Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos 2023 - I
Electrodinámica
21 de julio de 2023

Instrucciones: El examen comprende dos partes: problemas de nivel de pregrado (parte I) y problemas de nivel de postgrado (parte II). Para cada parte debe resolver dos de los tres problemas propuestos en hojas separadas. No se dará crédito parcial si decide entregar la solución a un tercer problema, y en tal caso, solo dos de las soluciones se tendrán en cuenta, a voluntad del calificador. En cada parte, todos los problemas tienen el mismo valor. No se permite el uso de libros, apuntes, dispositivos electrónicos o cualquier tipo de ayuda.

Duración: 3 horas.

PARTE I. Resuelva dos de los siguientes tres problemas (20 puntos c/u).

PROBLEMA 1.

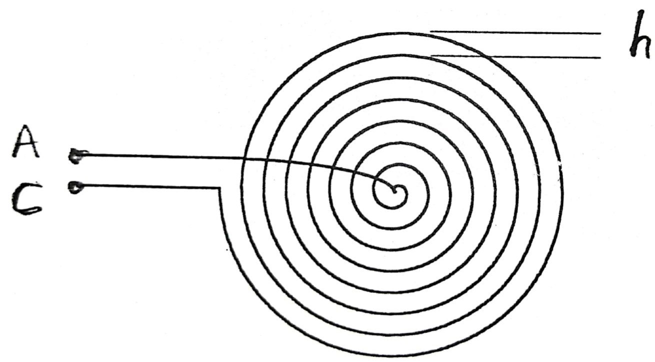
Viaje interestelar. Una nave interestelar parte de la Tierra desde el reposo, con una aceleración propia g constante y se dirige hacia el cúmulo abierto de las Pléyades, el cual se encuentra a una distancia de 425 al (años-luz). El año-luz se define como la distancia que la luz recorre en un año, es decir $1\,al = 9,46053 \times 10^{15}\,m$, al tomar la velocidad de la luz en el vacio como $c = 2,99792458 \times 10^{8}\,m\,s^{-1}$.
a. (3 puntos) Si se miden las distancias en al y la velocidad en unidades de c, es decir $c = 1$, calcular el valor de la aceleración de la gravedad terrestre $g = 9,8\,m\,s^{-2}$ en estas unidades. Redondear el valor de g al primer decimal.
b. (13 puntos) Calcular el cuadrivector de posición (la línea de mundo) para el cohete en función del tiempo propio de la nave, asumiendo que cuando la nave parte de la Tierra, $t = 0$ en el sistema de referencia de la Tierra y $\tau = 0$ el tiempo propio de la nave. Tomar el origen de coordenadas en la Tierra.
c. (4 puntos) Suponga que el cohete en su viaje hacia las Pléyades parte de la Tierra con aceleración propia $g = 9,8m\,s^{-2}$ hasta alcanzar la mitad del camino y luego frena en el resto del viaje, con la misma aceleración propia. Calcular el tiempo en llegar hasta la mitad del camino y hasta las Pléyades, medido en el sistema de la Tierra, y en el cohete.

PROBLEMA 2.

Velocidad terminal. Una espira circular de diámetro D, resistencia total R y masa total M, cae desde una gran altura h en un campo magnético cuya componente z tiene la dependencia $B_z = B_0\,(1 + Kz)$, donde K es una constante. El plano de la espira se mantiene siempre paralelo al plano $x - y$. Despreciando la resistencia del aire y la autoinducción de la espira, encuentre la velocidad terminal de la espira.

PROBLEMA 3

***fem* inducida.** Una bobina plana enrollada en espiral, con una separación entre espiras de h, y un número total de vueltas N, se coloca en un campo magnético uniforme perpendicular al plano de la bobina $B = B_0 \cos(\omega t)$. Calcule la *fem* inducida en la bobina, entre los puntos A y C.



PARTE II. Resuelva dos de los siguientes tres problemas (30 puntos c/u).

PROBLEMA 4.

Onda plana. Sea una onda plana de frecuencia ω, polarizada con el campo eléctrico paralelo al eje x, que incide perpendicularmente en la dirección del eje z, sobre un buen conductor plano de conductividad $\sigma(\omega)$.
a. (20 puntos) Obtener los campos transmitidos y reflejados en la aproximación de buen conductor $\sigma/\omega_\epsilon \gg 1$.
b. (10 puntos) Calcular la penetración (skin depth) en la que los campos decaen en un factor proporcional a e^{-1} hacia el interior del conductor.

PROBLEMA 5.

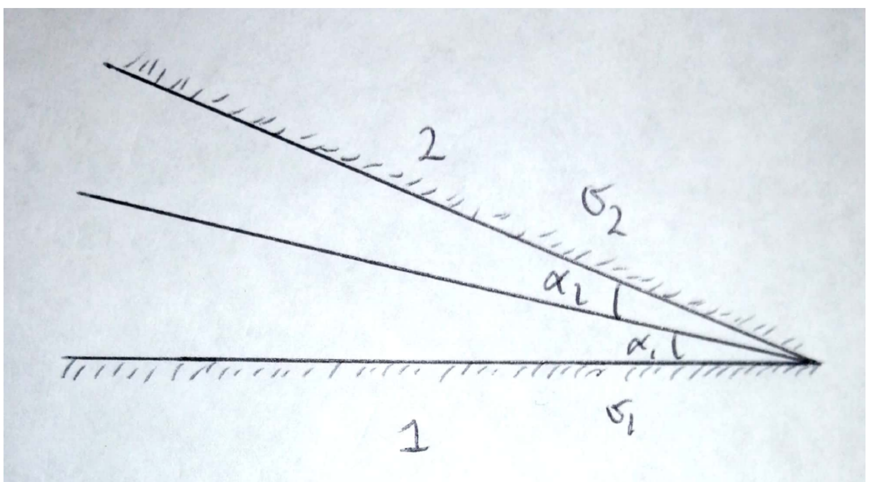
Densidad de flujo. Un conductor cilindrico de radio a tiene un hoyo cilindrico de radio b paralelo al eje del cilindro y centrado a una distancia D de dicho eje, de tal manera que se satisface que $D + b < a$. Existe una densidad de corriente uniforme J en el resto macizo del conductor, paralela al eje.
a. (15 puntos) Encuentre la magnitud y dirección de la densidad de flujo magnetico B en todas partes.
b. (15 puntos) Demuestre que la integral del vector de Poynting (o el flujo de energía entrante) sobre toda el área superficial externa es igual a la potencia disipada por el cilindro.
Ayuda:

$$\int \frac{u - v\cos\phi}{u^2 + v^2 - 2uv\cos\phi}\, d\phi = \frac{2\pi}{u}$$

Con $u > v \geq 0$

PROBLEMA 6

Condensador. Sea un condensador formado por dos planos conductores separados por dos capas dieléctricas de constantes ε_1 y ε_2, siendo la frontera entre ellas un tercer plano, que forma ángulos pequeños α_1 y α_2 con los conductores, respectivamente. Los conductores forman entre ellos un ángulo pequeño $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, siendo además sus dimensiones líneales mucho mayores que la distancia entre sus bordes, de modo que el efecto de estos en el campo eléctrico entre ellos es despreciable, excepto muy cerca de ellos.
a. (20 puntos) Encontrar la condición entre ε_1, ε_2, α_1 y α_2 para que exista una solución de campo uniforme en cada dieléctrico.
b. (10 puntos) Dada la densidad de carga σ_1 del primer conductor, encontrar los campos y también la densidad de carga σ_2 en el segundo conductor.



Ecuaciones de Maxwell en un medio lineal y relaciones constitutivas

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\rm f} \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\rm f} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M} \qquad \frac{\partial \rho_{\rm f}}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_{\rm f}$$

Fórmula de Larmor: $P = \mu_0 q^2 a^2/6\pi c$. Vector de Poynting: $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$

Identidades vectoriales:

$$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} \qquad \vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

Operaciones diferenciales en coordenadas esféricas:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\varphi} \qquad \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\varphi \sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right)\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r A_\varphi)\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\hat{\varphi}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Operaciones diferenciales en coordenadas cilíndricas:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z} \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\hat{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\hat{\varphi} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\varphi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right)\hat{z}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Polinomios de Legendre:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n \qquad P_0(x) = 1 \qquad P_1(x) = x \qquad P_2(x) = \frac{3x^2-1}{2} \qquad P_3(x) = \frac{5x^3-3x}{2}$$

$$\int_{-1}^{1} P_l(x) P_{l'}(x)\,dx = \int_0^{\pi} P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & l \neq l' \\ \frac{2}{2l+1}, & l = l' \end{array} \right\}$$

Constantes útiles (a cuatro cifras significativas)

$$e = 1{,}602 \times 10^{-19}\,C \qquad m_e = 9{,}109 \times 10^{-31}\,kg = 511{,}0\,keV c^{-2} \qquad c = 2{,}998 \times 10^{8}\,ms^{-1} \qquad \mu_0 = 1{,}2566 \times 10^{-6}\,N \cdot A^{-2}$$

$$\epsilon_0 = 8{,}854 \times 10^{-12}\,F \cdot m^{-1} \qquad \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = 1/137{,}0 \qquad \hbar c = 197{,}3\,eV \cdot nm$$

1.a **PROBLEMA 1** ~~tenemos que~~ en unidades de $\underline{\text{SOLUCIÓN}}$ $c=1$

$c=1=2.99792458\times10^{8}\ m/s \Rightarrow$

$2.99792458\times10^{8}\,m=1s \quad (1)$

del valor del problema reportado para un al (año-luz) tenemos:

$1m=\dfrac{1}{9.46053\times10^{15}}\ al \ (2)$; así de (1)

$g=9.8\ m/s^2=9.8m*(2.99792458\times10^{8}m)^{-2}$

$g=1.0904\times10^{-16}m^{-1}$ de (2)

$g=1.0904\times10^{-16}*9.46053\times10^{15}\ al^{-1}$

$g=1.0316\ al^{-1}$ que se aproxima a $\boxed{g\simeq1\ al^{-1}}$

1.b Tomando el eje x en la dirección de la llegada, el cuadrivector de posición del cohete es:

$x(\tau)=(x^0(\tau),x^1(\tau),0,0)$.

Vamos a calcular el cuadrivector de velocidad del cohete, y al integrar, encontraremos la respuesta de $x(\tau)$.

