}_\alpha(t)$$

(c) $\int d^3\bar{r}\,\left[\bar{E}\cdot\nabla\times\bar{B} - \bar{B}\cdot\nabla\times\bar{E}\right]$

$\nabla\cdot(\bar{A}\times\bar{B}) = \bar{B}\cdot(\nabla\times\bar{A}) - \bar{A}\cdot(\nabla\times\bar{B})$

$= -\int d^3\bar{r}\,\left[\nabla\cdot(\bar{E}\times\bar{B})\right]$

Teorema de la divergencia

$\int \nabla\cdot\bar{v}\,d^3\bar{r} = \int_A \bar{v}\cdot d\bar{a}$

$= -\int_{Area} (\bar{E}\times\bar{B})\cdot d\bar{a}$

$=0$ cuando los campos tienden a cero en el infinito

la surface $\int$ es cero si los campos decresen lo suficiente / rapido @ ∞.

(d) $\frac{dH}{dt} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \bar{V}_{\alpha} \cdot \bar{E} - \sum_{\alpha} q_{\alpha} \bar{E} \cdot (\bar{r}_{\alpha}, t) \cdot \bar{V}_{\alpha}(t)$

$+ 0.$

$\Rightarrow \frac{dH}{dt} = 0 \Rightarrow$ H es una constante de movimiento.

⑥ (a) $\tilde{p}(t) = q\tilde{x}(t)$

$$\boxed{\tilde{p}(t) = \frac{q^2}{m}\underbrace{\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega}}\, E_{0x}e^{-i\omega t}}$$

$\downarrow$

complejo $\Rightarrow$ $\tilde{P}$ y $\tilde{E}$

están fuera de Fase.
Esta fase depende de la freq
de la driving force.

(b) $\tilde{P}(t) = N\tilde{p}(t)$

$$\boxed{\tilde{P}(t) = \frac{Nq^2}{m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega}\, E_{0x}e^{-i\omega t}}$$

(c) $\tilde{\varepsilon}_r = \frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_0(1+\tilde{\chi}_e)}{\varepsilon_0}$

$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \varepsilon_0\chi_e E$
$= \varepsilon_0(1+\chi_e)E$
$= \varepsilon E$

Como $\tilde{P}(t) = \varepsilon_0\tilde{\chi}_e\tilde{E}(t)$

$$\Rightarrow \varepsilon_0\tilde{\chi}_e = \frac{Nq^2}{m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega}$$

$\tilde{\varepsilon}_r = 1+\tilde{\chi}_e$

$$\boxed{\tilde{\varepsilon}_r = 1 + \frac{Nq^2}{m\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega}}$$

(d)

$$\tilde{\epsilon}_r = 1 + \frac{Nq^2}{m\epsilon_0}\left[\frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma_0\omega} + \sum_{j=1} \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega}\right]$$

$$\tilde{\epsilon}_r = 1 - \frac{Nq^2 f_0}{m\epsilon_0}\left(\frac{1}{\omega^2 + i\gamma_0\omega}\right)$$

$$+ \frac{Nq^2}{m\epsilon_0}\sum_{j=1} \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega}$$

$$\tilde{\epsilon}_r = \tilde{\epsilon}_b(\omega) - \frac{Nq^2 f_0}{m\epsilon_0} \frac{1}{i\left(\frac{\omega^2}{i} + \gamma_0\omega\right)}$$

$$\tilde{\epsilon} = \tilde{\epsilon}_b(\omega)\epsilon_0 + \frac{iNq^2 f_0 \cancel{\epsilon_0}}{m\cancel{\epsilon_0}} \frac{1}{\omega(\gamma_0 - i\omega)}$$

Con $\tilde{\epsilon}_b(\omega) = \epsilon_0\left(1 + \frac{Nq^2}{m\epsilon_0}\sum_{j=1} \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega}\right)$

ⓔ Considere la ley de ampere-maxwell y un medio ohmico

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{free} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

$$\bar{J} = \sigma \bar{E}.$$

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \bar{E} + \varepsilon_0 \chi_e \bar{E} = \varepsilon_0 (1+\chi_e)\vec{E}$$

$$= \sigma \bar{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\epsilon_b \vec{E}\right)$$

$$= \sigma \bar{E} + \epsilon_b \frac{\partial}{\partial t}\left[\bar{E}_0 e^{+i(\bar{k}_0 \cdot \bar{r} - \omega t)}\right]$$

$$= \sigma \vec{E} + \epsilon_b \bar{E}_0 (-i\omega) e^{+i(\bar{k} \cdot \bar{r} - \omega t)}$$

$$= \sigma \vec{E} - \epsilon_b (i\omega) \bar{E}$$

$$= (\sigma - i\omega \epsilon_b) \bar{E}$$

$$= i\omega \left(\frac{\sigma}{i\omega} - \epsilon_b\right) \bar{E}$$

$$= i\omega \left(-\frac{i\sigma}{\omega} - \epsilon_b\right) \bar{E}$$

$$= -i\omega \left(i\frac{\sigma}{\omega} + \epsilon_b\right) \bar{E}$$

(f) $\tilde{\epsilon}(\omega) = \left(\tilde{\epsilon}_b + \frac{i\sigma}{\omega} \right)$

$$\tilde{\epsilon}_b(\omega) + i \frac{N e^2 f_0}{m\omega(\gamma_0 - i\omega)} = \tilde{\epsilon}_b + \frac{i\sigma}{\omega}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{N e^2 f_0}{m(\gamma_0 - i\omega)}}$$

Esto es escencialmente el modelo de Drude de la conductividad electrica.

Examen de conocimientos
Mecánica Clásica.
Departamento de Física.
Universidad de los Andes 2025-I

El examen abarca dos partes: pregrado (PRE(20 puntos c/u)) y posgrado (POS(30 puntos c/u)). Para cada parte: (i) resuelva dos de los tres problemas propuestos; (ii) los problemas de cada parte, tienen el mismo valor.
El examen tiene una duración de 3 horas y se presenta en el horario de 9 am a 12M. martes 14 de enero. Salón IP-101.

1. Usted debe responder todos los ejercicios, explicando claramente el procedimiento que sigue, de no ser así no se dará puntaje.
2. No se dará crédito extra si entrega la solución a un tercer problema. En tal caso, solo dos soluciones se tendrán en cuenta, a voluntad del calificador.
3. Para obtener el puntaje total debe tener un desarrollo claramente explicado y apropiadamente justificado; sea breve pero preciso.
4. El examen se debe desarrollar manera individual. Usted no debe comunicarse con ninguno de sus compañeros ni utilizar ningún documento, libro, apuntes o algún tipo de dispositivo electrónico
5. Al principio de este documento hay algunas fórmulas que pueden ser útiles para el desarrollo de este examen.
6. Firmando el examen usted admite que entiende que omitir las reglas estipuladas para este examen será considerado un abuso a la confianza que se ha puesto en usted y tendrá las consecuencias estipuladas en el reglamento general de estudiantes de doctorado de la Universidad.
7. El incumplimiento de estas instrucciones llevará a una nota final de cero.

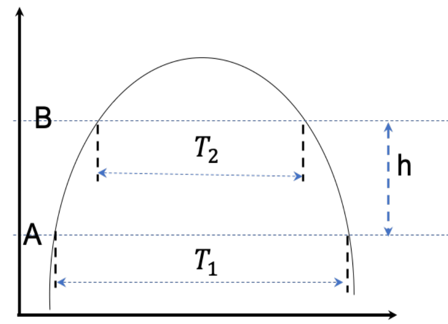
Pregunta	Puntos	Nota
PRE. 1	20	
PRE. 2	20	
PRE. 3	20	
POS. 1	30	
POS 2	30	
POS. 3	30	
Total:	100	

FORMULAS

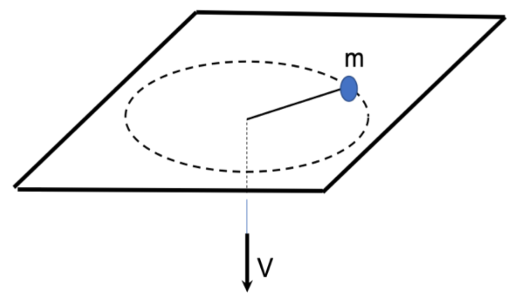
Coordenadas Generalizadas	q, Q	
Velocidades generalizadas	$\dot{q}, \dot{Q}$	$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}$
Momentos generalizados	p, P	$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}};\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial q}$
Lagrangiano	L	$L(q, \dot{q}, t) = T(\dot{q}) - V(q, \dot{q}, t)$
Hamiltoniano	$H = T + V$	$H(q, p, t) = p.\dot{q} - L(q, \dot{q}, t)$
Acción, Hamiltoniano, Lagrangiano	$\vec{r} = r\hat{r}$ $\dot{\vec{r}} = \left(\dot{r}\hat{r} - r\theta\dot{\hat{\theta}}\right)$ $\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\omega^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$	

NOMBRE: ________________________ **CODIGO:**_______________

PRE.1. Suponga que se hace un experimento en el cual se lanza una piedra hacia arriba (ver figura). La piedra gasta T_1 segundos en pasar por el mismo punto A y T_2 segundos en pasar por el mismo punto B que se encuentra a una altura h, respecto A. Según éste experimento, de una expresión analítica para el valor de la gravedad en términos de h,T_1 y T_2.

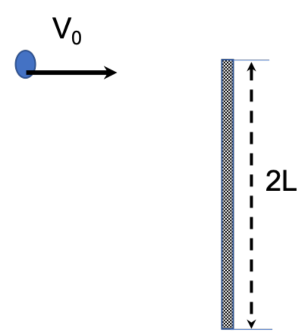


PRE.2. Suponga que se tiene una partícula de masa m sobre una mesa sin fricción y esta unida a un extremo de una cuerda que pasa por un hueco de la mesa. La partícula inicialmente se encuentra a una distancia r_0 y se pone a girar con una frecuencia ω_0, de tal manera que el radio comienza a decrecer cuando el otro extremo comienza a moverse con velocidad constante V, como se muestra en la figura.



(a) Dibuje el diagrama de fuerzas que actúa sobre la masa m
(b) Calcule la frecuencia del movimiento, $\omega(t)$.
(c) Con que fuerza se esta empujando la masa m

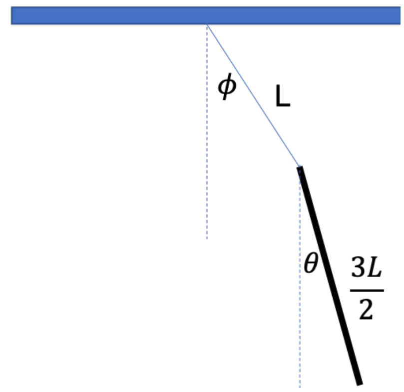
PRE.3. Una varilla delgada de longitud 2l y masa M, descansa sobre una superficie sin fricción. Una bola de masa m y velocidad v_0, golpea a la varilla en uno de sus extremos. Asumiendo que la energía se conserva y que la velocidad final v_f sigue a lo largo de la dirección original de movimiento



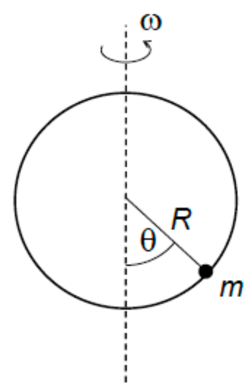
a) Calcule la velocidad final de la bola
b) Calcule la velocidad final si la varilla estuviera anclada en uno de los extremos.

POS.P1. Una varilla uniforme de masa M y longitud 3L/2 se suspende de una cuerda de longitud L y masa despreciable, como se muestra en la figura:

(a) En términos de las variables θ y ϕ, calcule la posición y velocidad del centro de masa de la varilla en el plano xy.
(b) Escriba el lagrangiano para cualquier ángulo θ y ϕ.
(c) Para pequeñas oscilaciones escriba las ecuaciones de movimiento en términos de las variables θ y ϕ.
(d) Calcule los modos de vibración y sus respectivas frecuencias de oscilación.