Como $U=\dfrac{dx}{d\tau}=(U^0,U^1,0,0)$

$A=\dfrac{dU}{d\tau}=(A^0,A^1,0,0)$

Como la aceleración propia es constante, se tiene que:

$U^2=(U^0)^2-(U^1)^2=c^2 \quad (1)$

$A^2=((A^0)^2-(A^1)^2)=-g^2 \quad (2)$

y $U \cdot A = 0 = U^0 A^0 - U^1 A^1$ (3)

Despejando A^0 de (3) y reemplazando en (2), se tiene:

$$-g^2 = -c^2 \frac{(A^1)^2}{(U^0)^2} \Rightarrow A^1 = \frac{g}{c} U^0 \quad (4)$$

Despejando A^1 de (3) y reemplazando en (2), se tiene:

$$A^0 = \frac{g}{c} U^1 \quad (5)$$

Derivando la ecuación (4) con respecto a τ, y teniendo en cuenta las definiciones de U y A, y utilizando la ecuación (5), se obtiene la ecuación diferencial para U^1; y de manera análoga para U^0:

$$\frac{d^2 U^1}{d\tau^2} - \left(\frac{g}{c}\right) U^1 = 0$$

$$\frac{d^2 U^0}{d\tau^2} - \left(\frac{g}{c}\right) U^0 = 0$$

que tienen como solución:

$$U^0(\tau) = k_1 \sinh\left(\frac{g}{c}\tau\right) + k_2 \cosh\left(\frac{g}{c}\tau\right)$$

$$U^1(\tau) = k_3 \sinh\left(\frac{g}{c}\tau\right) + k_4 \cosh\left(\frac{g}{c}\tau\right)$$

Las constantes de integración k_i, se determinan a partir de las condiciones iniciales: $U(\tau=0) = (U^0(0), U^1(0), 0, 0)$

$$A(\tau=0) = (A^0(0), A^1(0), 0, 0)$$

de lo cual se obtiene que:

$$u(\tau) = \left(c\cosh\left(\frac{g}{c}\tau\right), c\,\mathrm{senh}\left(\frac{g}{c}\tau\right), 0, 0\right)$$

integrando el cuadrivector de velocidad, se obtiene:

$$x^0(\tau) = \frac{c^2}{g}\,\mathrm{senh}\left(\frac{g}{c}\tau\right) + k_5$$

$$x^1(\tau) = \frac{c^2}{g}\cosh\left(\frac{g}{c}\tau\right) + k_6$$

las constantes de integración se determinan de las C.I.

$$x(\tau=0) = (x^0(0), x^1(0), 0, 0)$$

siendo el c-vector del cohete:

$$x(\tau) = \left(\frac{c^2}{g}\,\mathrm{senh}\left(\frac{g}{c}\tau\right), \frac{c^2}{g}\left[\cosh\left(\frac{g}{c}\tau\right) - 1\right], 0, 0\right]$$

1c) tomando $c=1$, y de la información del problema, la distancia a la mitad del viaje es: $x^1 = 212.5$ al $\Rightarrow$

$$212.5 = \cosh\tau - 1 \Rightarrow \tau = 6.0568 \text{ años}$$

$$x^0 = \mathrm{senh}(\tau) = 213.502 \text{ años}$$ Así los tiempos de ida son:

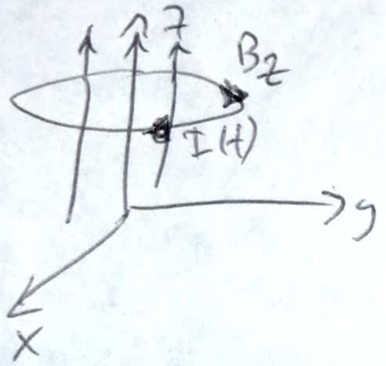
$$\tau_{IDA} = 2\times\tau \qquad \tau_{IDA} = 12.114 \text{ años}$$

$$x^0_{IDA} = 427.004 \text{ años}$$

4 ~~4~~5

2 Calculemos el valor de la corriente $I(t)$, de la ley de inducción de Faraday: $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$.

Se tiene la siguiente figura:



$$\vec{B}_z = B_0(1+kz)\hat{k}$$

$$\Phi_B = B_0(1+kz)\pi\frac{D^2}{4}$$

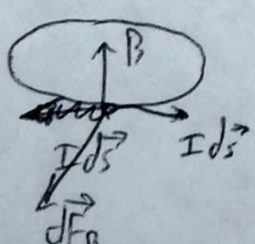
$$\mathcal{E} = -\frac{B_0\pi D^2}{4}k\frac{dz}{dt}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{B_0 k\pi D^2}{4}v(t)$$

Como la espira tiene una resistencia R, la corriente en ella es:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R} \quad \therefore \quad I(t) = -\frac{B_0 k\pi D^2}{4R}v(t)$$

la ley de Lenz indica que el sentido de la corriente es ~~negativo~~ positivo. Así la fuerza magnética ($d\vec{B}$) sobre un elemento de longitud $d\vec{s}$ es: $d\vec{F}_B = I\,d\vec{s}\times\vec{B}$. Todos los elementos de $d\vec{F}_B$ quedan en el plano de la espira, alejándose del centro de esta. Como no existe fuerza neta magnética en dirección $\hat{k}$, la velocidad ~~terminal~~ de la espira, e con la que llega en caída libre al suelo:



$$v = \sqrt{2gh}$$ ¿Es correcta esta afirmación?

5

Revisemos si el campo magnético satisface la ecuación de Maxwell: $\nabla\vec{B}=0$ Así $\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0$

Como $B_z=B_0(1+kz)$ $\frac{\partial B_z}{\partial z}=B_0k \Rightarrow$

$$\boxed{-B_0k=\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}}$$

El campo satisface que $\nabla\vec{B}=0$ si SE SATISFACE ESTA ECUACIÓN.

Así que la información de que B tiene una componente en $\hat{k}$ es incompleta. El campo debe ~~tener~~ componentes $\hat{\imath},\hat{\jmath}$ para que su divergencia sea cero

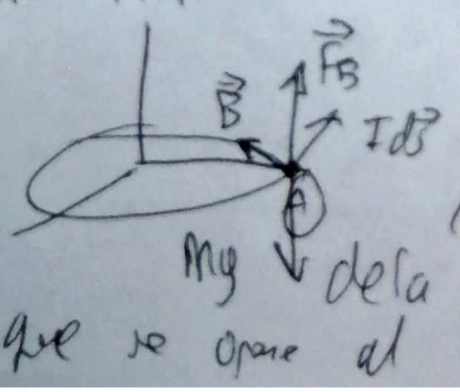
Hay infinitas soluciones para esta ecuación diferencial. Escogemos una solución particularmente:

$$\frac{\partial B_x}{\partial x}=-\frac{B_0k}{2} \Rightarrow B_x=-\frac{B_0k}{2}x+B_0$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial y}=-\frac{B_0k}{2} \Rightarrow B_y=-\frac{B_0k}{2}y+B_0 \quad \text{Así:}$$

$$\vec{B}=B_0\left[\left(1+\frac{k}{2}x\right)\hat{\imath}+\left(1-\frac{k}{2}y\right)\hat{\jmath}+(1+kz)\hat{k}\right]$$

ESTE CAMPO SATISFACE $\nabla\cdot\vec{B}=0$



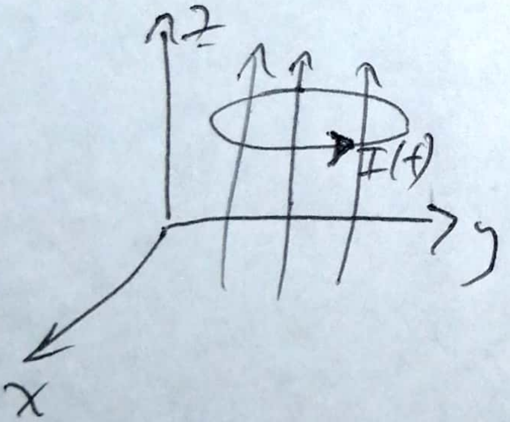
Regresando a la espira, sobre todos los elementos de longitud $d\vec{s}$, actúa un campo magnético $\vec{B}$ confinado al plano $\Rightarrow$ de la espira. Así existe una fuerza magnética que se opone al peso!!

1. La espira alcanza su velocidad terminal, cuando la energía disipada en ~~por~~ la resistencia, es igual que el trabajo realizado por la fuerza de gravedad, cuando ~~$F_B =$ peso~~ $F_m = mg$ Del principio de conservacion de la energía: (6A1)

$\Delta K + \Delta U = -\Delta E_{disipada}$ se tiene la velocidad terminal cuando $\Delta K = 0 \Rightarrow$

$mg\Delta z = I^2 R \Delta t$ (1)

calculemos el valor de $I(t)$ De la ley de inducción de Faraday $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$. en el problema tenemos la siguiente situación:



$$\vec{B}_z = B_0(1+kz)\hat{k}$$

$$\Phi_B = B_0(1+kz)\pi\frac{D^2}{4}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{B_0\pi D^2}{4}k\frac{dz}{dt}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{B_0 k\pi D^2}{4}v(t)$$

Como la espira es un resistor, la corriente en ella es: $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$

$I(t) = -\frac{B_0 k\pi D^2}{4R}v(t)$ (2) colocando este valor de $I(t)$ en la ecuacion (1) ~~se tiene~~ cuando la velocidad llega a su valor terminal, se tiene:

GA2 8

$\frac{I^2 R}{mg} = \frac{\Delta z}{\Delta t} = v$, reemplazando el valor de I, obtenemos en (2) tenemos la sgte ecuación para ~~de~~ la velocidad terminal:

$$v = \frac{B_0^2 K^2 \pi^2 D^4}{16 mgR} v^2$$ Así:

$$v = \frac{16 mgR}{B_0^2 K^2 \pi^2 D^4}$$

(PROBLEMA 3)

3) La ley de inducción de Faraday dice: (6)

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{a} = -\frac{d}{dt}\int_0^{2\pi N} B_0 \cos\omega t \, \frac{r^2(\varphi)}{2} d\varphi$$

$$\mathcal{E} = \frac{B_0\,\omega \operatorname{sen}\omega t}{2}\int_0^{2\pi N} r^2(\varphi)\, d\varphi$$ la espiral se describe como $r(\varphi) = \frac{h\varphi}{2\pi}$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi N}\left(\frac{h\varphi}{2\pi}\right)^2 d\varphi = \frac{2h^2\pi N^3}{3}$$

Así la fem inducida es:

$$\mathcal{E} = \frac{\pi B_0\, \omega h^2 N^3}{3} \operatorname{sen}\omega t$$

• Otra forma de resolverlo es considerando que la bobina está hecha de N espiras circulares de radio $r = nh$, así ~~el flujo~~ la fem inducida en cada espira es:

$$\mathcal{E}_n = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -A_n\cdot\frac{dB}{dt} = \pi h^2 n^2 B_0\, \omega \operatorname{sen}\omega t$$

La fem total se obtiene sumando la fem de las N espiras:

$$\mathcal{E} = \sum_{n=1}^{N}\mathcal{E}_n = \pi B_0\, \omega \operatorname{sen}\omega t\, h^2 \sum_{n=1}^{N} n^2$$

con $$\sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{N(N+1)(N+2)}{6} \simeq \frac{N^3}{3}$$

PROBLEMA 4

4.a. $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ y $\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

sean $\vec{E} = E(r)e^{-i\omega t}$ $\vec{H} = H(r)e^{-i\omega t}$ $\vec{J} = J(r)e^{-i\omega t}$

y el conductor satisface la ley de Ohm: $\vec{J} = \sigma(\omega)\vec{E}$

se tiene que: $\vec{\nabla}\times\vec{H} = (\sigma - i\omega\varepsilon)\vec{E}$ si $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ es constante.