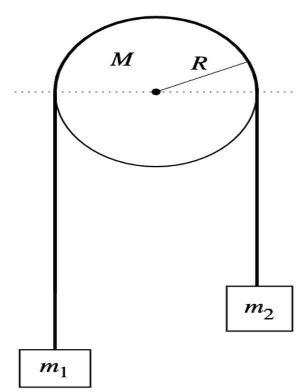
POS. P2. Una partícula de masa m se introduce en un aro circular de radio R. El aro gira con una velocidad angular constante en dirección vertical y la partícula puede deslizarse a lo largo del aro sin fricción.



(a) Escriba el Lagrangiano del sistema y explique cada uno de los términos.
(b) Calcule las ecuaciones de movimiento
(c) Para que valores de se puede encontrar una solución estacionaria.
(d) Del punto (c), y asumiendo la aproximación de pequeñas oscilaciones al rededor de los puntos de equilibrio, determine (como función de ω) las frecuencias de oscilación. ¿Todos los puntos de equilibrio llevan a soluciones estables? Explique sus resultados.

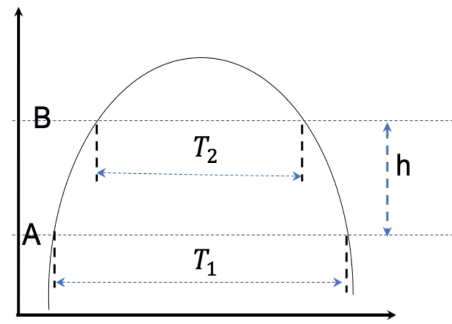
POS.P3. Una maquina de Atwood consiste de una polea en forma de circulo de masa M y radio R. une a dos cuerpos de masas m_1 y m_2 por una cuerda de longitud l y densidad de masa λ.

(a) Calcule el Lagrangiano del sistema
(b) Calcule la posición de m como función del tiempo con la condición de que $x(0) = x_0 \; y \; \dot{x}(0) = 0$.
(c) Explique físicamente su resultado si $m_1 = m_2 = 0$



SOLUCIONES

PRE.1. Suponga que se hace un experimento en el cual se lanza una piedra hacia arriba. La piedra gasta T_1 segundos en pasar por el mismo punto A y T_2 segundos en pasar por el mismo punto B que se encuentra a una altura h, respecto A. Según este experimento, de una expresión analítica para el valor de la gravedad en termino s de h, T_1 y T_2.



SOL. PRE.1

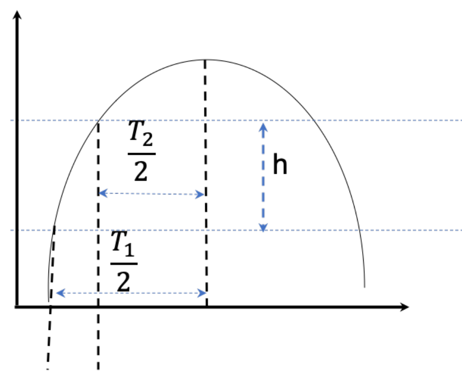
En el punto más alto de su trayectoria cuando han pasado $\frac{T_1}{2}$ segundos la velocidad es cero. Cuando han pasado $\frac{T_1-T_2}{2}$ segundos la posición de la partícula es h. así que las ecuaciones de movimiento de un tiro parabólico pueden ser escritas como:

$$y\left(\frac{T_1-T_2}{2}\right) = h = v_0\left(\frac{T_1-T_2}{2}\right) - \frac{g}{2}\left(\frac{T_1-T_2}{2}\right)^2$$

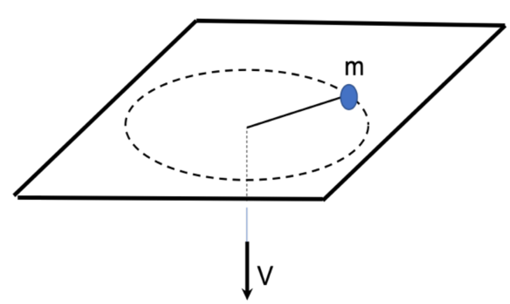
$$v\left(\frac{T_1}{2}\right) = 0 = v_0 - g\left(\frac{T_1}{2}\right) \Rightarrow v_0 = g\frac{T_1}{2}$$

$$\begin{aligned} h &= g\frac{T_1}{2}\left(\frac{T_1-T_2}{2}\right) - \frac{g}{2}\left(\frac{T_1-T_2}{2}\right)^2 \\ &= g\left(\frac{T_1-T_2}{4}\right)\left(T_1 - \frac{T_1-T_2}{2}\right) \\ &= g\left(\frac{T_1-T_2}{4}\right)\left(\frac{T_1+T_2}{2}\right) = g\left(\frac{T_1^2-T_2^2}{8}\right) \end{aligned}$$

$$g = \frac{8h}{T_1^2 - T_2^2}$$



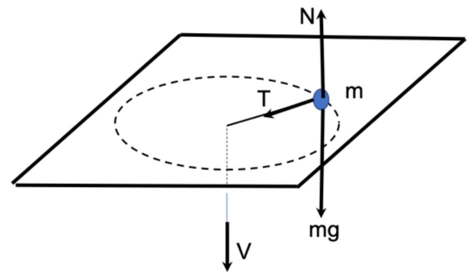
PRE.2. Suponga que se tiene una partícula de masa m sobre una mesa sin fricción y esta unida a un extremo de una cuerda que pasa por un hueco de la mesa. La partícula inicialmente se encuentra a una distancia r_0 y se pone a girar con una frecuencia ω_0, de tal manera que el radio comienza a decrecer cuando el otro extremo comienza a moverse con velocidad constante V, como se muestra en la figura.



(d) Dibuje el diagrama de fuerzas que actúa sobre la masa m
(e) Calcule la frecuencia del movimiento, $\omega(t)$.
(f) Con que fuerza se esta empujando la masa m.

SOL. PRE.2.

(a)



(b) Para este problema usamos coordenadas cilíndricas $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{k}$. La aceleración en coordenadas polares viene dada por:

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\omega^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$$

Dado que la velocidad es constante, $r(t) = r_0 - Vt$; $\dot{r} = -V$; $\ddot{r} = 0$

$$\ddot{\vec{r}} = (-r\omega^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$$

La fuerza en dirección radial es la tensión T

$$-T\hat{r} + 0\hat{\theta} = m(-r\omega^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$$

$$T = mr\omega^2 \quad ; \quad 0 = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

$$r\frac{d\omega}{dt} = -2\dot{r}\omega \Rightarrow \frac{d\omega}{\omega} = -\frac{2}{r}\frac{dr}{dt} = \frac{2V}{r_0 - Vt}$$

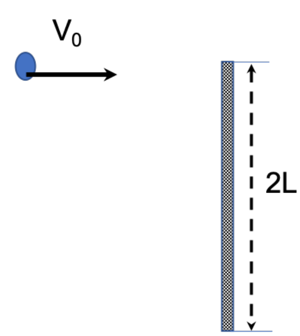
$$\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{\omega} = Ln\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \int_0^t \frac{2V}{r_0 - Vt}dt = -\frac{2V}{V}Ln\left(\frac{r_0 - Vt}{r_0}\right) = Ln\left(\frac{r_0}{r_0 - Vt}\right)^2$$

$$\omega(t) = \omega_0\left(\frac{r_0}{r_0 - Vt}\right)^2$$

(c) La fuerza se calcula muy fácilmente ya que $T = F$

$$T = F = mr\omega^2 = m\omega_0^2(r_0 - Vt)\left(\frac{r_0}{r_0 - Vt}\right)^4 = \frac{m\omega_0 r_0^4}{(r_0 - Vt)^3}$$

PRE.3. Una varilla delgada de longitud 2l y masa M, descansa sobre una superficie sin fricción. Una bola de masa m y velocidad v_0, golpea a la varilla en uno de sus extremos. Asumiendo que la energía se conserva y que la velocidad final v_f sigue a lo largo de la dirección original de movimiento



c) Calcule la velocidad final de la bola
d) Calcule la velocidad final si la varilla estuviera anclada en uno de los extremos

SOL. PRE.3

(a) Para este problema usaremos conservación de energía, momentum lineal y momentum angular. El origen se toma en el CM de la varilla.

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_f^2}{2} + \frac{MV_{CM}^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

$$mv_0 = -mv_f + MV_{cm} \ \Rightarrow \ V_{cm} = \frac{m(v_0 + v_f)}{M}$$

$$-mv_0 l = mv_f l - I\omega \ \Rightarrow \omega = \frac{m\left(v_0 + v_f\right)l}{I}$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_f^2}{2} + \frac{M}{2}\frac{m^2\ (v_0 + v_f)^2}{M^2} \ + \frac{I}{2}\frac{m^2\left(v_0 + v_f\right)^2 l^2}{I^2}$$

$$v_0^2 - v_f^2 = m\frac{(v_0 + v_f)^2}{M} \ + m\frac{\left(v_0 + v_f\right)^2 l^2}{I}$$

$$v_0 - v_f = \frac{m}{M}\ (v_0 + v_f) \ + \frac{ml^2}{I}\left(v_0 + v_f\right) = \frac{m}{M}\left(v_0 + v_f\right)\left(1 + \frac{l^2}{\frac{(2l)^2}{12}}\right)$$

$$v_0 - v_f = \frac{m}{M}\left(v_0 + v_f\right)(1 + 3) = \frac{4m}{M}\left(v_0 + v_f\right)$$

$$v_0\left(1 - \frac{4m}{M}\right) = v_f\ \left(1 + \frac{4m}{M}\right)$$

$$v_f = \left(\frac{M - 4m}{M + 4m}\right) v_0$$

(b) Para este caso, el origen se toma en el punto de anclaje:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_f^2}{2} + \frac{I_a\omega^2}{2}$$

$$-2mv_0 l = 2mv_f l - I_a\omega \ \Rightarrow \omega = \frac{2m\left(v_0 + v_f\right)l}{I_a}$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_f^2}{2} + \frac{I_a}{2}\left(\frac{2m\left(v_0 + v_f\right)l}{I_a}\right)^2$$

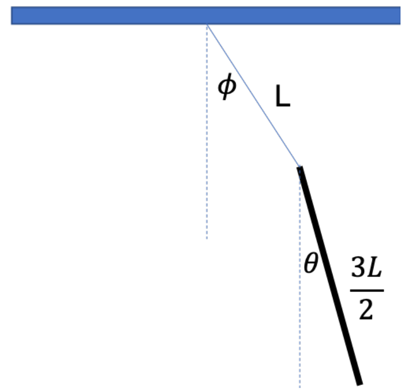
$$v_0^2 - v_f^2 = 4ml^2\frac{\left(v_0 + v_f\right)^2}{\frac{M(2l)^2}{3}} = 3m\frac{\left(v_0 + v_f\right)^2}{M}$$

$$v_0 - v_f = \frac{3m}{M}(v_0 + v_f)$$

$$v_f = \left(\frac{M - 3m}{M + 4m}\right) v_0$$

POS.P1. Una varilla uniforme de masa M y longitud 3L/2 se suspende de una cuerda de longitud L y masa despreciable, como se muestra en la figura:

(a) En términos de las variables θ y ϕ, cual es la posicion y velocidad del centro de masa de la varilla en el plano xy.
(b) Escriba el lagrangiano para cualquier ángulo θ y ϕ.
(c) Para pequeñas oscilaciones escriba las ecuaciones de movimiento en términos de las variables θ y ϕ.
(d) Calcule los modos de vibración y sus respectivas frecuencias de oscilación.



SOL. POS. P1. Supongamos coordenadas x_{cm} y y_{cm}, medidas desde la parte superior de donde esta amarrada la cuerda y x_1 y y_1, medidas desde el extremo de la unión entre la cuerda y la varilla.

(a)

$$x_{cm} = x_1 + \frac{3L}{4}sin\theta = Lsin\phi + \frac{3L}{4}sin\theta \Rightarrow \dot{x}_{cm} = Lcos\phi\dot{\phi} + \frac{3L}{4}cos\theta\dot{\theta}$$

$$y_{cm} = y_1 - \frac{3L}{4}sin\theta = -Lcos\phi - \frac{3L}{4}sin\theta \Rightarrow \dot{y}_{cm} = Lsin\phi\dot{\phi} + \frac{3L}{4}sin\theta\dot{\theta}$$

(b) $L = K - V$

$$K = K_{cm} + K_{rot} = \frac{M}{2}(\dot{x}_{cm}^2 + \dot{y}_{cm}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$

$$= \frac{M}{2}\left(\left(Lcos\phi\dot{\phi} + \frac{3L}{4}cos\theta\dot{\theta}\right)^2 + \left(Lsin\phi\dot{\phi} + \frac{3L}{4}sin\theta\dot{\theta}\right)^2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}M\left(\frac{3L}{2}\right)^2\dot{\theta}^2\right)$$

$$= \frac{ML^2}{2}\left(\dot{\phi}^2 + \frac{9}{16}\dot{\theta}^2 + \frac{3}{2}\,(cos\phi cos\theta + sin\phi sen\theta)\dot{\theta}\,\dot{\phi}\, + \frac{3}{16}\dot{\theta}^2\right)$$

$$L = K - U = \frac{ML^2}{2}\left(\dot{\phi}^2 + \frac{3}{4}\dot{\theta}^2 + \frac{3}{2}\cos{(\phi - \theta)}\dot{\theta}\dot{\phi}\right) + MgL(cos\phi + \frac{3}{4}cos\theta)$$

(c)

$$L = \frac{ML^2}{2}\left(\dot{\phi}^2 + \frac{3}{4}\dot{\theta}^2 + \frac{3}{2}\dot{\theta}\dot{\phi}\right) + MgL\left(\left(1 - \frac{\phi^2}{2}\right) + \frac{3}{4}\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0.\ \ ;\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\phi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{ML^2}{2}\left(\frac{3}{2}\dot{\theta} + \frac{3}{2}\dot{\phi}\right)\right) - MgL\left(-\frac{3}{4}\theta\right) = 0;$$

$$\frac{3}{4}ML^2(\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) + \frac{3}{4}\theta MgL = L\ddot{\phi} + L\,\ddot{\theta} + g\theta = 0$$

$$0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{ML^2}{2}\left(\frac{3}{2}\dot{\theta} + 2\dot{\phi}\right)\right) - MgL(-\phi) = 0$$

$$ML^2\left(\frac{3}{4}\ddot{\theta}+\ddot{\phi}\right)+\phi MgL = L\ddot{\phi}+\frac{3}{4}L\ddot{\theta}+g\phi = 0$$

(d) Se suponen soluciones como $\phi = Asin(\ \omega t)\ ; \theta = Bsin(\omega t)$:

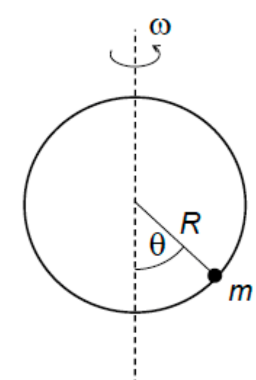
$$-BL\omega^2 sin(\omega t) - AL\omega^2 sin(\omega t) + gBsin(\omega t) = 0$$
$$B + A = B\frac{g}{L\omega^2} \Rightarrow A = B\left(\frac{g}{L\omega^2} - 1\right)$$

$$-AL\omega^2 sin(\omega t) - \frac{3}{4}BL\omega^2 sin(\omega t) + gAsin(\omega t) = 0$$
$$B + \frac{3}{4}A = A\frac{g}{L\omega^2} \Rightarrow A = \frac{3}{4}\frac{B}{\left(\frac{g}{L\omega^2} - 1\right)}$$
$$B\left(\frac{g}{L\omega^2} - 1\right) = \frac{3}{4}\frac{B}{\left(\frac{g}{L\omega^2} - 1\right)} \Rightarrow \left(\frac{g}{L\omega^2} - 1\right)^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow \left(\frac{g}{L\omega^2} - 1\right) = \pm\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\omega^{\pm} = \pm\left(\frac{g}{L}\frac{1}{1\pm\left(\frac{3}{4}\right)^{1/2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Sustituyendo en

$$A = B\left(\frac{g}{L\omega^2} - 1\right) = \pm B\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\phi = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} Asin(\omega^+ t) \quad ; \ \theta = Asin(\omega^+ t)$$
$$\phi = -\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} Asin(\omega^- t) \quad ; \ \theta = Asin(\omega^- t)$$

POS. P2. Una partícula de masa m se introduce en un aro circular de radio R. El aro gira con una velocidad angular constante en dirección vertical y la partícula puede deslizarse a lo largo del aro sin fricción.



(a) Escriba el Lagrangiano del sistema y explique cada uno de los términos.
(b) Calcule las ecuaciones de movimiento.
(c) Para que valores de se puede encontrar una solución estacionaria.

(d) Del punto (c), y asumiendo la aproximación de pequeñas oscilaciones al rededor de los puntos de equilibrio, determine (como función de w) las frecuencias de oscilación. ¿Todos los puntos de equilibrio llevan a soluciones estables? Explique sus resultados

SOL POS.P2. Debido a la simetría es mejor trabajar en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)

(a) La velocidad de la partícula es

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\hat{\theta} + \omega R\, sin\theta\hat{\phi}$$

El Lagrangiano se puede escribir como:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left(R\dot{\theta}\hat{\theta} + \omega R\, sin\theta\hat{\phi}\right)^2 - mgR(1 - cos\theta)$$
$$= \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2R^2\sin^2\theta + mgRcos\theta - mgR$$

El primer término corresponde a la energía cinética y los últimos tres terminos dan cuenta del potencial efectivo

$$V(\theta) = \frac{1}{2}m\omega^2R^2\sin^2\theta + mgRcos\theta - mgR$$

(b) La ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial\theta} = -\frac{\partial V}{\partial\theta}$$
$$\frac{1}{2}mR^2 2\ddot{\theta} = -mgRsin\,\theta + m\omega^2R^2\sin\theta\, cos\theta$$
$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R}sin\,\theta + \omega^2\sin\theta\, cos\theta$$

(c) Si θ es constante entonces

$$0 = -\frac{g}{R}sin\,\theta + \omega^2\sin\theta\, cos\theta$$
$$0 = sin\,\theta(\omega^2 cos\theta - \frac{g}{R})$$
$$\theta_1 = 0 \quad ; \quad \cos\theta_2 = \frac{g}{\omega^2R} = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \ ; \quad \theta_3 = \pi$$

Las soluciones para cualquier ω existen para $\theta_1 y\ \theta_3$, pero para θ_2, existe si $\omega^2 > \frac{g}{R} = \omega_p^2$.

(e) Para averiguar las soluciones alrededor de los puntos de equilibrio $(\theta = \theta_i + \delta)$ y sabemos que cualquier función $g(\theta) = g(\theta_i) + \theta\frac{dg}{d\theta}|_{\theta_i}$. Si $g(\theta) = \frac{\partial V}{\partial\theta}$, entonces de las ecuaciones de Euler-Lagrange se tiene que

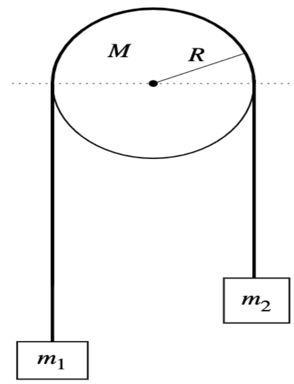
$$mR^2\ddot{\theta} = -\frac{\partial V}{\partial\theta} \ ;\rightarrow\ mR^2\ddot{\delta} = -\delta\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}|_{\theta_i} \rightarrow \Omega_i^2 = \frac{1}{mR^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}|_{\theta_i}$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} = mgRcos\,\theta - m\omega^2R^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$= mgRcos\,\theta - m\omega^2R^2(2\cos^2\theta - 1)$$

$$\Omega_i^2 = \omega_p^2 cos\,\theta_i - \omega^2(2\cos^2\theta_i - 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = 0, & \Omega_1^2 = \omega_p^2 - \omega^2 & \textit{Estable para } \omega < \omega_p \textit{ e inestable para } \omega > \omega_p \\ \cos\theta_2 = \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}, & \Omega_2^2 = -\omega^2\left(\dfrac{2\omega_p^4}{\omega^4} - 1\right) + \dfrac{\omega_p^4}{\omega^4} = \omega^2 - \dfrac{\omega_p^4}{\omega^2} & \textit{Estable para } \omega > \omega_p \\ \theta_3 = \pi, & \Omega_3^2 = -\omega_p^2 - \omega^2 < 0 & \textit{Siempre inestable} \end{cases}$$

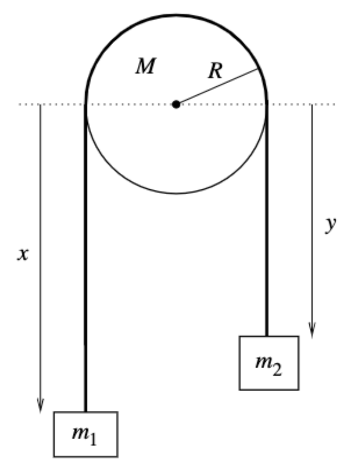
POS.P3. Una maquina de Atwood consiste de una polea en forma de circulo de masa M y radio R. une a dos cuerpos de masas m_1 y m_2 por una cuerda de longitud l y densidad de masa λ.



(d) Calcule el Lagrangiano del sistema
(e) Calcule la posición de m como función del tiempo con la condición de que $x(0) = x_0\ y\ \dot{x}(0) = 0.$
(f) Explique físicamente su resultado si $m_1 = m_2 = 0$

SOL POS.P3

(a) Se obtiene primero la ecuación de ligadura del sistema y teniendo presente que $M\ = \rho\, x$



$$l = x + y + \pi R$$

$$T = \frac{m_1v^2}{2} + \frac{m_2v^2}{2} + \frac{m_cv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + m_c + \frac{I}{R^2}\right)\dot{x}^2$$

$$V = -m_1g\,x - m_2g\,y - \lambda gx\frac{x}{2} - \lambda gy\frac{y}{2}$$

$$= -(m_1 - m_2)gx - \frac{\lambda g}{2}(x^2 + (l - x)^2)$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + m_c + \frac{I}{R^2}\right)\dot{x}^2 + (m_1 - m_2)gx + \frac{\lambda g}{2}(x^2 + (l - x)^2)$$

(b) La ecuación de movimiento es. $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$

$$\left(m_1 + m_2 + m_c + \frac{I}{R^2}\right)\ddot{x} = (m_1 - m_2)g - \lambda g\, l + 2\lambda g x$$

$$\ddot{x} - b^2 x = a$$

$$a = g\frac{m_1 - m_2 - \lambda l}{m_1 + m_2 + m_c + \frac{I}{R^2}} \quad ; \quad b^2 = \frac{2\lambda g}{m_1 + m_2 + m_c + \frac{I}{R^2}}$$

La solución general a esta ecuación diferencial es la suma de la solución particular mas la homogénea, es decir:

$$x(t) = -\frac{a}{b^2} + A cosh\, bt + B \sinh bt \qquad ; \quad \frac{a}{b^2} = \frac{m_1 - m_2 - \lambda l}{2\lambda}$$

Suponiendo que $x(0) = x_0\ y\ \dot{x}(0) = 0$, se obtiene:

$$A = x_0 + \frac{a}{b^2} \ \ ; \ \ B = 0. \ \Rightarrow \ x(t) = -\frac{a}{b^2} + \left(x_0 + \frac{a}{b^2}\right)\cosh bt$$

(c) Si $m_1 = m_2 = 0$, Entonces la cuerda se mueve debido únicamente al desequilibrio entre los pesos de sus partes colgantes a cada lado de la polea.