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$ si σ y ε son uniformes, ya que $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H}) = 0$

También $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{E}) - \nabla^2\vec{E} = -\nabla^2\vec{E} = +i\omega\mu\nabla\times\vec{H}$ si $\mu = \mu(\omega)$ constante y uniforme.

Así llegamos a la ecuación de Helmholtz, para campos armónicos

$$\left(\vec{\nabla}^2 + \vec{K}^2\right)\vec{E} = 0 \quad \text{con} \quad \vec{K}^2 = \omega^2\mu\varepsilon\left(1 + \frac{i\sigma}{\omega\varepsilon}\right) = \omega^2\mu\tilde{\varepsilon}.$$

- fuera del conductor $\sigma = 0$

$$\vec{E} = \hat{\imath}\,(\underbrace{E_+ e^{ikz}}_{\text{incidente}} + \underbrace{E_- e^{-ikz}}_{\text{reflejada}})e^{-i\omega t}$$

con $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$. Por otro lado;

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = +i\omega\mu\vec{H} \Rightarrow \vec{H} = \frac{\vec{\nabla}\times\vec{E}}{i\omega\mu}$$

así:

$$\vec{H} = \frac{\hat{\jmath}}{\eta}\left(E_+ e^{ikz} - E_- e^{-ikz}\right)e^{-i\omega t}$$

donde η es la impedancia característica del medio y:

$$\frac{\pm ik}{i\omega\mu} = \frac{\pm\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{\omega\mu} = \frac{\pm 1}{\sqrt{\mu/\varepsilon}} = \frac{\pm 1}{\eta}$$

4.b 8

- dentro del conductor: $\sigma/\omega\varepsilon \gg 1$ (aproximación de buen conductor)

$$\vec{E} = \hat{\imath} E_c e^{-z/\delta} e^{i(z/\delta - \omega t)}$$ | onda transmitida

con $\vec{k} = \omega\sqrt{\mu_c \tilde{\varepsilon}} \approx \sqrt{i\omega\mu_c\sigma} = \frac{1+i}{\delta}$

donde $\boxed{\delta \approx \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_c\sigma}}}$. como $\vec{H} = \frac{\vec{\nabla}\times\vec{E}}{i\omega\mu_c}$

$$\vec{H} = \hat{\jmath}\,\frac{1+i}{\omega\mu_c\delta} E_c e^{-z/\delta} e^{i(z/\delta - \omega t)}$$

$$\omega\mu_c\delta = \frac{1+i}{\sqrt{2\omega\mu_c/\sigma}} = \frac{1}{\eta}$$

$\vec{\eta} = (1-i)\sqrt{\frac{\omega\mu_c}{2\sigma}}$. $\vec{\eta}$ es una impedancia compleja, característica del conductor.

Esta es la solución de la ecuación de onda formada por la superposición del mínimo de onda plana de frecuencia ω, para incidencia normal y polarización E_+ paralela a $\hat{\imath}$, que satisface en $z=0$ (interfase plana), las siguientes condiciones de borde:

$$E_+ + E_- = E_c$$

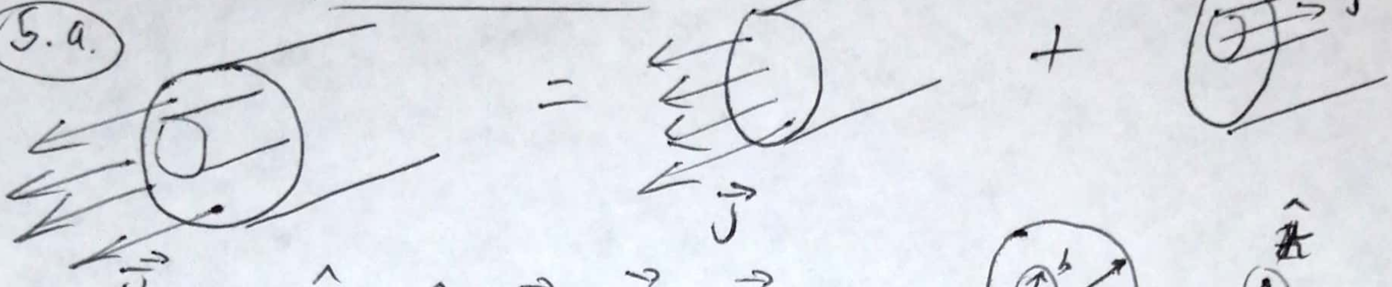
$$E_+ - E_- = (\eta/\bar{\eta})\, E_c$$

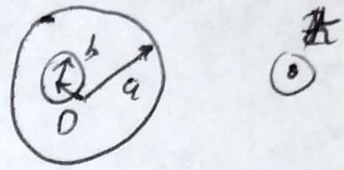
$$E_- = \frac{\bar{\eta} - \eta}{\bar{\eta} + \eta} E_+$$

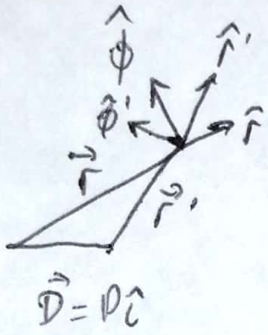
$$E_c = \frac{2\bar{\eta}}{\bar{\eta} + \eta}$$

PROBLEMA 5

5.a.







$$\vec{B} = \vec{B}_I + \vec{B}_{II}$$

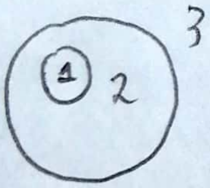
$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{D}$$

$\vec{D} = D\hat{\imath}$

Aplicando la ley de Ampère, para un cilindro de radio R

$$2\pi r B = \mu_0 J \pi \begin{cases} r^2 & r<R \\ R^2 & r>R \end{cases} \Rightarrow B = \frac{\mu_0}{2} J \begin{cases} r & r<R \\ \frac{R^2}{r} & r>R \end{cases}$$

Calculando el flujo magnético en todo el espacio



$$\vec{B} = \vec{B}_I + \vec{B}_{II}$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{2} J \left(r\hat{\phi} - r'\hat{\phi}'\right)$$

$$= \frac{\mu_0}{2} J \; \hat{k} \times \left(\vec{r} - \vec{r}\,'\right)$$

$$= \frac{\mu_0}{2} J \; \hat{k} \times \vec{D}$$

$$\boxed{\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{2} J D \hat{\jmath}}$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{2} J \left(r\hat{\phi} - \frac{b^2}{r'} \hat{\phi}' \right) = \frac{\mu_0}{2} J \left(r\hat{\phi} - \frac{b^2}{r'^2} r' \hat{\phi}' \right) \quad (10)$$

$$= \frac{\mu_0 J}{2} \hat{k} \times \left(\vec{r} - \frac{b^2}{r'^2} \vec{r}\,' \right) = \frac{\mu_0}{2} J \hat{k} \times \left(\left(1 - \frac{b^2}{r'^2}\right) \vec{r} + \frac{b^2}{r'^2} \vec{D} \right)$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{2} J \left\{ \left(\frac{r'^2 - b^2}{r'^2} \right) r \hat{\phi} + \frac{b^2}{r'^2} D \hat{j} \right\}$$

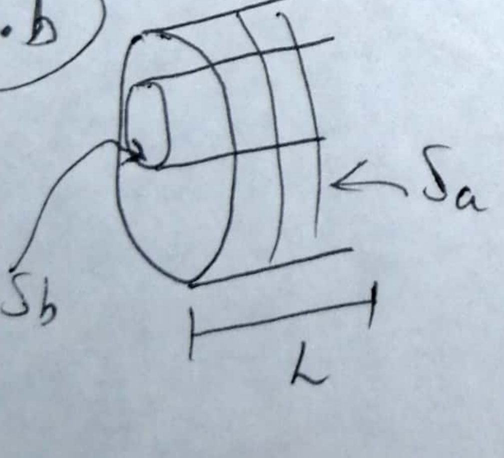
$$\hat{j} = \operatorname{sen}\phi\, \hat{r} + \cos\phi\, \hat{\phi}$$

$$\boxed{\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{2} J \left\{ \left[\left(1 - \frac{b^2}{r'^2}\right) r + \frac{b^2}{r'^2} D \cos\phi \right] \hat{\phi} + \frac{b^2}{r'^2} D \operatorname{sen}\phi\, \hat{r} \right\}}$$

$$\vec{B}_3 = \frac{\mu_0}{2} J \hat{k} \times \left(\frac{a^2}{r^2} \vec{r} - \frac{b^2}{r'^2} \vec{r}\,' \right)$$

$$\vec{B}_3 = \frac{\mu_0 J}{2} \left\{ \left[\left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{b^2}{r'^2} \right) r + \frac{b^2}{r'^2} D \cos\phi \right] \hat{\phi} + \frac{b}{r'^2} D \operatorname{sen}\phi\, \hat{r} \right.$$

5.b



lo que se debe demostrar es que:

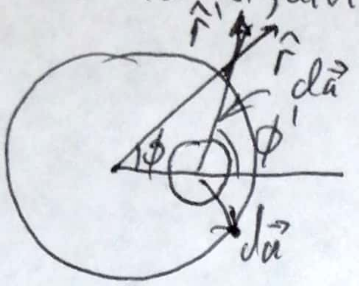
$$\Phi_a + \Phi_b = I^2 R$$

$$\Phi_a = \int_{S_a} \vec{S} \cdot d\vec{a} \qquad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

$$\Phi_b = \int_{S_b} \vec{S} \cdot d\vec{a} \qquad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \vec{J} \times \vec{B}$$

$$\vec{S} = \frac{J}{\mu_0 \sigma} \hat{k} \times \vec{B}$$

Tenemos la siguiente geometria



en S_a $d\vec{a} = a\,dl\,d\phi\,(-\hat{r})$

en S_b $d\vec{a} = b\,dl\,d\phi'\,(\hat{r}')$

en S_b:

$$\vec{S} = \frac{J}{\mu_0\sigma}\hat{k}\times\vec{B}_2\Big|_b = \frac{J}{\mu_0\sigma}\hat{k}\times\vec{B}_1\Big|_b = -\frac{J^2 D}{2\sigma}\hat{\imath}$$

$$\vec{S}\cdot d\vec{a} = -\frac{J^2 D}{2\sigma} b\,dl\,d\phi'\,\hat{r}'\cdot\hat{\imath} = -\frac{J^2 D}{2\sigma} b\cos\phi'\,dl\,d\phi'$$

$$\Phi_b = \int dl \oint d\phi'\left[-\frac{J^2 D}{2\sigma^2} b\right]\cos\phi' = 0 \quad \text{debido a que: } \oint d\phi'\cos\phi' = 0$$

en S_a:

$$\vec{S} = \frac{J}{\mu_0\sigma}\hat{k}\times\vec{B}_2\Big|_a = -\frac{J^2}{2\sigma}\left(\vec{r} - \frac{b^2}{r'^2}\vec{r}'\right)$$

$$\vec{S}\cdot d\vec{a} = \frac{J^2 a}{2\sigma^2}\left(a - \frac{b^2}{r'^2_{(a)}}\vec{r}'\cdot\hat{r}\Big|_a\right) dl\cdot d\phi$$

$$\vec{r}'\cdot\hat{r}\Big|_a = (\vec{r}-\vec{D})\cdot\hat{r}\Big|_a = a - D\cos\phi$$

$$r'^2(a) = a^2 + D^2 - 2aD\cos\phi$$

$$\vec{S}\cdot d\vec{a} = \frac{J^2}{2\sigma}\left(a^2 - \frac{b^2 a}{a^2+D^2-2aD\cos\phi}(a - D\cos\phi)\right) dl\,d\phi$$

$$\Phi_a = \int_{S_a}\vec{S}\cdot d\vec{a} = \frac{L J^2}{2\sigma}\left[2\pi a^2 - \int \frac{b^2 a\,(a - D\cos\phi)}{a^2+D^2-2aD\cos\phi}\,d\phi\right]$$

A partir de la integral: $\int \frac{u - v\cos\phi}{u^2+v^2-2uv\cos\phi}\, d\phi = \frac{2\pi}{u}$ (12)

con $u > v \geq 0$

se tiene que:

$$\int \frac{a - D\cos\phi}{a^2+D^2-2aD\cos\phi}\, d\phi = \frac{2\pi}{a}$$

Se puede calcular que

$$\Phi_a = \frac{LJ^2}{2\sigma} 2\pi \left(a^2-b^2\right)$$

como $I = J\pi\left(a^2-b^2\right)$

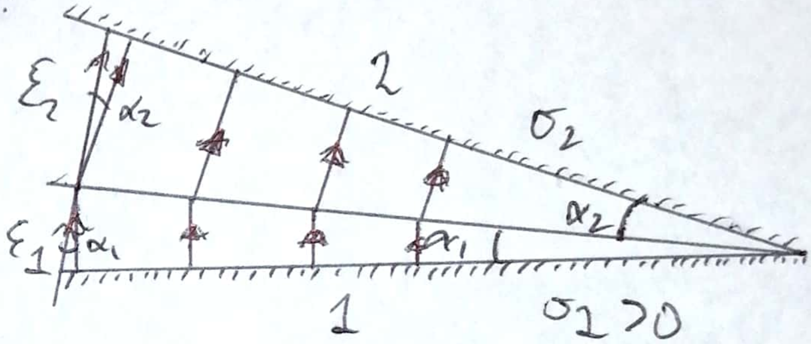
$$R = \frac{L}{\sigma A} = \frac{L}{\sigma\pi\left(a^2-b^2\right)}$$

$$\boxed{I^2 R = \frac{J^2 L}{\sigma}\pi\left(a^2-b^2\right) = \Phi_a + \Phi_b}$$

PROBLEMA 6

6.a) Para ~~que exista~~ una solución de campo uniforme en cada dieléctrico, y recordando que el campo eléctrico debe ser perpendicular a los conductores en cada punto de su superficie, la aplicación del teorema de Gauss a la vecindad de cada uno de dichos puntos (ver figura) da:

$$\sigma_1 = \varepsilon_1 E_1 = D_1$$
$$\sigma_2 = -\varepsilon_2 E_2 = -D_2 \quad (1)$$



Aplicando las condiciones de frontera al plano entre los dieléctricos, dado que en él no hay cargas, ni corrientes, se tiene:

$$D_1 \cos\alpha_1 = D_2 \cos\alpha_2 \quad y \quad \frac{D_1}{\varepsilon_1}\operatorname{sen}\alpha_1 = \frac{D_2}{\varepsilon_2}\operatorname{sen}\alpha_2 \quad (2)$$

dividiendo estas expresiones, se encuentra la condición requerida:

$$\boxed{\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\varepsilon_1} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\varepsilon_2}}$$

6.b) Dada la densidad de carga σ_1 del primer conductor, de (1) se tiene que: $D_1 = \sigma_1$, así $E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1}$. De (2) se tiene

$$D_2 = D_1 \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} \;;\; D_2 = \boxed{\sigma_1 \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} = -\sigma_2} \quad y \quad \boxed{E_2 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_2}\frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}}$$

Doctorado en Ciencias – Física –
Termodinámica y mecánica estadística
Examen de Conocimiento – 2023-2

Instrucciones: El examen comprende dos partes (pregrado y posgrado). Para cada parte debe resolver dos de los tres problemas propuestos. Indique cuál de los dos problemas prefiere que se califiquen dibujando un círculo en el número de los dos problemas seleccionados. Si decide no marcar los problemas, se calificarán los dos primeros problemas de cada sección. Todos los problemas tienen el mismo valor (5 puntos). No se permite el uso de libros, apuntes, dispositivos electrónicos, ni la comunicación con otras personas o sistemas durante la presentación del examen. Al finalizar se presenta una hoja con las ecuaciones relevantes para resolver los problemas de este examen.

Problemas de nivel de pregrado (40 puntos).

Problema #1. N moles de fluido van der Waals con constantes empíricas a (intensidad de la interacción atractiva molecular) y b (volumen excluido) están contenidos dentro de un cilindro conectado a un pistón móvil. El volumen molar inicial del fluido es v_i y la temperatura inicial del fluido es T_i. El pistón se mueve lentamente hasta expandir el fluido a un volumen molar final v_f llegando a una temperatura final T_f donde:

Expresiones clásicas para la entropía molar y la energía interna molar de un fluido van der Waals:

$$s = Rln[(v-b)(u+a/v)^c] + s_o$$

$$u = cRT - a/v$$

Una fuente de calor reversible con capacidad calorífica $C_2 = DT$ (donde D es una constante y T es la temperatura absoluta) se encuentra a una temperatura inicial T_o y está en contacto térmico con el fluido. El sistema compuesto se encuentra aislado con respecto al resto del Universo excepto por una reserva de trabajo reversible que puede aceptar o generar trabajo desde y sobre el sistema compuesto. La temperatura final de la reserva térmica no está dada.

NOTA: Tome en cuenta que el máximo trabajo generado para un sistema cerrado como el que se describe arriba se genera solo bajo condiciones isentrópicas.

a) (10 punto) Con base en los cambios de energía interna y entropía del sistema, calcule el máximo trabajo que se puede entregar a la reserva de trabajo reversible.
b) (10 puntos) En el caso en que no se genere trabajo, calcule el cambio de entropía de este proceso.

Problema #2. Un sistema de N partículas que no interactúan entre sí se encuentra a una temperatura T_o suficientemente alta para ser tratadas con la aproximación clásica de sistemas mecánicos. Cada partícula tiene masa m y oscila libremente en una dimensión alrededor de su posición de equilibrio. Calcule la capacidad calorífica del sistema de partículas a esta temperatura tomando en cuenta los siguientes casos:

a) (10 puntos) La fuerza restaurativa de cada partícula es proporcional al desplazamiento (x) con respecto a su posición de equilibrio. Puede asumir el teorema de equipartición de la energía.

b) (10 puntos) La fuerza restaurativa es proporcional al cubo del desplazamiento (x^3) con respecto a su posición de equilibrio. Comience calculando la energía potencial promedio y con esto determine la capacidad calórica de este sistema de partículas. NOTA: Usando una sustitución de variables, el cálculo de la integral para hallar la energía potencial promedio se puede realizar de manera sencilla sin recurrir a funciones especiales.

Problema #3. Gas Ideal en un campo gravitacional.

Un gas ideal está en equilibrio térmico con una reserva a temperatura absoluta T . El gas ideal es sometido a un campo gravitacional uniforme con constante gravitacional g , donde la energía por partícula se puede escribir con respecto a la altura z como:

$$E = \frac{p^2}{2m} + mgz$$

a) (10 puntos) Con base en las estadísticas pertinentes para este sistema, derive la distribución de partículas $P(z)$ en función de la altura z y la probabilidad $P(0)$ a altura $z = 0$.

b) (10 puntos) Discuta cualitativamente el comportamiento de esta distribución partículas para temperaturas muy bajas $(k_B T \ll mg\langle z\rangle)$ y temperaturas muy altas $(k_B T \gg mg\langle z\rangle)$. ¿Qué sucede con las partículas bajo estas dos condiciones?

Problemas de nivel de posgrado (60 puntos).

Problema #1. Comparando magnetización desde el punto de vista clásico y cuántico.

a) (12 puntos) Aproximación clásica. Considere un ensamble de N_o átomos por unidad de volumen a una temperatura T que no interactúan, de tal manera que se pueden despreciar interacciones entre ellos. Cada átomo presenta un momento magnético μ el cual puede asumir un ángulo arbitrario con respecto la dirección $\boldsymbol{z}$. El sistema de átomos se encuentra en presencia de un campo magnético H apuntando en la dirección z. Demuestre que la magnetización promedio por unidad de volumen en función del campo magnético es:

$$\langle M_Z \rangle = N_o \mu \left[\coth(\beta \mu H) - \frac{1}{\beta \mu H} \right]$$

NOTA: Este sería el resultado clásico. Piense como calcular la probabilidad de ocupar un rango de ángulo particular y cómo la energía magnética influye en esta probabilidad.

b) (12 puntos) Considere ahora un sistema cuantizado de N_o átomos por unidad de volumen donde el momento magnético es proporcional al momento angular cuantizado del átomo

$$\mu = g \mu_o J_z$$

μ_o siendo el magnetón de Bohr y g un factor de proporcionalidad que depende de la partícula. Asumiendo que:

$$J_z = m \qquad m = -J, -J+1, -J+2, \dots\dots, J-1, J$$

Muestre que la magnetización promedio del sistema de átomos es:

$$\langle \mu_z \rangle = g \mu_o J B_J(\eta)$$

donde $\eta = \beta g \mu_o H$ y $B_J(\eta)$es la función de Brillouin:

$$B_J(\eta) \equiv \frac{1}{J} \left[\left(J + \frac{1}{2} \right) coth \left(J + \frac{1}{2} \right) \eta \; - \frac{1}{2} coth \frac{1}{2} \eta \right]$$

c) (6 punto) Considerando la aproximación a alta temperatura donde el espaciamiento entre los estados cuánticos es muy pequeño con respecto a la energía térmica y hay un número muy grande de estados cuánticos de manera que se pueda considerar un sistema continuo

$$\eta \ll 1 \; y \; J \gg 1 \text{ tal que } J\eta \gg 1,$$

muestre que el resultado del sistema cuantizado converge con el resultado clásico.

Problema #2. Distribuciones Bose-Einstein y Fermi-Dirac.

Considere un gas de partículas que no interactúan a una temperatura T y que obedecen estadísticas Bose-Einstein. El número total de partículas NO está especificado, pero el número promedio de partículas $\langle N \rangle$ se conoce. El gas, por lo tanto, puede describirse con una distribución gran canónica.

a) (12 puntos) Para un sistema de partículas Bose-Einstein, use la distribución gran canónica para calcular el número promedio de partículas $\langle n_s \rangle$ que se encuentran en el estado s ,donde la energía de la partícula en un estado r particular es ϵ_r. Debe poder llegar al resultado que predice el modelo Bose-Einstein. Ver hoja de ecuaciones (Tome en cuenta que para ciertas notaciones $\mu \equiv -kT\alpha$)
b) (12 puntos) Use la distribución gran canónica para calcular $\langle n_s \rangle$ para un sistema de partículas que obedecen estadísticas Fermi-Dirac.
c) (6 puntos) Use sus respuestas anteriores para calcular la dispersión en el número medio de partículas $\langle (\Delta n_s)^2 \rangle$ para cada distribución.