$\frac{a}{b^2} = -\frac{l}{2}$; $b^2 = \frac{2\lambda g}{m_c + \frac{I}{R^2}}$; $x(t) = \frac{l}{2} + \left(x_0 - \frac{l}{2}\right)\cosh bt$

Si $x_0 = \frac{l}{2}$, entonces $x(t) = \frac{l}{2}$,la cuerda permanece en reposo en equilibrio inestable. De las euaciones es facil identificar un tiempo característico que es $\tau = \frac{1}{b}$. De la ecuación se puede leer que para un tiempo mayor que un tiempo característico, la velocidad tanto de las masas como la cuerda crece de manera exponencial, este comportamiento se debe a que el peso de un lado de la cuerda va creciendo mas rápido que al otro lado, incrementando el desbalance como función del tiempo.

Examen de Conocimientos - Mecánica Cuántica
Departamento de Física, Universidad de los Andes
2024-II

El examen tiene una duración de 3:00 horas y se debe terminar a las 12:00 horas.

Usted debe responder todos los ejercicios a mano explicando claramente el procedimiento que sigue, de no ser así no se dará puntaje.

El examen se debe desarrollar manera individual. Usted no debe comunicarse con ninguno de sus compañeros ni utilizar ningún documento, libro o apuntes, diferente a las que se le están asignando en el enunciado. Al principio de este documento hay algunas fórmulas que pueden ser útiles para el desarrollo de este examen.

Firmando el examen usted admite que entiende que omitir las reglas estipuladas para este examen será considerado un abuso a la confianza que se ha puesto en usted y tendrá las consecuencias estipuladas en el reglamento general de estudiantes de doctorado de la Universidad.

ECUACIONES

Oscilador armónico:

$$\hat{a}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(\mp i\hat{p} + m\omega\hat{x}),\ [\hat{a}_-, \hat{a}_+] = 1,\ \hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}_-\hat{a}_+ - \frac{1}{2}\right)$$

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}_+)^n\psi_0; \quad \psi_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}.$$

Momento angular:

$$\hat{J}^2\left|j,m\right\rangle = \hbar^2 j(j+1)\left|j,m\right\rangle,$$
$$\hat{J}_z\left|j,m\right\rangle = \hbar m\left|j,m\right\rangle,$$
$$\hat{\vec{J}}_\pm\left|j,m\right\rangle = \sqrt{(j\mp 1)(j\pm m+1)}\hbar\left|j,m\pm 1\right\rangle,$$
$$\hat{J}_x = \frac{1}{2}(\hat{J}_+ + \hat{J}_-),$$
$$\hat{J}_y = \frac{1}{2i}(\hat{J}_+ - \hat{J}_-).$$

Evolución temporal:

$$\frac{\partial\left|\psi\right\rangle}{\partial t} = \frac{-i}{\hbar}\hat{H}\left|\psi\right\rangle,$$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{Q}\rangle = \frac{i}{\hbar}\left\langle\left[\hat{H}, \hat{Q}\right]\right\rangle + \left\langle\frac{\partial\hat{Q}}{\partial t}\right\rangle.$$

Átomo de Hidrógeno:

$$E_n = -\frac{13{,}6}{n^2}\ \text{eV},$$

$$R_{n\ell}(r) = N_{nl}\left(\frac{2r}{na_0}\right)^{\ell} e^{-r/na_0} L_{n+\ell}^{2\ell+1}\left(\frac{2r}{na_0}\right).$$

$$Y_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}},\quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}cos\theta,\quad Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}sen\theta e^{i\phi},\quad Y_{2,0} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\big(3cos^2\theta - 1\big)$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_{ij}^{*}Y_{kq}d\Omega = \delta_{ik}\delta_{jq},\quad \psi_{n\ell m} = R_{n\ell}Y_{\ell m}$$

$$R_{10} = 2\Big(\frac{1}{a_0}\Big)^{3/2}e^{-r/a_0},\quad R_{21} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\frac{1}{2a_0}\Big)^{3/2}\Big(\frac{r}{a_0}\Big)e^{-r/2a_0},\quad R_{20} = 2\Big(\frac{1}{2a_0}\Big)^{3/2}\Big(1 - \frac{r}{2a_0}\Big)e^{-r/2a_0}$$

$$\int_0^{\infty} r^n e^{-\alpha r}dr = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

Teoría de Perturbaciones:

$$H\psi >= i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi>,\quad H = H^0 + H^{'},\quad H|n>= E_n|n>,\quad E_n = E_n^{(0)} + E_n^{(1)} + E_n^{(2)} + ...$$

$$|n>= |n^{(0)}> + |n^{(1)}> + |n^{(2)}> + ...,\quad E_n^{(1)} =< n|H^{'}|n>,\quad |n^{(1)}>= \sum_{m\neq n}|m^{(0)}> \frac{< m^{(0)}|H^{'}|n^{(0)}>}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}$$

$$\Delta E_n^{(2)} = \sum_{m\neq n}\frac{\left|\left\langle m|H^{'}|n\right\rangle\right|^2}{E_n - E_m}$$

$$H = H^0 + H^{'}(t),\quad c_{i\to f}(t) = \delta_{if} - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} < f^0|H^{'}(t^{'})|i^0 > e^{iw_{fi}t^{'}}dt^{'}$$

$$\oint pdx = \hbar\pi(n + \frac{1}{2})\ \ ,\ \ [L_+, L_-] = 2\hbar L_z$$

Expresiones útiles

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\Delta_F\left(x_2 - x_1\right) = \int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\Delta_F(q)e^{-iq(x_2 - x_1)}$$

$$\Lambda_\mu^\nu\eta^{\mu\rho}\Lambda_\rho^\sigma = \eta^{\nu\sigma}$$

1. Problema 1 (Pregrado) - 20 Puntos

El Hamiltoniano de un oscilador armónico unidimensional puede ser escrito en unidades naturales ($m = \hbar = \omega = 1$) como:

$$\hat{H} = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2},$$

donde $\hat{a} = \frac{(\hat{x}+i\hat{p})}{\sqrt{2}}$, $\hat{a}^\dagger = \frac{(\hat{x}-i\hat{p})}{\sqrt{2}}$. Una de las funciones propias es:

$$\psi_a = (2x^3 - 3x)\exp\bigl(-x^2/2\bigr).$$

Encuentre las dos funciones propias mas cercanas en energía a la función ψ_a (no tiene que normalizar).

2. Problema 2 (Pregrado) - 20 puntos

Considere un electrón, confinado en un potencial tipo oscilador harmónico simple en tres dimensiones (isotrópico). Ahora, piense que deseamos incluir los efectos de interacción del potencial externo con el espín del electrón, de manera análoga a los efectos espín-orbita:

$$\hat{H} = \hat{H}^0 + \hat{V}_{eo}^{'},$$

donde

$$\hat{H}^0 = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m_e} + \frac{m\omega^2 r^2}{2}$$

$$\hat{V}_{eo}^{'} = \frac{1}{2m_e^2c^2}\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}\hat{\vec{L}}\cdot\hat{\vec{S}}$$

(a) (5 puntos) Escriba los valores propios respectivos para el estado base y el primer estado excitado.

(b) (15 puntos) Use teoría de perturbaciones para determinar como cambian los valores propios del inciso anterior, si se incorpora ahora la perturbación asociada a la interacción del potencial con el espín.

3. Problema 3 (Pregrado) - 20 puntos

Suponga que un electrón en el átomo de Hidrógeno posee la siguiente función de onda

$$R_{2,1}\left[\sqrt{\frac{1}{3}}Y_1^0\left|\uparrow\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}Y_1^1\left|\downarrow\right\rangle\right]. \tag{1}$$

(a) (10 puntos) Si se realizara una medición de $\hat{L}^2$, ¿qué valores propios se obtendrían y con qué probabilidad?

(b) (5 puntos) Repita el inciso anterior con $\hat{L}_z$.

(c) (5 puntos) Si se hiciera una medición de $\hat{S}^2$ y $\hat{S}_z$, ¿qué valores propios se obtendrían y con que probabilidad?

4. Problema 1 (Posgrado) - 30 puntos

Use métodos variacionales para encontrar la energía del estado base, para una partícula que se mueve en una dimensión, bajo la acción de un potencial de la forma

$$V(x) = \alpha x^2$$

5. Problema 2 (Posgrado) - 30 puntos

Demuestre que si ϕ es un campo escalar la acción para el Lagrangiano

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{\hbar^2}{2m} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - \mathcal{V}(\phi) \tag{2}$$

es invariante ante transformaciones de Lorentz.

6. Problema 3 (Posgrado) - 30 puntos

Un bosón escalar se desintegra de manera espontanea un pareja fermión anti-fermión, bajo una interacción tipo Yukawa, es decir

$$\mathcal{L}_I = -g : \bar{\psi}\psi\phi : .$$

(a) (10 Puntos) Explique el significando físico de cada termino y realice el diagrama de Feynmman respectivo para la siguiente expresión

$$\mathcal{M}_{\hat{s}} \sim \left\langle \bar{\psi}\psi \middle| \overbrace{\phi(x_2)\phi(x_3)}\,\overbrace{\bar{\psi}_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2)}\,\overbrace{\bar{\psi}_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2)} : \bar{\psi}_\gamma(x_3)\psi_\gamma(x_3)\phi(x_1) : \middle| \phi \right\rangle$$

(b) (20 Puntos) Escriba la expresión matemática para el elemento matricial $\mathcal{M}$. Debe incluir los espinores respectivos del proceso.

Examen de Conocimientos - Mecánica Cuántica
Departamento de Física, Universidad de los Andes
2024-II

El examen tiene una duración de 3:00 horas y se debe terminar a las 12:00 horas.

Usted debe responder todos los ejercicios a mano explicando claramente el procedimiento que sigue, de no ser así no se dará puntaje.

El examen se debe desarrollar manera individual. Usted no debe comunicarse con ninguno de sus compañeros ni utilizar ningún documento, libro o apuntes, diferente a las que se le están asignando en el enunciado. Al principio de este documento hay algunas fórmulas que pueden ser útiles para el desarrollo de este examen.

Firmando el examen usted admite que entiende que omitir las reglas estipuladas para este examen será considerado un abuso a la confianza que se ha puesto en usted y tendrá las consecuencias estipuladas en el reglamento general de estudiantes de doctorado de la Universidad.

ECUACIONES

Oscilador armónico:

$$\hat{a}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(\mp i\hat{p} + m\omega\hat{x}),\ [\hat{a}_-, \hat{a}_+] = 1,\ \hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}_-\hat{a}_+ - \frac{1}{2}\right)$$

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}_+)^n\psi_0; \quad \psi_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}.$$

Momento angular:

$$\hat{J}^2 |j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j, m\rangle,$$

$$\hat{J}_z |j, m\rangle = \hbar m |j, m\rangle,$$

$$\hat{\vec{J}}_\pm |j, m\rangle = \sqrt{(j \mp 1)(j \pm m + 1)}\hbar |j, m \pm 1\rangle,$$

$$\hat{J}_x = \frac{1}{2}(\hat{J}_+ + \hat{J}_-),$$

$$\hat{J}_y = \frac{1}{2i}(\hat{J}_+ - \hat{J}_-).$$

Evolución temporal:

$$\frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = \frac{-i}{\hbar}\hat{H}|\psi\rangle,$$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{Q}\rangle = \frac{i}{\hbar}\left\langle\left[\hat{H}, \hat{Q}\right]\right\rangle + \left\langle\frac{\partial\hat{Q}}{\partial t}\right\rangle.$$

Átomo de Hidrógeno:

$$E_n = -\frac{13{,}6}{n^2}\ \mathrm{eV},$$

$$R_{n\ell}(r) = N_{nl}\left(\frac{2r}{na_0}\right)^{\ell} e^{-r/na_0} L_{n+\ell}^{2\ell+1}\left(\frac{2r}{na_0}\right).$$

$$Y_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}},\quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}cos\theta,\quad Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}sen\theta e^{i\phi},\quad Y_{2,0} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\big(3cos^2\theta - 1\big)$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_{ij}^{*}Y_{kq}d\Omega = \delta_{ik}\delta_{jq},\quad \psi_{n\ell m} = R_{n\ell}Y_{\ell m}$$

$$R_{10} = 2\Big(\frac{1}{a_0}\Big)^{3/2}e^{-r/a_0},\quad R_{21} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\frac{1}{2a_0}\Big)^{3/2}\Big(\frac{r}{a_0}\Big)e^{-r/2a_0},\quad R_{20} = 2\Big(\frac{1}{2a_0}\Big)^{3/2}\Big(1 - \frac{r}{2a_0}\Big)e^{-r/2a_0}$$

$$\int_0^{\infty} r^n e^{-\alpha r}dr = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

Teoría de Perturbaciones:

$$H\psi >= i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi >,\quad H = H^0 + H^{'},\quad H|n >= E_n|n >,\quad E_n = E_n^{(0)} + E_n^{(1)} + E_n^{(2)} + ...$$

$$|n >= |n^{(0)} > +|n^{(1)} > +|n^{(2)} > +.....,\quad E_n^{(1)} =< n|H^{'}|n >,\quad |n^{(1)} >= \sum_{m\neq n}|m^{(0)} > \frac{< m^{(0)}|H^{'}|n^{(0)} >}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}$$

$$\Delta E_n^{(2)} = \sum_{m\neq n}\frac{\left|\left\langle m|H^{'}|n\right\rangle\right|^2}{E_n - E_m}$$

$$H = H^0 + H^{'}(t),\quad c_{i\to f}(t) = \delta_{if} - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} < f^0|H^{'}(t^{'})|i^0 > e^{iw_{fi}t^{'}}dt^{'}$$

$$\oint pdx = \hbar\pi(n + \frac{1}{2})\ \ ,\ \ [L_+, L_-] = 2\hbar L_z$$

Expresiones útiles

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\Delta_F\left(x_2 - x_1\right) = \int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\Delta_F(q)e^{-iq(x_2 - x_1)}$$

$$\Lambda_\mu^\nu\eta^{\mu\rho}\Lambda_\rho^\sigma = \eta^{\nu\sigma}$$

1. Problema 1 (Pregrado) - 20 Puntos

El Hamiltoniano de un oscilador armónico unidimensional puede ser escrito en unidades naturales ($m = \hbar = \omega = 1$) como:

$$\hat{H} = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2},$$

donde $\hat{a} = \frac{(\hat{x}+i\hat{p})}{\sqrt{2}}$, $\hat{a}^\dagger = \frac{(\hat{x}-i\hat{p})}{\sqrt{2}}$. Una de las funciones propias es:

$$\psi_a = (2x^3 - 3x)\exp\left(-x^2/2\right).$$

Encuentre las dos funciones propias mas cercanas en energía a la función ψ_a (no tiene que normalizar).

Solución:

Los operadores de aniquilación y creación bajan y suben la energía del estado en una unidad, donde los valores en la escalera de energía tienen un espaciado constante de 1. Entonces, las dos funciones propias con energías más cercanas a E_a son $E_a \pm 1$, correspondientes a las funciones propias $\hat{a}^\dagger\psi_a$ y $\hat{a}\psi_a$. Ahora encontramos dichas funciones:

$$\begin{aligned}
\hat{a}^\dagger\psi_0 &= \left[\frac{\hat{x}-i\hat{p}}{\sqrt{2}}\right](2x^3-3x)e^{-x^2/2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{x(2x^3-3x)e^{-x^2/2} - \frac{d}{dx}\left[(2x^3-3x)e^{-x^2/2}\right]\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(2x^4-3x^2)e^{-x^2/2} - (6x^2-3)e^{-x^2/2} + (2x^4-3x^2)e^{-x^2/2}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(4x^4-12x^2+3)e^{-x^2/2}\right].
\end{aligned}$$

Haciendo un procedimiento similar para $\hat{a}\psi_0$:

$$\begin{aligned}
\hat{a}\psi_0 &= \left[\frac{\hat{x}+i\hat{p}}{\sqrt{2}}\right](2x^3-3x)e^{-x^2/2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{x(2x^3-3x)e^{-x^2/2} + \frac{d}{dx}\left[(2x^3-3x)e^{-x^2/2}\right]\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(2x^4-3x^2)e^{-x^2/2} + (6x^2-3)e^{-x^2/2} - (2x^4-3x^2)e^{-x^2/2}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(6x^2-3)e^{-x^2/2}\right].
\end{aligned}$$

2. Problema 2 (Pregrado) - 20 puntos

Considere un electrón, confinado en un potencial tipo oscilador harmónico simple en tres dimensiones (isotrópico). Ahora, piense que deseamos incluir los efectos de interacción del potencial externo con el espín del electrón, de manera análoga a los efectos espín-orbita:

$$\hat{H} = \hat{H}^0 + \hat{V}_{eo}^{'},$$

donde

$$\hat{H}^0 = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m_e} + \frac{m\omega^2 r^2}{2}$$

$$\hat{V}_{eo}' = \frac{1}{2m_e^2 c^2}\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}\hat{\vec{L}}\cdot\hat{\vec{S}}$$

(a) (5 puntos) Escriba los valores propios respectivos para el estado base y el primer estado excitado.

(b) (15 puntos) Use teoría de perturbaciones para determinar como cambian los valores propios del inciso anterior, si se incorpora ahora la perturbación asociada a la interacción del potencial con el espín.

Solución:

(a) Sabemos que para el oscilador armónico isotrópico en 3 dimensiones, los posible estados de energía estarán dados por:

$$E_n = \hbar\omega\left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2}\right)$$

Entonces, para el estado base $E_{000} = \frac{3}{2}\hbar\omega$. Para el primer estado tenemos $E_{100} = \frac{5}{2}\hbar\omega$.

(b) Note que

$$\hat{V}_{eo}' = \frac{1}{2m_e^2 c^2}\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}\hat{\vec{L}}\cdot\hat{\vec{S}}$$

Por lo tanto, dado que $V(r) = \frac{m_e\omega^2 r^2}{2}$, tenemos que $\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r} = m_e\omega^2 r$. Por ende

$$\hat{V}_{eo}' = \frac{1}{2m_e^2 c^2}\frac{1}{r}m_e\omega^2 r\hat{\vec{L}}\cdot\hat{\vec{S}} = \frac{\omega^2}{2m_e c^2}\hat{\vec{L}}\cdot\hat{\vec{S}}$$

Cómo sabemos: $\left(\hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}\right)^2 = \hat{\vec{L}}^2 + \hat{\vec{S}}^2 + 2\hat{\vec{L}}\cdot\hat{\vec{S}}$ y por lo tanto:

$$\hat{\vec{L}}\cdot\hat{\vec{S}} = \frac{1}{2}\left(\hat{\vec{J}}^2 - \hat{\vec{L}}^2 - \hat{\vec{S}}^2\right)$$

Ahora, note que el estado del electrón puede ser descrito por $|n, \ell, m_\ell, s, m_s\rangle$. Por lo tanto, dado que

$$\hat{\vec{L}}\cdot\hat{\vec{S}}\,|n, \ell, m_\ell, s, m_s\rangle = \frac{\hbar^2}{2}\left(j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)\right)|n, \ell, m_\ell, s, m_s\rangle,$$

es muy fácil darse cuenta que para el estado base $\ell = 0$ y $s = \frac{1}{2}$, $\hat{\vec{L}}\cdot\hat{\vec{S}}\,|0, 0, 0, 1/2, \pm 1/2\rangle = 0$.
Ahora, para el primer estado excitado, $\ell = 1$ y $m_\ell = -1, 0, 1$. Por lo tanto, para $n = 1$, $\ell = 1$, $m_{ell} = 1$, $s = 1/2$, $m_s = 1/2$

$$\hat{\vec{L}}\cdot\hat{\vec{S}}\,|1, 1, -1, 1/2, 1/2\rangle = \frac{\hbar^2}{2}(15/4 - 2 - 3/4)\,|1, 1, 1, 1/2, 1/2\rangle = \frac{\hbar^2}{2}$$

Esto se puede calcular para los otros valores de m_ℓ. Por lo tanto, tenemos:

$$E_1 = \frac{5}{2}\hbar\omega + \frac{\hbar^2\omega^2}{4m_e c^2}$$

3. Problema 3 (Pregrado) - 20 puntos

Suponga que un electrón en el átomo de Hidrógeno posee la siguiente función de onda

$$R_{2,1}\left[\sqrt{\frac{1}{3}}Y_1^0 \left|\uparrow\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}Y_1^1 \left|\downarrow\right\rangle\right]. \tag{1}$$

(a) (10 puntos) Si se realizara una medición de $\hat{L}^2$, ¿qué valores propios se obtendrían y con qué probabilidad?

(b) (5 puntos) Repita el inciso anterior con $\hat{L}_z$.

(c) (5 puntos) Si se hiciera una medición de $\hat{S}^2$ y $\hat{S}_z$, ¿qué valores propios se obtendrían y con que probabilidad?

Solución:

(a) Recordemos la función de onda

$$\psi(r,\theta,\phi) = R_{2,1}\left[\sqrt{\frac{1}{3}}Y_1^0 \left|\uparrow\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}Y_1^1 \left|\downarrow\right\rangle\right].$$

La cual, si reescribimos en términos de las funciones propias del átomo de Hidrógeno ψ_{n,ℓ,m_ℓ}, es:

$$\psi(r,\theta,\phi) = \sqrt{\frac{1}{3}}\psi_{2,1,0} \left|\uparrow\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\psi_{2,1,1} \left|\downarrow\right\rangle.$$

Si nos damos cuenta, todas las componentes de la función de onda poseen $\ell = 1$. Por tal cuestión vemos que el único valor que se puede medir de $\hat{L}^2$ es:

$$\hat{L}^2\psi_{n,1,m_\ell} = \hbar^2 1(1+1)\psi_{n,1,m_\ell} = 2\hbar^2\psi_{n,1,m_\ell}.$$

Por lo cual obtenemos el valor de $2\hbar^2$, con probabilidad 1.

(b) Si realizamos el mismo procedimiento anterior, pero ahora lidiando con $\hat{L}_z$, vemos que se pueden obtener los valores $m_\ell = 0, \hbar$ con probabilidades $p = \frac{1}{3}$ y $p = \frac{2}{3}$ respectivamente.