Problema #3. Potencial químico y adhesión a una superficie. El propósito de este problema es encontrar la condición de equilibrio químico entre un gas ideal contenido en un volumen fijo y una superficie expuesta a este gas. El gas ideal intercambia partículas con la superficie, y las partículas adheridas a la superficie se comportan como un gas ideal bidimensional.

a) (12 punto) Comenzando con la expresión para entropía de un gas ideal y usando el potencial de Helmholtz, calcular el potencial químico μ de N átomos de este gas. Cada átomo tiene masa m y el gas está contenido en un volumen V a una temperatura absoluta T. Use la aproximación de Sterling para encontrar el resultado en función de N.
b) (12 puntos) Ahora calculemos el potencial químico del gas bidimensional. Un número N' de partículas, que no interactúan entre sí, se mueven libremente sobre una superficie de área A conformando un gas ideal bidimensional sobre la superficie. La energía de una partícula adsorbida sobre la superficie es $(p^2/2m) - \epsilon_o$, donde p representa el vector de momento en dos dimensiones y ϵ_o representa la energía de adhesión que mantiene a la partícula pegada a la superficie. Encontrar la función de partición y con esta calcular el potencial químico μ'del gas bidimensional donde la función de partición puede ser evaluada usando una aproximación clásica y calculando las sumatorias como integrales.
c) (6 punto). Encuentre la condición de equilibrio entre el gas ideal y las partículas adheridas a la superficie. Asuma que hay un intercambio libre entre estos dos estados. Con esta condición encuentre la densidad media de partículas adsorbidas por unidad de área $\langle n' \rangle$ a una temperatura T y a una presión promedio del gas ideal $\langle P \rangle$. Para esto puede usar la ecuación de estado de un gas ideal para encontrar la dependencia con presión.

Universidad de los Andes

Doctorado en Ciencias – Física – Termodinámica y mecánica estadística Examen de Conocimiento – 2023-2

Fórmulas de utilidad

$S = Nk_B\left[ln\left(\frac{V}{N}\right) + \frac{3}{2}ln(T) + \sigma_o\right]$ donde $\sigma_o \equiv \frac{3}{2}ln\left(\frac{2\pi m k_B}{h^2}\right) + \frac{5}{2}$: Entropía de un gas ideal

$dE = \delta Q - \delta W$: Primera ley de la termodinámica

$dS = \frac{\delta Q}{T}$: Segunda ley de la termodinámica

$Z = \sum_i e^{-\varepsilon_i/k_BT} = \sum_i e^{-\beta\varepsilon_i}$: Función de partición canónica

$Z = \sum_i e^{(-\varepsilon_i+\mu_i)/k_BT} = \sum_i e^{-\beta\varepsilon_i-\alpha_i}$: Función de partición gran canónica

$\langle\varepsilon\rangle = \frac{\partial}{\partial\beta}lnZ$: Energía promedio $F = -k_BT lnZ$: Energía libre de Helmholtz

$\langle n_s\rangle = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\varepsilon_s}lnZ$: Número de partículas promedio en un estado s

$\langle(\Delta n_s)^2\rangle = \langle n_s^2\rangle - \langle n_s\rangle^2 = \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2}{\partial{\varepsilon_s}^2}lnZ = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\varepsilon_s}\langle n_s\rangle$: Dispersión en el número de partícula

$C_V \equiv \left(\frac{\partial\langle\varepsilon\rangle}{\partial T}\right)_V = \frac{T}{N}\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)$: Calor específico molar a volumen constante.

$\langle n_s\rangle = \left(e^{((-\varepsilon_i+\mu_i)/k_BT)} - 1\right)^{-1} = \left(e^{(-\beta\varepsilon_i-\alpha_i)} - 1\right)^{-1}$: Estadística de Bose-Einstein

$\langle n_s\rangle = \left(e^{((-\varepsilon_i+\mu_i)/k_BT)} + 1\right)^{-1} = \left(e^{(-\beta\varepsilon_i-\alpha_i)} + 1\right)^{-1}$: Estadística de Fermi-Dirac

Algunas relaciones matemáticas:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+b)^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} x^{-\alpha n} = \frac{1}{1-x^{-\alpha}}$$

$$\int_{\kappa}^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{e^{-\kappa^2}}{2\kappa} \qquad \sum_{r=-n}^{n} e^{\alpha n} = \frac{e^{-\alpha n} - e^{\alpha(n+1)}}{1-e^{\alpha}} = \frac{e^{-\alpha(n+\frac{1}{2})} - e^{\alpha(n+\frac{1}{2})}}{e^{-\frac{1}{2}\alpha} - e^{\frac{1}{2}\alpha}}$$

SOLUCION - TERMODINAMICA Y MEC. ESTADISTICA

EXAMEN DE CONOCIMIENTO - 2023-2

Pregrado

Problema #1

a)
$$\Delta S_{vdW} = R \ln\left(\frac{v_f - b}{v_0 - b}\right) + cR \ln\left(\frac{T_f}{T_0}\right)$$

$$\Delta U_{vdW} = cR(T_f - T_0) - \frac{a}{v_f} + \frac{a}{v_0}$$

$$\Delta S_{\underset{(2)}{rt}} = D(T_{2,f} - T_{2,0})$$

$$\Delta U_{\underset{(2)}{rt}} = \frac{1}{2} D\left(T_{2,f}^2 - T_{2,0}^2\right)$$

Proceso isentrópico

$$\Delta S_{TOTAL} = R \ln\left(\frac{v_f - b}{v_0 - b}\right) + cR \ln\left(\frac{T_f}{T_0}\right) + D(T_{2,f} - T_{2,0}) = \emptyset$$

$$\underline{\underline{T_{2,f}}} = T_{2,0} - RD^{-1} \ln\left(\frac{v_f - b}{v_0 - b}\right) - cRD^{-1} \ln\left(\frac{T_f}{T_0}\right)$$

$$W + \Delta U_2 + \Delta U_1 = \emptyset$$

$$W = -\left[\frac{1}{2} D\left(\underline{\underline{T_{2f}}}^2 - T_{20}^2\right)\right] - \left[cR(T_f - T_0) - \frac{a}{v_f} + \frac{a}{v_0}\right]$$

b)
$$\Delta U_{TOTAL} = \emptyset$$

$$\frac{1}{2} D\left(T_{2,f}^2 - T_{2,0}^2\right) = -cR(T_f - T_0) - \frac{a}{v_f} + \frac{a}{v_0}$$

$$\underline{\underline{T_{2,f}}} = \left(-cR(T_f - T_0) - \frac{a}{v_f} + \frac{a}{v_0} + \frac{1}{2}\frac{T_{2,0}^2}{D}\right)^{1/2}$$

$$\Delta S_{TOTAL} = R \ln\left(\frac{v_f - b}{v_0 - b}\right) + cR \ln\left(\frac{T_f}{T_0}\right) + D(\underline{\underline{T_{2,f}}} - T_{2,0})$$

Problema #2

a) Para una fuerza restaurativa $-\alpha x$, la energía promedio de N partículas es:

$$\langle E \rangle = N\left(\frac{1}{2} m \langle \dot{x}^2 \rangle + \frac{1}{2}\alpha \langle x^2 \rangle\right)$$

por equipartición de energía.

$$\langle E \rangle = N\left(\frac{1}{2}k_B T + \frac{1}{2}k_B T\right) = N k_B T$$

$$C = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} = N k_B$$

b) Para una fuerza restaurativa $-\alpha x^3$, la energía promedio por partícula es:

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} m \langle \dot{x}^2 \rangle + \frac{1}{4}\alpha \langle x^4 \rangle$$

la energía cinética promedio contribuye $\frac{1}{2}k_B T$ por equipartición. La energía potencial promedio se encuentra de la siguiente manera:

$$\left\langle \frac{\alpha x^4}{4} \right\rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\beta \alpha x^4}{4}\right)\frac{\alpha x^4}{4}\,dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\beta \alpha x^4}{4}\right)dx}$$

$$\left\langle \frac{\alpha x^4}{4} \right\rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta(\alpha x^4/4)}\,dx$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^4/4} \beta^{-1/4}\,dy$$

donde $y = \beta^{1/4} dx$

$$\left\langle \frac{\alpha x^4}{4} \right\rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta}\left(-\frac{1}{4}\ln \beta + \ln \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^4/4}\, dy\right) = \frac{1}{4\beta}$$

$$= \frac{1}{4} k_B T$$

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{1}{2} m \langle \dot{x}^2 \rangle + \frac{1}{4} \alpha \langle x^4 \rangle = \frac{1}{2} k_B T + \frac{1}{4} k_B T = \frac{3}{4} k_B T$$

por partícula

$$\langle E \rangle = N \langle \epsilon \rangle \qquad C = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} = \frac{3}{4} N k_B$$

Problema #3

a) $$P(r,p)\, d^3r\, d^3p \propto \frac{d^3r\, d^3p}{h_0^3} e^{-\beta(p^2/2m + mgz)}$$

$$\propto d^3r\, d^3p\, e^{-\beta(p^2/2m)} e^{-\beta mgz}$$

$$P(p)\, d^3p = C e^{-\beta(p^2/2m)} d^3p$$

$$P(z)\, dz = \int P(r,p)\, d^3r\, d^3p$$

$$P(z) = P(0) e^{-mgz/k_B T}$$

b) para $k_B T \ll mg\langle z \rangle$

$P(0) = 1$ todas las partículas se encuentran a la altura del suelo.

para $k_B T \gg mg\langle z \rangle$

$P(z)$ ~~es~~ $= P(0)$ para todo z, la distribución de partículas es homogénea.

Posgrado

Problema #1

La energía de un momento magnético dentro de un campo magnético H es

$$E = -\mu \cdot H = -\mu H \cos\theta$$

donde θ es el ángulo entre el momento magnético y la dirección del campo (eje z), por lo tanto la probabilidad de que el momento magnético se encuentre en el rango θ a $\theta + d\theta$ es proporcional al factor de Boltzmann y el ángulo sólido. $2\pi \sin\theta \, d\theta$

$$P(\theta)\,d\theta \propto e^{\beta\mu H\cos\theta} \sin\theta \, d\theta$$

$$\langle M_z \rangle = N_0 \langle \mu_z \rangle = \frac{N_0 \int_0^{\pi} e^{\beta\mu H\cos\theta} \operatorname{sen}\theta \, d\theta (\mu\cos\theta)}{\int_0^{\pi} e^{\beta\mu H\cos\theta} \operatorname{sen}\theta \, d\theta}$$

$$\langle M_z \rangle = \frac{N_0}{H} \frac{\partial}{\partial\beta} \ln \int_0^{\pi} e^{\beta\mu H\cos\theta} \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

$$= \frac{N_0}{H} \frac{\partial}{\partial\beta} \ln \left(\frac{e^{\beta\mu H} - e^{-\beta\mu H}}{\beta\mu H} \right)$$

$$= \frac{N_0}{H} \frac{\partial}{\partial\beta} \ln \frac{2\sinh \beta\mu H}{\beta\mu H}$$

$$= \frac{N_0}{H\beta \sinh \cdot \beta\mu H} \left[\mu H \cosh \beta\mu H - \sinh \beta\mu H \right]$$

$$\langle M_z \rangle = N_0 \mu \left[\coth \beta\mu H - \frac{1}{\beta\mu H} \right]$$

b) los posibles niveles de energía de magnetización de una partículas son:

$$\epsilon_m = -g\mu_o H m$$

donde $m = -J, -J+1, -J+2, \ldots\ldots J-1, J$

La probabilidad de que una partícula se encuentre en el estado m es:

$$P_m = e^{-\beta(-g\mu_o H m)} = e^{\beta g \mu_o H m}$$

La magnetización promedio es: (dirección z)

$$\langle \mu_z \rangle = \frac{\sum_{m=-J}^{J} e^{\beta g \mu_o H m} (g\mu_o m)}{\sum_{m=-J}^{J} e^{\beta g \mu_o H m}}$$

momento magnético del estado m.

se puede reescribir:

$$\langle \mu_z \rangle = \frac{1}{\beta}\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial H} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial \ln Z}{\partial H}$$

donde $Z = \sum_{m=-J}^{J} e^{\beta g \mu_o H m}$

usando la siguiente abreviación:

$$\eta = \beta g \mu_o H$$

$$Z = \sum_{m=-J}^{J} e^{\eta m} = \frac{e^{-\eta(J+\frac{1}{2})} - e^{\eta(J+\frac{1}{2})}}{e^{-\frac{1}{2}\eta} - e^{\frac{1}{2}\eta}}$$

$$Z = \frac{\sinh(J+\frac{1}{2})\eta}{\sinh\frac{1}{2}\eta}$$ usando $\sinh y \equiv \frac{e^{y} - e^{-y}}{2}$

$$\ln Z = \ln \sinh\left(J+\tfrac{1}{2}\right)\eta - \ln \sinh \tfrac{1}{2}\eta$$

entonces

$$\langle \mu_z \rangle = \frac{1}{\beta}\frac{\partial \ln Z}{\partial H} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial \ln Z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial H} = g\mu_0 \frac{\partial \ln Z}{\partial \eta}$$

$$\langle \mu_z \rangle = g\mu_0 \left[\frac{(J+\frac{1}{2})\cosh(J+\frac{1}{2})\eta}{\sinh(J+\frac{1}{2})\eta} - \frac{\frac{1}{2}\cosh\frac{1}{2}\eta}{\sinh\frac{1}{2}\eta} \right]$$

$$\langle \mu_z \rangle = g\mu_0 J\, B_J(\eta)$$

$$B_J(\eta) = \frac{1}{J}\left[\left(J+\tfrac{1}{2}\right)\coth\left(J+\tfrac{1}{2}\right)\eta - \tfrac{1}{2}\coth\tfrac{1}{2}\eta\right]$$

c)

$$\coth x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}} = \frac{(1+x+\cdots)+(1-x\cdots)}{(1+x+\cdots)-(1-x\cdots)} = \frac{1}{x}$$

por lo tanto:

$$B_J(\eta) = \frac{1}{J}\left[J\coth J\eta - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\eta}\right)\right] = \coth J\eta - \frac{1}{J\eta}$$

$$\langle M_z \rangle = N_0\mu\left[\coth \beta\mu H - \frac{1}{\beta\mu H}\right]$$

Problema #2 B.E y F.D

a) Para B.E.

para un estado r del sistema en la distribución gran canónica.

$$P_r \propto e^{-\beta E_r - \alpha N_r}$$

El número promedio de particulas en el estado s es:

$$\langle n_s \rangle = \frac{\sum_r n_s \exp[-\beta(n_1\epsilon_1 + n_2\epsilon_2 + \ldots] - \alpha[n_1 + n_2 \ldots]}{\sum_r \exp[-\beta(n_1\epsilon_1 + n_2\epsilon_2 + \ldots] - \alpha[n_1 + n_2 + \ldots]}$$

donde se suma sobre todos los estados.

tomando $Z \equiv \sum_r \exp[-\beta(n_1\epsilon_1 + n_2\epsilon_2 + \ldots) - \alpha(n_1 + n_2 \ldots]$

donde $\langle n_s \rangle = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial \epsilon_s} \ln Z$

Obtenemos, aplicando la serie geométrica:

$$Z = \left(\sum_{n_1} \exp[-(\alpha + \beta\epsilon_1)n_1]\right)\left(\sum_{n_2} \exp[-(\alpha + \beta\epsilon_2)n_2]\right) \ldots$$

$$Z = \left(\frac{1}{1 - e^{-(\alpha + \beta\epsilon_1)}}\right)\left(\frac{1}{1 - e^{-(\alpha + \beta\epsilon_2)}}\right)\left(\ldots\right.$$

$$\ln Z = -\sum_r \ln(1 - e^{-\alpha - \beta\epsilon_r})$$

$$\langle n_s \rangle = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial \epsilon_s} \ln Z = \frac{1}{e^{\alpha + \beta\epsilon} - 1}$$

b) Estadísticas FD

$$Z = \left[1 + e^{-(\alpha+\beta\epsilon_1)}\right]\left[1 + e^{-(\alpha+\beta\epsilon_2)}\right] \cdots$$

$$\ln Z = \sum_r \ln\left(1 + e^{-\alpha-\beta\epsilon_r}\right)$$

$$\langle n_s \rangle = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial \epsilon_s}\ln Z = \frac{1}{e^{\alpha+\beta\epsilon_s}+1}$$

c) Para B. E

$$\langle (\Delta n_s)^2 \rangle = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial \langle n_s \rangle}{\partial \epsilon_s}$$

$$\langle (\Delta n_s)^2 \rangle = \frac{e^{\alpha+\beta\epsilon_s}}{(e^{\alpha+\beta\epsilon_s}-1)^2} = \langle n_s \rangle^2\left(1 + \frac{1}{\langle n_s \rangle}\right)$$

Para F. D

$$= \langle n_s \rangle (1 + \langle n_s \rangle)$$

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial \langle n_s \rangle}{\partial \epsilon_s} = \frac{e^{\alpha+\beta\epsilon_s}}{(e^{\alpha+\beta\epsilon_s}+1)^2} = \langle n_s^2 \rangle\left(\frac{1}{\langle n_s \rangle} - 1\right)$$

$$= \langle n_s \rangle (1 - \langle n_s \rangle)$$

Problema # 3

a) El potencial químico se puede obtener a partir de la energía libre de Helmholtz.

$$F = -k_B T \ln Z$$

$$F = -k_B T \ln \frac{\zeta^N}{N!} \simeq -k_B T \left[N \ln \zeta - N \ln N + N \right]$$

usando la aproximación de Sterling $\ln N! \simeq N \ln N - N$

donde $\zeta = \frac{V}{h^3} (2\pi m kT)^{3/2}$

$$\mu = \frac{\partial F}{\partial N} = -kT \ln \frac{\zeta}{N}$$

b) La función de partición de una partícula individual para un gas ideal en dos dimensiones es:

$$\zeta' = \sum_{k_x k_y} \exp\left[-\frac{\beta \hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2) + \beta \epsilon_0 \right]$$

energía de interacción con superficie

área

$$\simeq e^{\beta \epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\beta \hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2) \right] \frac{A}{(2\pi)^2} \, dk_x \, dk_y$$

por lo tanto $\zeta' = e^{\beta \epsilon_0} \zeta^{2/3}$ usando $A = V^{2/3}$

entonces $\mu' = -k_B T \ln \frac{\zeta'}{N'} = -k_B T \ln \frac{e^{\beta \epsilon_0} \zeta^{2/3}}{N'}$

c) En equilibrio :

$$\mu = \mu' \Rightarrow \frac{\zeta}{N} = \frac{e^{\beta \epsilon_0} \zeta^{2/3}}{N'}$$

o tambien

$$\frac{V}{N} \frac{(2\pi m K_B T)^{3/2}}{h^3} = e^{\beta \epsilon_0} \frac{A}{N'} \frac{(2\pi m K_B T)}{h^2}$$

usando $n' = N'/A$ y la ley de gases ideales

$$\frac{\langle P \rangle}{KT} = \frac{N}{V}$$ encontramos

$$n' = \langle P \rangle h \left(2\pi m K_B^3 T^3\right)^{-1/2} e^{\epsilon_0 / K_B T}$$

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2023 - 1

Mecánica Cuántica

Instrucciones: El examen comprende dos partes. Para cada parte debe resolver dos de los tres problemas propuestos. **Los problemas deben ser resueltos en hojas separadas, y solo debe entregar la solución a dos problemas por parte**. No se dará crédito parcial si decide entregar la solución a un tercer problema, y en tal caso, solo dos de las soluciones se tendrán en cuenta, a discreción del calificador. En cada parte, todos los problemas tienen el mismo valor.

No se permite el uso de libros, apuntes, o dispositivos electrónicos.

Duración : 3 horas.

Parte 1: Resuelva dos de los siguientes tres problemas (20 puntos c/u)

---

1. Para un sistema de dos espines-1/2, $\hat{\boldsymbol{S}}^{(A)}$ y $\hat{\boldsymbol{S}}^{(B)}$, sean los vectores de estado

$$|\uparrow\uparrow\rangle, \qquad |\uparrow\downarrow\rangle, \qquad |\downarrow\uparrow\rangle, \qquad |\downarrow\downarrow\rangle,$$

los elementos de la base desacoplada, donde para un espín, $|\uparrow\rangle$ y $|\downarrow\rangle$ son los vectores propios de $\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z$ con valores propios $+\hbar/2$ y $-\hbar/2$ respectivamente.

a) (10 puntos) Dado el operador de momento angular total $\hat{\boldsymbol{J}} = \hat{\boldsymbol{S}}^{(A)} + \hat{\boldsymbol{S}}^{(B)}$, encuentre la expansión de los elementos de la base de momento angular total $|j, m\rangle$ de estados propios simultáneos de $\hat{\boldsymbol{J}}^2$ y $\hat{J}_z$ en términos de los elementos de la base desacoplada.

b) (10 puntos) Encuentre los vectores y valores propios del hamiltoniano

$$\hat{H} = \beta \hat{\boldsymbol{S}}^{(A)} \cdot \hat{\boldsymbol{S}}^{(B)} + \gamma \left(\hat{\boldsymbol{S}}^{(A)} + \hat{\boldsymbol{S}}^{(B)} \right),$$

donde β y γ son constantes arbitrarias.