(c) Para este ejercicio empezamos escribiendo el estado de la siguiente forma

$$\left|\psi\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\left|2,1,0\right\rangle\left|\uparrow\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\left|2,1,1\right\rangle\left|\downarrow\right\rangle,$$

el cual, en términos de productos tensoriales entre los vectores $\left|n,\ell,m_\ell\right\rangle$ y $\left|s,m_s\right\rangle$, toma la forma

$$\left|\psi\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\left|2,1,0\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\left|2,1,1\right\rangle \otimes \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle. \tag{2}$$

En este caso, el operador $\hat{S}^2$ únicamente actúa sobre los estados de espín, de lo cual leemos automáticamente que los valores y sus correspondientes probabilidades son

$$s_1^2 = \hbar^2\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{3}{4}\hbar^2 = s_2^2 \rightarrow p = 1. \tag{3}$$

Así mismo vemos que para $\hat{S}_z$ nos queda:

$$(s_z)_1 = \frac{\hbar}{2} \rightarrow p = \frac{1}{3}; (s_z)_2 = -\frac{\hbar}{2}. \tag{4}$$

4. Problema 1 (Posgrado) - 30 puntos

Use métodos variacionales para encontrar la energía del estado base, para una partícula que se mueve en una dimensión, bajo la acción de un potencial de la forma

$$V(x) = \alpha x^2$$

Solución

Básicamente tenemos el oscilador armónico cuántico en una dimensión. Recordemos que en este caso el operador Hamiltoniano tiene la forma

$$\hat{H} = \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

con energías $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$. Note que el término de potencial en el Hamiltoniano es simétrico en $+x$ y $-x$, dada su forma cuadrática. Por otro lado, el término cinético impone que la función debe ser suave (diferenciable). Con esta formación, note que podemos proponer como función de prueba una gaussiana, es decir

$$\psi(x) = Ae^{-bx^2}.$$

Primero, encontramos la constante de normalización

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 \mathrm{d}x = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2bx^2} = |A|^2\sqrt{\frac{\pi}{2b}} = 1 \to A = \left(\frac{2b}{\pi}\right)^{1/4}.$$

Ahora, para encontrar la energía podemos usar el hecho que $\hat{H}$ tiene una parte cinética y una parte potencial, por lo cual podemos explotar la linealidad del valor esperado

$$\left\langle \hat{H} \right\rangle = \left\langle \hat{T} \right\rangle + \left\langle \hat{V} \right\rangle.$$

Calculemos cada uno de estos de forma individual. Para la energía cinética tenemos

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{T} \right\rangle = \langle\psi|\hat{T}|\psi\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \left(\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right)\psi \mathrm{d}x \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m}|A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-bx^2}(-2be^{-bx^2} + 4b^2x^2e^{-bx^2})\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m}|A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2bx^2} 2b(2bx^2 - 1)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\hbar^2 b}{m}\left(\frac{2b}{\pi}\right)^{1/2}\left[-b\frac{\partial}{\partial b}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2b}}\right) - \sqrt{\frac{\pi}{2b}}\right] \\
&= -\frac{\hbar^2 b}{m}\left(\frac{2b}{\pi}\right)^{1/2}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2b}} - \sqrt{\frac{\pi}{2b}}\right] \\
\left\langle \hat{T} \right\rangle &= -\frac{\hbar^2 b}{2m}.
\end{aligned}$$

Continuemos con la energía potencial

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{V} \right\rangle &= \frac{1}{2}\omega *^2 |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-2bx^2} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\omega^2 \left(\frac{2b}{\pi}\right)^{1/2} \left[-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial b} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2bx^2} \mathrm{d}x \right] \\
&= \frac{1}{2}\omega^2 \left(\frac{2b}{\pi}\right)^{1/2} \left[\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2b}}\frac{1}{b} \right] \\
\left\langle \hat{V} \right\rangle &= \frac{m\omega^2}{8b}.
\end{aligned}$$

Juntando ambos valores esperados, tenemos que el valor esperado del Hamiltoniano es

$$\left\langle \hat{H} \right\rangle = \frac{\hbar^2 b}{2m} + \frac{m\omega^2}{8b} \tag{5}$$

Ahora, busquemos el mínimo

$$\frac{\partial \left\langle \hat{H} \right\rangle}{\partial b} = \frac{\hbar^2}{2m} - \frac{m\omega^2}{8b^2} = 0.$$

Despejando llegamos a que

$$b^2 = \frac{m\omega}{2\hbar}. \tag{6}$$

Si reemplazamos este valor en la expresión para el valor esperado del Hamiltoniano nos queda que

$$\left\langle \hat{H} \right\rangle = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{m\omega}{2\hbar} + \frac{m\omega^2}{8}\frac{2\hbar}{m\omega} = \frac{1}{2}\hbar\omega \tag{7}$$

5. Problema 2 (Posgrado) - 30 puntos

Demuestre que si ϕ es un campo escalar la acción para el Lagrangiano

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{\hbar^2}{2m}\partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - \mathcal{V}(\phi) \tag{8}$$

es invariante ante transformaciones de Lorentz.

Solución

Consideremos primero la densidad lagrangiana transformada:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu \phi') = \frac{\hbar^2}{2m}\partial'_\mu \phi'(x') \eta'^{\mu\nu} \partial'_\nu \phi'(x') - \mathcal{V}(\phi'(x')) \tag{9}$$

al ser un campo escalar, ϕ no tiene índices de espín y por tanto $\phi'(x') = \phi(x')$, pero los cuadrigradientes ∂_μ transforman como $\partial'_\mu = \Lambda^\nu_\mu \partial_\nu$ mientras que el tensor métrico es invariante bajo transformaciones de Lorentz, $\eta'^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$. Por tanto, la densidad Lagrangiana transformada es:

$$\mathcal{L}'(\phi', \partial'_\mu \phi') = \frac{\hbar^2}{2m}\left[(\Lambda^\nu_\mu)\partial_\nu\right] \phi(x') \eta^{\mu\rho} \left[(\Lambda^\sigma_\rho)\partial_\sigma\right] \phi(x') - \mathcal{V}(\phi(x')) \tag{10}$$

Ahora, note que el primer término depende de la contracción $\Lambda_\mu^\nu \eta^{\mu\rho} \Lambda_\rho^\sigma$ que corresponde justamente a la relación de pseudo-ortogonalidad de las matrices de Lorentz, esta es

$$\Lambda_\mu^\nu \eta^{\mu\rho} \Lambda_\rho^\sigma = \eta^{\nu\sigma}. \tag{11}$$

Por tanto, la densidad Lagrangiana transformada es:

$$\mathcal{L}'(\phi', \partial_\mu' \phi') = \frac{\hbar^2}{2m} \partial_\mu \phi(x') \partial^\mu \phi(x') - \mathcal{V}(\phi(x')) \tag{12}$$

La acción transformada es por tanto,

$$S' = \frac{1}{c} \int d^4x' \mathcal{L}' = \int d^4x' \left[\frac{\hbar^2}{2m} \partial_\mu \phi(x') \partial^\mu \phi(x') - \mathcal{V}(\phi(x')) \right] \tag{13}$$

pero x' es solo una variable muda de integración, por tanto bajo el cambio de variable $x' \to x$ se tiene Que

$$S' = \frac{1}{c} \int d^4x' \left[\frac{\hbar^2}{2m} \partial_\mu \phi(x') \partial^\mu \phi(x') - \mathcal{V}(\phi(x')) \right] \tag{14}$$

$$= \frac{1}{c} \int d^4x \left[\frac{\hbar^2}{2m} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - \mathcal{V}(\phi(x)) \right] = S. \tag{15}$$

es decir que $S' = S$ y por tanto la acción es invariante ante transformaciones de Lorentz.

6. Problema 3 (Posgrado) - 30 puntos

Un bosón escalar se desintegra de manera espontanea un pareja fermión anti-fermión, bajo una interacción tipo Yukawa, es decir

$$\mathcal{L}_I = -g : \bar{\psi}\psi\phi : .$$

(a) (10 Puntos) Explique el significando físico de cada termino y realice el diagrama de Feynmman respectivo para la siguiente expresión

$$\mathcal{M}_{\hat{s}} \sim \left\langle \bar{\psi}\psi \middle| \phi(x_2)\phi(x_3)\bar{\psi}_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2)\bar{\psi}_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2) : \bar{\psi}_\gamma(x_3)\psi_\gamma(x_3)\phi(x_1) : \middle| \phi \right\rangle$$

(b) (20 Puntos) Escriba la expresión matemática para el elemento matricial $\mathcal{M}$. Debe incluir los espinores respectivos del proceso.

Solución:

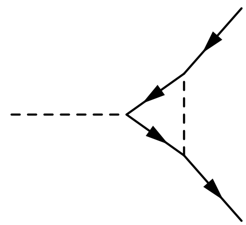
(a) (10 puntos) En primer lugar, es posible darnos cuenta que el único término del producto ordenado normalmente que no da una contribución nula a la matriz es aquel dado por

$$: \bar{\psi}_\beta(x_3)\psi_\gamma(x_3)\phi(x_1) := \bar{\psi}_-^\beta(x_2)\psi_-^\gamma(x_3)\phi_+(x_1)$$

Por ende

$$\mathcal{M}_{\hat{s}} \sim \left\langle \bar{\psi}\psi \middle| \phi(x_2)\phi(x_3)\psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2)\psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\gamma(x_3)\bar{\psi}_-^\beta(x_2)\psi_-^\gamma(x_3)\phi_+(x_1) \middle| \phi \right\rangle.$$

Interpretando el diagrama, vemos que este nos dice que la partícula escalar se aniquila en el punto x_1, se crea un fermión que viaja de x_1 a x_2 en conjunto con un anti-fermión que viaja de x_1 a x_3, además que en el punto x_2 se irradia un escalar que viaja hasta x_3. Este proceso puede ser ilustrado por el diagrama



(b) (20 Puntos) Para encontrar el elemento matricial $\mathcal{M}_s$, usamos las reglas de contracciónes, las cuales nos dejan con que la matriz S asociada al proceso buscado es

$$\begin{aligned} S^{(3)} =& (-ig)^3 \int d^4x_1 \int d^4x_2 \int d^4x_3 \\ & \times i\Delta_F\left(x_2 - x_3\right) iS_{F\beta\alpha}\left(x_2 - x_1\right) iS_{F\alpha\gamma}\left(x_1 - x_3\right) \\ & \times \left\langle \psi(p)\bar{\psi}\left(p'\right)\right| \bar{\psi}-^{\beta}\left(x_2\right)\psi-^{\gamma}\left(x_3\right)\phi_+\left(x_1\right)\left|\phi(k)\right\rangle \end{aligned}$$

Ahora, recordamos que las expresiones explicitas para los campos en términos de los operadores de creación y aniquilación son:

$$\begin{aligned} S^{(3)} = (-ig)^3 & \int d^4x_1 \int d^4x_2 \int d^4x_3 \int \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q_3}{(2\pi)^4} \\ & \times i\Delta_F\left(q_1\right) e^{-iq_1\cdot(x_2-x_3)} \\ & \times iS_{F\beta\alpha}\left(q_2\right) e^{-iq_2\cdot(x_2-x_1)} iS_{F\alpha\gamma}\left(q_3\right) e^{-iq_3\cdot(x_1-x_3)} \\ & \times \left[\frac{e^{-ik\cdot x_1}}{\sqrt{2\omega_k V}} \frac{\bar{u}_s^{\beta}(\boldsymbol{p}) e^{ip\cdot x_2}}{\sqrt{2E_p V}} \frac{v_{s'}^{\gamma}\left(\boldsymbol{p}'\right) e^{ip'\cdot x_3}}{\sqrt{2E_{p'} V}}\right] \end{aligned}$$

Integrando sobre las posiciones, obtenemos que las funciones exponenciales corresponden a deltas de Dirac, por lo cual:

$$\begin{aligned} S^{(3)} = (-ig)^3 & \int \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q_3}{(2\pi)^4} (2\pi)^{12} \delta^4(k - q_2 + q_3)\delta^4(q_1 + q_2 - p)\delta^4(k - p - p') \\ & \times i\Delta_F(q_1)[\bar{u}_s(p) \times iS_F(q_2) \times iS_F(q_3) v_{s'}(p')] \left[\frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}} \frac{1}{\sqrt{2E_p V}} \frac{1}{\sqrt{2E_{p'} V}}\right]. \end{aligned}$$

Aplicando los delta, obtenemos que dos de las integrales se reducen. Por ende, la matriz es ahora

$$\begin{aligned} S^{(3)} =& (-ig)^3 (2\pi)^4 \delta^4(k - p - p') \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} i\Delta_F(q)[\bar{u}_s(p) \times iS_F(p - q) \\ & \times iS_F(p - q - k) v_{s'}(p')] \left[\frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}} \frac{1}{\sqrt{2E_p V}} \frac{1}{\sqrt{2E_{p'} V}}\right]. \end{aligned}$$

Luego, podemos leer inmediatamente la matriz $\mathcal{M}_s$:

$$\mathcal{M} = (-ig)^3 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} i\Delta_F(q)[\bar{u}_s(p) \times iS_F(p - q) \times iS_F(p - q - k) v_{s'}(p')]$$

Examen de Conocimientos – Mecánica Estadística

Departamento de Física, Universidad de los Andes
Programa de Doctorado en Ciencias – Física

Semestre 2024-2

Nombre y Código: ______________________________

INSTRUCCIONES

El examen abarca dos partes: pregrado y posgrado. Para cada parte: (i) resuelva dos de los tres problemas propuestos; (ii) los problemas tienen el mismo valor.

1. Los problemas deben ser resueltos en hojas separadas.
2. No se dará crédito extra si entrega la solución a un tercer problema. En tal caso, solo dos soluciones se tendrán en cuenta, a voluntad del calificador.
3. Para obtener el puntaje total debe tener un desarrollo claramente explicado y apropiadamente justificado; sea breve pero preciso.
4. El examen se debe resolver de forma individual.
5. No se permite el uso de libros, apuntes o dispositivos electrónicos.
6. El incumplimiento de estas instrucciones llevará a una nota final de cero.
7. **Duración del examen**: tres horas.

Nota: Durante el examen se proporcionarán a los estudiantes las fórmulas y expresiones necesarias para resolver los problemas.

PREGUNTA	PUNTOS	NOTA
1. Teorema de equipartición	20	
2. Ley de Curie	20	
3. Gas ideal diatómico	20	
4. Molécula unidimensional	30	
5. Fermiones en dos dimensiones	30	
6. Bosones en dos dimensiones	30	
Total:	100	

1. Preguntas de pregrado

Pregunta 1. Teorema de equipartición .... (20 puntos)

Considere un sistema de N osciladores armónicos clásicos en tres dimensiones espaciales. Los osciladores tienen la misma frecuencia natural de oscilación ω_0 y están a una energía fija E. Calcule la entropía S y la temperatura T del sistema de osciladores. Discuta brevemente el significado físico de sus resultados.

Sugerencia: Adimensionalice el hamiltoniano introduciendo el cambio de variables

$$p_j^2 = 2m\eta_j^2, \quad q_j^2 = \frac{2}{m\omega_0^2}\eta_{3N+j}^2, \quad j = 1, \ldots, 3N$$

de forma que la energía es $E = \sum_{j=1}^{6N} \eta_j^2$ y el volumen en el espacio de fase es calculado para un sistema de $6N$ grados de libertad (más fácil de calcular).

Pregunta 2. Ley de Curie .... (20 puntos)

Una red en tres dimensiones tiene N sitios. Cada uno es ocupado por una partícula con momento magnético $\boldsymbol{\mu}$ y está en contacto con un baño térmico a temperatura T. Suponga que los átomos no interactúan entre sí pero tienen una energía potencial debido a la presencia de una campo magnético uniforme externo $\mathbf{H} = H_0\hat{\mathbf{z}}$. Encuentre la magnetización y la susceptibilidad magnética por sitio (momento).

Pregunta 3. Gas ideal diatómico .... (20 puntos)

Un gas ideal clásico está compuesto de N moléculas diatómicas, cada una con un momento dipolar eléctrico bien definido $\boldsymbol{\mu}$. El gas está confinado dentro de una caja de volumen V y está en presencia de un campo eléctrico uniforme $\mathbf{E}$. Ignore la interacción entre moléculas. Calcule la polarización eléctrica y la constante dieléctrica en el límite $|\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{E}| \ll \beta^{-1} = k_B T$.

2. Preguntas de posgrado

Pregunta 4. Molécula unidimensional .... (30 puntos)

Un modelo de una molécula elástica consiste en una cadena en una dimensión compuesta de N enlaces (*bonds or links*). El estado de cada enlace se puede representar con dos números cuánticos. (i) La longitud posible de cada enlace ℓ, la cual puede tener valores a o b, como se muestra en la Figura de abajo. (ii) El estado vibracional de cada enlace, que se modela como un oscilador armónico con frecuencia angular ω_a para $\ell = a$ y ω_b para $\ell = b$. La energía del estado vibracional es

$$E(n,\ell) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \begin{cases} \hbar\omega_a, & \ell = a \\ \hbar\omega_b, & \ell = b \end{cases}, \qquad n = 1, 2, 3 \ldots$$

Suponga que la molécula (la cadena) se encuentra en contacto con una baño térmico a temperatura T y es sometida a una tensión F en sus extremos como lo muestra la figura de abajo.

(a) Determine la función de partición de la molécula. Puede usar el ensamble que desee; sin embargo, le sugerimos que el ensamble isobárico para simplificar los cálculos.

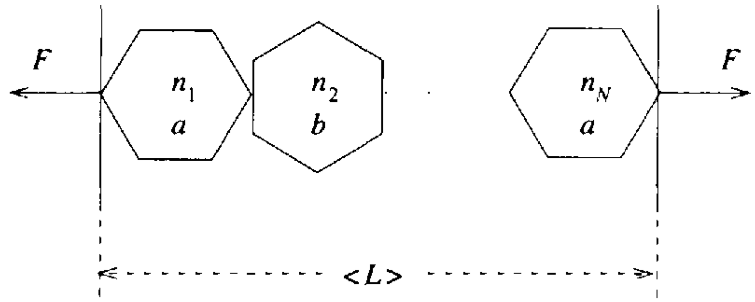


Figura 1: Diagrama referente a la Pregunta 4. Molécula unidimensional.

(b) Encuentre la energía promedio de la cadena como función de la temperatura, la tensión y las energías del punto cero de cada estado vibracional.

(c) Calcule la longitud promedio de la molécula. En el ensamble isobárico se puede encontrar como la derivada del logaritmo de la función de partición con respecto a βF, donde $\beta = 1/kT$. La longitud de la cadena está dada por $L = \sum_{j=1}^{N} \ell_j$.

(d) Analice los límites de temperaturas baja y alta para la longitud media. Interprete sus resultados en términos físicos.

Pregunta 5. Fermiones en dos dimensiones .... (30 puntos)

Considere un gas de N fermiones no relativistas y no interactuantes con masa m y espín s que se mueven en una superficie cuadrada cuya área total se denota como A.

(a) Calcule la densidad de estados de una sola partícula $g(E)$ como función de la energía E, la masa m y el área A.

Sugerencia: Empiece calculando la densidad de estados en espacio de momento, y luego transforme a espacio de energía.

(b) Determine la energía de Fermi E_F de todo el gas como una función de la densidad de partículas $\rho = N/A$.

(c) Encuentre la energía total por partícula E/A y la presión del gas a temperatura cero ($T = 0$) como una función de la densidad.

(d) Un recipiente está separado en dos compartimentos por un pistón deslizante. Dos gases de Fermi bidimensionales con espín $1/2$ y $3/2$, pero con la misma masa se ubican en los compartimentos izquierdo y derecho, respectivamente. Determine la relación entre las densidades de los dos gases en equilibrio para $T = 0$.

Pregunta 6. Bosones en dos dimensiones .... (30 puntos)

Considere un gas de fotones que no interactúan en dos dimensiones, confinado en un área cuadrada $A = L^2$ con condiciones de contorno periódicas y mantenido a temperatura T.

(a) Determine los valores permitidos del número de onda del fotón $\mathbf{k}$ y la frecuencia ω. Calcule la densidad de estados $g(\omega)$ de los fotones.

Sugerencia: Empiece calculando la densidad de estados en espacio de momento, y luego transforme a espacio de frecuencia.

(b) Escriba una expresión para $\ln Z(T)$ como una integral sobre la frecuencia del fotón ω, donde $Z(T)$ es la función de partición cuántica del ensamble gran canónico del gas.

(c) La densidad de energía total U/A del gas se puede escribir como una integral sobre la frecuencia del fotón:

$$\frac{U}{A} = \int_0^\infty d\omega\, u(\omega, T).$$

Encuentre la función $u(\omega, T)$ y determine la dependencia con la temperatura.

(d) Calcule la entropía por fotón y muestre que es independiente tanto de la temperatura T como del área A. Exprese sus resultados finales en términos de integrales adimensionales; no hay necesidad de evaluarlas explícitamente.

3. Fórmulas útiles

$$V_d(R) = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2+1)} R^d \qquad \text{(volumen de una } d\text{-esfera)}$$

$$\ln(n!) \approx n\ln(n) - n \qquad \text{(aproximación de Stirling)}$$

$$S(E,N) = k_B \ln\left(\frac{\Omega(E,N)}{h^{3N}}\right) \qquad \text{(entropía para el ensamble } \mu\text{-canónico)}$$

$$L(x) = \coth(x) - \frac{1}{x} \approx \frac{x}{3}, \text{ para } x \ll 1 \qquad \text{(función de Langevin)}$$

$$\int_0^\pi d\theta \sin\theta e^{x\cos\theta} = \frac{2}{x}\sinh(x)$$

$$\sum_{n=0}^\infty e^{-(n+1/2)x} = \frac{1}{2\sinh(x/2)}$$

$$\lim_{x\to\infty} \sinh(x) = e^x$$

$$\lim_{x\to\infty} \coth(x) = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \sinh(x) = x$$

$$\lim_{x\to 0} \coth(x) = \frac{1}{x}$$

Problema 1

El hamiltoniano del sistema es

$$H = \sum_{j=1}^{3N} \left(\frac{p_j^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 q_j^2 \right),$$

donde hemos rotulado los grados de libertad de la k-ésima partícula como $p_j^k = p_{3k+j}$, $j = 1(x), 2(y), 3(z)$.

Conociendo la energía E es conveniente usar el ensamble μ-canónico. El volumen en el espacio de fase es

$$V(E,N) = \int_{H=E} \prod_{j=1}^{3N} dp_j \, dq_j .$$

introduciendo las variables

$$p_j^2 = 2m\eta_j^2 , \quad q_j^2 = \frac{2}{m\omega_0^2}\eta_{3N+j}^2 , \quad j = 1, \ldots, 3N,$$

la energía es $E = \sum_{j=1}^{6N} \eta_j^2$ y el volumen se convierte en

$$V(E,N) = \left(\frac{2}{\omega_0}\right)^{3N} \int \prod_{j=1}^{6N} d\eta_j = \left(\frac{2}{\omega_0}\right)^{3N} \frac{\pi^{3N}}{3N\,\Gamma(3N)} E^{3N} .$$

La entropía se calcula a partir del volumen de un cascarón de grosor ΔE

$$\Omega(E,N) = \Delta E \frac{\partial V}{\partial E} = \left(\frac{2}{\omega_0}\right)^{3N} \frac{\pi^{3N} E^{3N}}{\Gamma(3N)} \frac{\Delta E}{E}$$

usando la relación

$$S(E,N) = k_B \ln\left(\frac{\Omega}{h^{3N}}\right) \simeq 3Nk_B \left[\ln\left(\frac{2\pi E}{3h\omega_0 N}\right) + 1 \right]$$

La temperatura del sistema es

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_N = 3Nk_B \frac{1}{E}.$$

Por lo tanto, la energía promedio por oscilador es $3k_BT$, lo que concuerda con el teorema de equipartición de la energía.

Problema 2

Como los momentos magnéticos no interactúan entre sí, entonces la función de partición es el producto de funciones de partición de un solo momento magnético:

$$Z(T, H_0, N) = \prod_{j=1}^{N} \int d\Omega_j \, e^{-\beta E_j} = \prod_{j=1}^{N} Z_j.$$

Si el momento magnético j-ésimo subtiende un ángulo θ_j con $\vec{H}$, la energía potencial es $E_j = -\vec{\mu}_j \cdot \vec{H}(\vec{r}_j) = -\mu H_0 \cos\theta_j$. Entonces

$$\int d\Omega_j \, e^{-\beta E_j} = \int_0^{\pi} d\theta_j \, 2\pi \sin\theta_j \, e^{\beta\mu H_0 \cos\theta_j} = Z_j$$

para la función de partición de un sitio j. La función total es

$$Z(T, H_0, N) = (4\pi)^N \prod_{j=1}^{N} \frac{\sinh(\beta\mu H_0)}{\beta\mu H_0}$$

La magnetización promedio del sitio j es

$$M_j = \frac{\partial}{\partial(\beta H_0)} \ln Z_j = \mu \coth(\beta\mu H_0) - \frac{1}{\beta H_0}$$

La susceptibilidad magnética se deriva a partir de

$$\chi_H = \lim_{H_0 \to 0} \left(\frac{\partial M_j}{\partial H_0} \right) = \frac{\mu^2}{3k_B T}$$

que corresponde a la ley de Curie para materiales paramágneticos.