---

2. Sea $\hat{\boldsymbol{S}}$ el operador de momento angular de un rotor de espín-3/2 ($\hat{\boldsymbol{S}} \cdot \hat{\boldsymbol{S}} = \hbar^2 j(j+1)$ con $j = 3/2$), ligeramente asimétrico, con hamiltoniano

$$H_\epsilon = \frac{\hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2}{2I_1} + \frac{\hat{S}_z^2}{2I_3} + \epsilon \frac{\hat{S}_x^2 - \hat{S}_y^2}{2I_1},$$

donde ϵ es el parámetro de asimetría.

a) (10 puntos) Definiendo H_0 (con $\epsilon = 0$) como el hamiltoniano no-perturbado, encuentre los valores propios de H_0 y sus estados propios correspondientes, expresando estos últimos en la base propia de S_z (vectores $|\pm\frac{3}{2}\rangle$, $|\pm\frac{1}{2}\rangle$ rotulados por los valores propios $m = \pm 3/2, \pm 1/2$).

b) (10 puntos) Encuentre la correción a las energías propias del rotor cuando $\epsilon \neq 0$ pero pequeño usando teoría de perturbación hasta segundo orden en ϵ.

---

3. Para un oscilador armónico en una dimensión, con hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2},$$

sean $|n\rangle$ con $n = 0, 1, \ldots$ los estados estacionarios, con energía $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$. Un estado coherente $|\alpha\rangle$ con parámetro complejo α se define como

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} |0\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle .$$

donde

$$\left\{ \begin{array}{c} \hat{a}^\dagger \\ \hat{a} \end{array} \right\} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, \hat{x} \mp i \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}\, \hat{p},$$

son los operadores de creación y destrucción para $\hat{H}$.

a) (6 puntos) Demuestre que el estado coherente es un estado propio del operador de destrucción $\hat{a}$, con valor propio α; es decir que

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle.$$

b) (7 puntos) Demuestre que

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\alpha\rangle = e^{-i\omega t/2}|\alpha e^{-i\omega t}\rangle;$$

es decir, que si el estado inicial del oscilador es el estado coherente $|\alpha\rangle$, con parámetro α, el estado en un tiempo t después será el estado coherente con parámetro $\alpha e^{-i\omega t}$.

c) (7 puntos) Suponiendo que el estado en $t = 0$ es es el estado coherente $|\alpha\rangle$, encuentre el valor esperado $\langle \hat{x} \rangle$ y la varianza $\langle \Delta \hat{x}^2 \rangle$ del operador de posición como función del tiempo en términos de $|\alpha|$ y ϕ, donde $|\alpha|$ y ϕ son las variables polares de α: $\alpha = |\alpha| e^{i\phi}$.

Parte 2: Resuelva dos de los siguientes tres problemas. (30 puntos c/u)

1. Considere la dispersión de una partícula sin espín de masa m por un potencial esféricamente simétrico $V(r)$ de alcance finito. La solución de dispersión a la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para una partícula que incide sobre el potencial dispersor con momentum definido $\boldsymbol{p} = \hbar k \hat{\boldsymbol{z}}$ tiene la forma en coordenadas esféricas (hasta factores de normalización)

$$\psi(\boldsymbol{r}) = e^{ikz} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}, \qquad r \to \infty,$$

donde $f(\theta)$ es la amplitud de dispersión. La sección diferencial de dispersión $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ viene dada entonces por el módulo al cuadrado de $f(\theta)$.

a) (18 puntos) En la llamada aproximación de Born, la amplitud de dispersión $f(\theta)$ se obtiene a primer orden en términos de una transformada de Fourier del potencial. Deduzca la expresión exacta para $f(\theta)$ en la aproximación de Born, suponiendo un potencial esféricamente simétrico. Puede ser útil usar la función de Green

$$G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

para la ecuación inhomogénea de Helmholtz $(\nabla^2_{\boldsymbol{r}} + k^2)G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = -\delta(\boldsymbol{r}')$ con condiciones de onda saliente, así como la aproximación

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| = r - \hat{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{r}' + O(r^{-1}), \qquad \hat{\boldsymbol{r}} := \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

para $r \gg r'$, y la identidad $|\hat{\boldsymbol{r}} - \hat{\boldsymbol{z}}| = 2\sin\frac{\theta}{2}$.

b) (12 puntos) Usando la aproximación de Born, encuentre la sección diferencial de dispersión para un potencial tipo "cascarón delta" de radio a, descrito por el potencial

$$V(r) = -\lambda\frac{\hbar^2}{2ma}\,\delta(r-a)\,,$$

con λ una constante adimensional, y comente sobre su comportamiento angular en función del parámetro adimensional ka (puede ayudarse con una gráfica cualitativa). Determine la sección eficaz total de dispersión en el límite $ka \to 0$, y verifique que tiene dimensiones de área.

2. Considere una partícula cargada de masa m y carga q, en un potencial armónico isotrópico en tres dimensiones

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{m\omega_0^2}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right),$$

el cual se verá modificado por el efecto de un campo magnético B constante a lo largo del eje z.

a) (10 puntos) Para el caso en el que $B = 0$, el hamiltoniano se puede escribir como la suma de tres hamiltonianos desacoplados de oscilador armónico unidimensional usando operadores de creación y destrucción ($\hat{a}_x^\dagger, \hat{a}_x, \hat{a}_y^\dagger, \hat{a}_y, \hat{a}_z^\dagger, \hat{a}_z$) y por lo tanto los estados propios son los estados de la base producto de los estados propios desacoplados $|n_x, n_y, n_z\rangle$, donde n_x es el valor propio del operador número $\hat{N}_x = \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x$, etc. Encuentre el valor de las dos niveles de energía más bajos del oscilador tridimensional, identificando el degeneramiento de cada nivel y las tripletas de números cuánticos (n_x, n_y, n_z) con energías en cada uno de los tres niveles.

b) (10 puntos) Considere ahora un nuevo conjunto completo de observables compatibles (CCOC), compuesto por el número total en x y y, el operador de momento angular en z, y el número total en z:

$$\hat{N}_{xy} = \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x + \hat{a}_y^\dagger a_y, \qquad \hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x, \qquad \hat{N}_z = a_z^\dagger a_z,$$

y sean $|n_{xy}, l_z, n_z\rangle$ los estados propios simultáneos de estos operadores, rotulados por los valores propios correspondientes. Para los dos niveles de energía de la parte (a), identifique las combinaciones lineales de los estados $|n_x, n_y, n_z\rangle$ que corresponden a estados propios de la nueva base $|n_{xy}, l_z, n_z\rangle$, identificando el valor de los números cuánticos (n_{xy}, l_z, n_z).

c) (10 puntos) Para el caso de B general, suponga el hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m}\left[\left(\hat{p}_x + \frac{qB}{2c}\hat{y}\right)^2 + \left(\hat{p}_y - \frac{qB}{2c}\hat{x}\right)^2 + \hat{p}_z^2\right] + \hat{V}(\boldsymbol{r}),$$

y tomando operadores de creación y destrucción de osciladores desacoplados con definiciones apropiadas de las frecuencias ω, escriba el hamiltoniano en términos de operadores $\hat{N}_{xy}, \hat{L}_z, y \hat{N}_z$ y de las frecuencias ω_0 y $\omega_c = \frac{qB}{mc}$ para finalmente encontrar expresiones para las energías propias de los estados de la parte (b). Ilustre gráficamente el comportamiento de los niveles energéticos de la parte (a) a medida que B va incrementando desde el valor $B = 0$.

3. Considere la interacción dipolo-dipolo entre dos átomos de hidrógeno separados por una distancia R a lo largo del eje z, la cual se describe con el potencial

$$V_{dd} = e^2 \frac{\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 - 3(\boldsymbol{r}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{z}})(\boldsymbol{r}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{z}})}{R^3} = e^2 \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 - 2 z_1 z_2}{R^3},$$

donde $\boldsymbol{r}_1$ y $\boldsymbol{r}_2$ son los vectores de posición de cada uno de los electrones relativo al respectivo núcleo. Ignorando el espín de los dos electrones, el hamiltoniano total se puede escribir entonces como

$$\hat{H}_{tot} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{V}_{dd},$$

con $\hat{H}_1$ y $\hat{H}_2$ los hamiltonianos del problema de Coulomb para cada uno de los átomos. Para cada átomo, use $|1s\rangle$ y $|2p, m\rangle$ para los estados de los niveles $n = 1, l = 0$ y $n = 2, l = 1$ respectivamente (con $m = -1, 0, 1$); equivalentemente, puede usar orbitales reales para los estados $2p$:

$$|2p_x\rangle = \frac{|2p,1\rangle + |2p,-1\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad |2p_y\rangle = \frac{|2p,1\rangle - |2p,-1\rangle}{\sqrt{2}i}, \qquad |2p_z\rangle = |2p,0\rangle$$

En adelante, nos limitaremos a los estados involucrados en la absorción de un fotón en la transición $1s \to 2p$ de un átomo, es decir los siete estados correspondientes al nivel fundamental y el primer nivel excitado del sistema no-perturbado de los dos átomos:

$$|1s\rangle_1|1s\rangle_2, \qquad |1s\rangle_1|2p,m\rangle_2, \qquad |2p,m\rangle_1|1s\rangle_2, \qquad m = -1, 0, 1$$

o con orbitales reales:

$$|1s\rangle_1|1s\rangle_2, \qquad |1s\rangle_1|2p_i\rangle_2, \qquad |2p_i\rangle_1|1s\rangle_2,, \qquad i = x, y, z.$$

(a) (10 puntos) Demuestre que, o justifique porqué, en el subespacio de los siete estados anteriormente mencionados, los únicos elementos de matriz no-nulos del potencial dipolo-dipolo son los que conectan estados $|1s\rangle_1|2p,m\rangle_2$ con estados $|2p,m\rangle_1|1s\rangle_2$ con el mismo m, o si usa orbitales reales, los que conectan $|1s\rangle_1|2p_i\rangle_2$ con $|2p_i\rangle_1|1s\rangle_2$ con la misma componente cartesiana i, para $i = x, y, z$.

(b) (10 puntos) Restringiéndose al subespacio generado por los siete estados en consideración, encuentre los estados propios del hamiltoniano total y las correspondientes correcciones de primer orden a la energía generadas por la interacción dipolo-dipolo, expresadas en términos del elemento de matriz

$$d \equiv e\langle 2p_z|z|1s\rangle = e\langle 2p,0|z|1s\rangle.$$

(c) (10 puntos) Suponga que una onda electromagnética plana y monocromática, con una frecuencia muy cercana a la frecuencia ω_{12} de la transición $1s \to 2p$ del hidrogeno, incide sobre este sistema de dos átomos inicialmente en el estado fundamental $|1s\rangle_1|1s\rangle_2$. Si la distancia interatómica R es pequeña comparada con la longitud de onda correspondiente, se puede describir la interacción con la onda con un término

$$H_{int}(t) = e\boldsymbol{E} \cdot (\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2)\cos(\omega t)$$

en el hamiltoniano, donde la amplitud de campo $\boldsymbol{E}$ es un vector constante. Mirando dos casos de polarización lineal de la onda incidente, $\boldsymbol{E} \propto \hat{\boldsymbol{z}}$ y $\boldsymbol{E} \propto \hat{\boldsymbol{x}}$, determine en cada caso a cuál o cuáles de los estados excitados de la parte (b) se generan transiciones en la aproximación dipolar, y cuáles deben ser las correcciones $\Delta\omega$ a la frecuencia ω_{12}, de tal manera que se maximice la absorción (es decir, que la radiación sea resonante con la transición).