Problema 3

El hamiltoniano del sistema es

$$H = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\vec{p}_j^{\,2}}{2m} - \vec{\mu}_j \cdot \vec{E} \right),$$

$\vec{\mu}_j \equiv$ mom dipolar elec.
$\vec{E} \equiv$ campo elec externo.

La función de partición se puede escribir de la forma

$$Z = \frac{1}{N!} (Z_{Kin,1})^N (Z_{E,1})^N,$$

donde $Z_{Kin,1}$ ($Z_{E,1}$) se refiere a la función de partición de la energía cinética (potencial eléctrica) de una partícula que compone el gas.

La polarización del gas está definida como

$$\vec{P} = \frac{1}{V} \sum_{j=1}^{N} \langle \vec{\mu} \rangle = \frac{1}{V} \frac{\partial (\ln Z)}{\partial (\beta \vec{E})},$$

donde la ecuación debe entenderse componente a componente. Note que para encontrar $\vec{P}$ solo debemos considerar la parte eléctrica de Z. Suponiendo que $\vec{E} = E_z \hat{z}$, entonces

$$Z_{E,1} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \, e^{\beta \mu E_z \cos\theta} = 4\pi \frac{\sinh(\beta \mu E_z)}{\beta \mu E_z}$$

donde $\mu = |\vec{\mu}|$ y hemos usado coordenadas esféricas. La polarización es entonces $\vec{P} = P_z \hat{z}$, donde

$$P_z = \frac{N}{V} \frac{\partial Z_{E,1}}{\partial(\beta E_z)} = \frac{N}{V} \mu \left[\coth(\beta \mu E_z) - \frac{1}{\beta \mu E_z} \right].$$

La constante dieléctrica se encuentra a partir de $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, donde $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}$. En este caso

$$D_z = E_z + 4\pi P_z = E_z \left(1 + 4\pi \frac{P_z}{E_z} \right) =: E_z \varepsilon .$$

En el límite $\mu E_z \ll \beta^{-1}$ (campo bajo), P_z es lineal en E_z. De la ecuación de arriba:

$$P_z = \frac{N}{V} \mu \left[\frac{\beta \mu E_z}{3} \right] = \frac{N}{V} \frac{\mu^2}{3 k_B T} E_z$$

$$\Longrightarrow \qquad \varepsilon = 1 + 4\pi \frac{N}{V} \frac{\mu^2}{3 k_B T} .$$

Problema 4

(a) Que el sistema esté a una tensión fija se puede entender como que está a una presión $P = -F$. Como la longitud L no está restringida los estados de los enlaces son independientes y la función de partición es

$$X(T,F,N) = \left[X_{link}(T,F) \right]^N,$$

donde X_{link} es la función de partición de un solo enlace (link):

$$X_{link} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=a}^{b} e^{\beta F l} e^{-\beta\hbar\omega_l (n+1/2)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{\beta F a} e^{-\beta\hbar\omega_a (n+1/2)} + e^{\beta F b} e^{-\beta\hbar\omega_b (n+1/2)} \right)$$

$$= \frac{e^{\beta F a}}{2\sinh(\beta\hbar\omega_a/2)} + \frac{e^{\beta F b}}{2\sinh(\beta\hbar\omega_b/2)} .$$

(b) La energía promedio es

$$\langle E \rangle = -\left[\frac{\partial \ln X}{\partial \beta} \right] = -N \left[\frac{\partial (\ln X_{link})}{\partial \beta} \right]$$

$$= \frac{N\hbar}{2} \frac{\omega_a e^{\beta F a} \coth(\beta\hbar\omega_a/2) \sinh(\beta\hbar\omega_b/2) + (a \leftrightarrow b)}{e^{\beta F a} \sinh(\beta\hbar\omega_b/2) + e^{\beta F b} \sinh(\beta\hbar\omega_a/2)}$$

(c) La longitud promedio es:

$$\langle L \rangle = \left[\frac{\partial \ln X}{\partial (\beta F)} \right] = N \left[\frac{\partial (\ln X_{link})}{\partial (\beta F)} \right]$$

$$= N \frac{a e^{\beta F a} \sinh(\beta\hbar\omega_b/2) + b e^{\beta F b} \sinh(\beta\hbar\omega_a/2)}{e^{\beta F a} \sinh(\beta\hbar\omega_b/2) + e^{\beta F b} \sinh(\beta\hbar\omega_a/2)}$$

(d) a bajas temperaturas $\beta\hbar\omega_e/2 \to \infty$, $\sinh(\beta\hbar\omega_e/2) \to e^{\beta\hbar\omega_e/2}$ y $\coth(\beta\hbar\omega_e/2) \to 1$. Entonces:

$$\langle L\rangle \approx N \frac{a e^{\beta(Fa+\hbar\omega_b/2)} + b e^{\beta(Fb+\hbar\omega_a/2)}}{e^{\beta(Fa+\hbar\omega_b/2)} + e^{\beta(Fb+\hbar\omega_a/2)}}$$

$$\approx \begin{cases} Na, & (b-a)F < \dfrac{\hbar\omega_b - \hbar\omega_a}{2} \\ Nb, & (b-a)F > \dfrac{\hbar\omega_b - \hbar\omega_a}{2} \end{cases}$$

Cada enlace tiene la misma longitud. Cual longitud (a o b) dependerá del trabajo hecho por F sobre la cadena y de la diferencia de energías de punto cero de cada longitud.

a altas temperaturas, $e^{\beta F\ell} \to 1$, $\sinh(\beta\hbar\omega_e/2) \to \beta\hbar\omega_e/2$ y $\coth(\beta\hbar\omega_e/2) \to 2/\beta\hbar\omega_e$. En este caso:

$$\langle L\rangle \approx N \frac{a\omega_b + b\omega_a}{\omega_b + \omega_a}.$$

Cuando $\omega_a = \omega_b$, $\langle L\rangle \approx N(a+b)/2$ y cada configuración contribuye lo mismo. La tensión F no es relevante.

Problema 5

(a) En el espacio de momento, para una partícula, la densidad de estados es $A/(2\pi)^2$. Para una partícula con espín s tenemos

$$g(\vec{k}) = (2s+1)\frac{A}{(2\pi)^2}$$

Para partículas no relativistas la dispersión es $E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$; entonces

$$g(\vec{k})\, d^2k = (2s+1)\frac{A}{(2\pi)^2} d^2k = (2s+1)\frac{A}{(2\pi)^2} 2\pi k\, dk$$

$$= (2s+1)\frac{A}{2\pi}\frac{m}{\hbar^2} dE = g(E)\, dE$$

$$\Rightarrow \quad g(E) = (2s+1)\frac{A}{2\pi}\frac{m}{\hbar^2}$$

(b) Con un número de partículas N en el gas, la energía de Fermi es

$$N = \int_0^{E_F} dE\, g(E) = (2s+1)\frac{A}{2\pi}\frac{m}{\hbar^2} E_F$$

$$\Rightarrow \quad E_F = \frac{1}{2s+1}\frac{2\pi\hbar^2}{m}\rho, \qquad \rho = N/A$$

(c) Teniendo E_F, a $T=0$ la energía total es

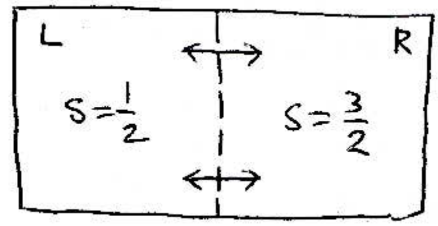
$$E = \int_0^{E_F} dE\, g(E)\, E = (2s+1)\frac{A}{2\pi}\frac{m}{\hbar^2}\frac{E_F^2}{2} = A\frac{\pi\hbar^2\rho^2}{(2s+1)m}$$

$$= N\frac{1}{2s+1}\frac{\pi\hbar^2}{m}\rho \quad \Rightarrow \quad \frac{E}{N} = \frac{1}{2s+1}\frac{\pi\hbar^2}{m}\rho = \frac{E_F}{2}$$

La presión está dada por

$$P = -\frac{\partial E}{\partial A} = \frac{1}{2s+1}\frac{\pi\hbar^2}{m}\frac{N^2}{A^2} = \frac{1}{2s+1}\frac{\pi\hbar^2}{m}\rho^2$$

(d) La condición de equilibrio a $T=0$ está dada por la igualdad de presiones a cada lado del pistón. Entonces



$$P_{s=1/2} = \frac{\pi\hbar^2}{2m}\rho_L^2$$

$$P_{s=3/2} = \frac{\pi\hbar^2}{4m}\rho_R^2$$

$$\Longrightarrow \quad P_{s=1/2} = P_{s=3/2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\rho_L^2}{2} = \frac{\rho_R^2}{4}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\rho_R}{\rho_L} = \sqrt{2}$$

Problema 6

(a) Un fotón con momento $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ tiene energía $E_k = \hbar\omega_k$, donde $\omega_k = c|\vec{k}|$. Para condiciones periódicas $\vec{k} = \frac{2\pi}{L}\vec{n}$, $\vec{n} = n_x\hat{x} + n_y\hat{y}$ donde $n_x, n_y \in \mathbb{Z}$.

La cantidad de estados permitidos en espacio de momento es

$$\frac{L^2}{(2\pi)^2} d^2k = \frac{L^2}{(2\pi)^2} 2\pi k\, dk = \frac{L^2}{2\pi c^2}\omega\, d\omega$$

$$\Rightarrow \quad g(\omega) = \frac{A}{2\pi c^2}\omega$$

(b) La función de partición del gas es

$$Z(T) = \prod_{\vec{k}} \sum_{n_k=0}^{\infty} e^{-\beta E_k n_k} = \prod_{\vec{k}} \left(1 - e^{-\beta E_k}\right)^{-1},$$

donde n_k es el número de fotones con momento k y energía E_k.

Tomando logaritmo

$$\ln Z(T) = -\sum_{\vec{k}} \ln\left(1 - e^{-\beta E_k}\right) \xrightarrow[L\to\infty]{} -\int_0^\infty d\omega\, g(\omega) \ln\left(1 - e^{-\beta\hbar\omega}\right)$$

$$= -\frac{A}{2\pi c^2}\int_0^\infty d\omega\, \omega \ln\left(1 - e^{-\beta\hbar\omega}\right)$$

(c) La densidad de energía total es

$$\frac{U}{A} = \frac{-1}{A}\frac{\partial(\ln Z)}{\partial\beta} = \frac{\hbar}{2\pi c^2}\int_0^\infty d\omega\, \frac{\omega^2 e^{\beta\hbar\omega}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}$$

$$= \int_0^\infty d\omega\, u(\omega, T)$$

donde la función $u(\omega,T)$ está dada por

$$u(\omega,T) = \frac{\hbar}{2\pi c^2}\frac{\omega^2}{e^{\beta\hbar\omega}-1}$$

La dependencia con T es cuadrática para $u(\omega,T)$, mientras que para $U/A \sim T^3$. Esto se puede corroborar definiendo la variable adimensional $z := \beta\hbar\omega$ y reescribiendo U/A en términos de z.

(d) De la energía libre $F = -k_B T \ln Z$, la entropía es

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_A = -\frac{A k_B}{2\pi c^2}\frac{\partial}{\partial T}\left[T\int_0^\infty d\omega\, \omega \ln(1-e^{-\beta\hbar\omega})\right]$$

$$= -\frac{A k_B^3}{2\pi c^2\hbar^2}\frac{\partial}{\partial T}\left[T^3\int_0^\infty dz\, z \ln(1-e^{-z})\right] \approx AT^2$$

El número de partículas está dado por

$$N = \int_0^\infty d\omega\, g(\omega)\langle n_\omega\rangle = \frac{A}{2\pi c^2}\int_0^\infty d\omega\, \omega\,(e^{\beta\hbar\omega}-1)^{-1}$$

$$= \frac{A k_B^2 T^2}{2\pi\hbar^2 c^2}\int_0^\infty dz\, \frac{z}{e^z-1} \approx AT^2$$

Por lo tanto, la entropía por partícula S/N es independiente del área A y la temperatura T.