Fórmulas generales

Relaciones de conmutación canónicas:

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar.$$

Ecuación de Schrödinger para estados:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$$

Evolución en la imagen de Heisenberg

$$\frac{d}{dt} \hat{A}_H = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{A}_H] + \frac{\partial \hat{A}_H}{\partial t}.$$

Ecuación de Schrödinger en tres dimensiones:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\boldsymbol{r}) + V(\boldsymbol{r}) \psi(\boldsymbol{r}) = E \psi(\boldsymbol{r}).$$

Estados propios de momentum:

$$\langle \boldsymbol{r} | \boldsymbol{p} \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}/\hbar}.$$

Oscilador armónico cuántico: para $\hat{H} = \hat{p}^2/2m + m\omega^2 \hat{x}^2/2$:

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right), \qquad \hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right), \qquad [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \qquad \hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$$

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \qquad \hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \qquad \hat{N} |n\rangle = n |n\rangle, \qquad \hat{H} = (N + \frac{1}{2}) \hbar\omega$$

Fórmula de Baker-Hausdorff

$$e^{\hat{B}} \hat{A} e^{-\hat{B}} = \hat{A} + [\hat{B}, \hat{A}] + \frac{1}{2!} [\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]] + \ldots.$$

Teoría de perturbación independiente del tiempo, para $\hat{H} = \hat{H}^{(0)} + \lambda \hat{V}$ con estados no-degenerados: $E_n = E_n^{(1)} + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \ldots$ con

$$E_n^{(1)} = \langle \psi_n^{(0)} | \hat{V} | \psi_n^{(0)} \rangle, \qquad E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle \psi_m^{(0)} | \hat{V} | \psi_n^{(0)} \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}.$$

Matrices de Pauli:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Momento angular:

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{J}_k, \qquad \hat{J}_\pm = \hat{J}_x \pm i \hat{J}_y, \qquad [\hat{J}_z, \hat{J}_\pm] = \pm\hbar \hat{J}_\pm \qquad [\hat{J}_+, \hat{J}_-] = 2, \hbar \hat{J}_z$$

$$\hat{\boldsymbol{J}}^2 |j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j, m\rangle, \quad \hat{J}_z |j, m\rangle = \hbar m |j, m\rangle, \qquad \hat{J}_\pm |j, m\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} |j, m \pm 1\rangle$$

Wigner-Eckart:

$$\langle j', m' | \hat{T}_q^{(k)} | j, m \rangle = \frac{\langle j' || \hat{T} || j \rangle}{\sqrt{2j+1}} \langle j, m; 1, q | j', m' \rangle$$

donde $\langle j' || T || j \rangle$ es el elemento de matriz reducido y $\langle j, m; k, q | j', m' \rangle$ los coeficientes de Clebsch-Gordan.

Vectores como tensores esféricos:

$$\hat{V}_{\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{V}_x \pm i \hat{V}_y), \qquad \hat{V}_0 = \hat{V}_z.$$

Coeficientes de Clebsch-Gordan: ver tabla adjunta

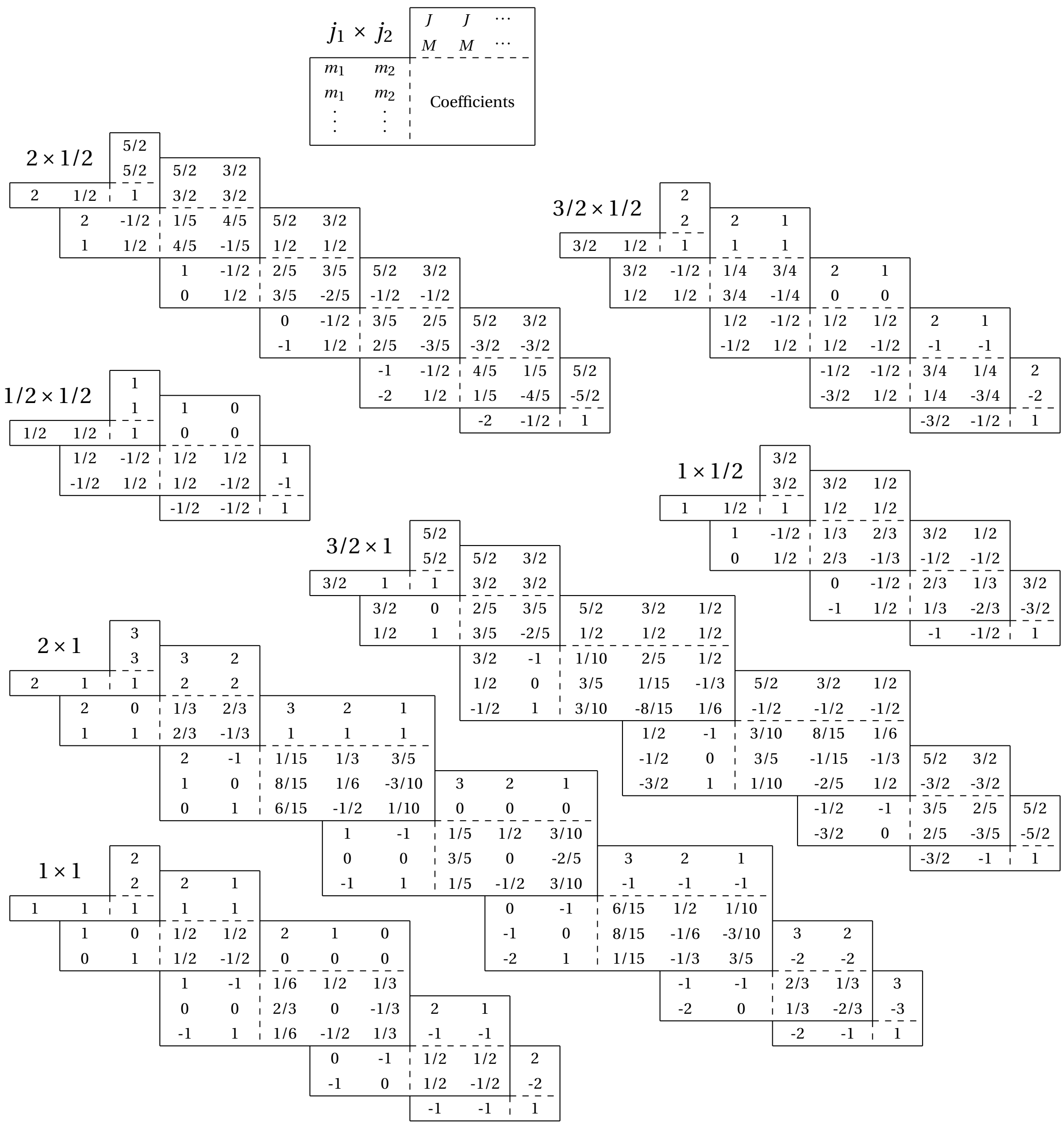


Figura 1: Clebsch-Gordan coefficients. A square root is understood on each coefficient, that is, $-1/3$ means $-\sqrt{1/3}$.

1. a) Suma de dos momentos angulares $j_A = j_B = 1/2$ admite $j=0$ o $j=1$. Las combinaciones lineales para $|j,m\rangle$ son:

$$
j=1 \begin{cases} |1,1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle \\ |1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\downarrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\uparrow\rangle \\ |1,-1\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle \end{cases} \quad J_-, \; J_-
$$

$$
j=0 \; \{ \; |0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\downarrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\uparrow\rangle
$$

b) • $|j,m\rangle$ estados propios de $J_z = \frac{\hbar}{2}(\sigma_z^{(A)} + \sigma_z^{(B)})$ con v.p. $m\hbar$ $\rightarrow$ $\sigma_z^{(A)} + \sigma_z^{(B)} = \frac{2}{\hbar}J_z$

• $J_z^2 = \frac{\hbar^2}{4}\left[\sigma_z^{(A)2} + \sigma_z^{(B)2} + 2\sigma_z^{(A)}\sigma_z^{(B)}\right]$

$$J_z^2 = \frac{\hbar^2}{4}(1+1) + \frac{\hbar^2}{2}\sigma_z^{(A)}\sigma_z^{(B)}$$

$$\sigma_z^{(A)}\sigma_z^{(B)} = \frac{2}{\hbar^2}J_z^2 - 1$$

$$|\vec{J}|^2 - J_z^2 = |\vec{S}^{(A)}|^2 + |\vec{S}^{(B)}|^2 + 2\vec{S}^{(A)}\cdot\vec{S}^{(B)} - 2S_z^{(A)}S_z^{(B)} - \frac{\hbar^2}{2}$$

2

$$\frac{\hbar^2}{2}(\sigma_x^{(A)}\sigma_x^{(B)} + \sigma_y^{(A)}\sigma_y^{(B)}) = |\vec{J}|^2 - \frac{\hbar^2 3}{2} - J_z^2 + \frac{\hbar^2}{2}$$

$$\rightarrow \sigma_x^{(A)}\sigma_x^{(B)} + \sigma_y^{(A)}\sigma_z^{(B)} = \left(|\vec{J}|^2 - J_z^2\right)\frac{2}{\hbar^2} - 2$$

Para el estado $|j,m\rangle$

$$E_{j,m} = 2\alpha\left(j(j+1) - m^2 - 2\right) + \beta\left(2m^2 - 1\right) + 2\gamma m$$

$$E_{0,0} = -4\alpha - \beta$$
$$E_{1,\pm 1} = -2\alpha + \beta \pm 2\gamma$$
$$E_{1,0} = -\beta$$

---

2 a)

$$S^2 = \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\hbar^2$$

$$H_0 = \frac{S_x^2 + S_y^2}{2I_1} + \frac{S_z^2}{2I_3}$$

$$= \frac{S^2 - S_z^2}{2I_1} + \frac{S_z^2}{2I_3} = \frac{S^2}{2I_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1}\right)S_z^2$$

$$= \frac{15\hbar^2}{8I_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1}\right)S_z^2$$

$\Rightarrow$

$$H_0|\pm 3/2\rangle = \left[\frac{15\hbar^2}{8I_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1}\right)\frac{9\hbar^2}{4}\right]|\pm 3/2\rangle$$

$$H_0|\pm 1/2\rangle = \left[\frac{15\hbar^2}{8I_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1}\right)\frac{\hbar^2}{4}\right]|\pm 1/2\rangle$$

$$\boxed{\begin{aligned} E_{\pm 3/2} &= \left(\frac{3}{4I_1} + \frac{9}{8I_3}\right)\hbar^2 \\ E_{\pm 1/2} &= \left(\frac{7}{4I_1} + \frac{1}{8I_3}\right)\hbar^2 \end{aligned}}$$

b) $S_x^2 - S_y^2$ en la perturbación se puede escribir como:

$$S_x^2 - S_y^2 = \left(\frac{S_+ + S_-}{2}\right)^2 - \left(\frac{S_+ - S_-}{2i}\right)^2$$

$$= \frac{S_+^2 + S_-^2}{4}$$

Entonces $\langle j, m' | S_x^2 - S_y^2 | j, m\rangle$

$$= \langle j, m' | S_+ S_+ | j, m\rangle + \langle j, m' | S_- S_- | j, m\rangle$$

Como $S_\pm$ sube/baja m en uno,
solo se conectan m y m' que difieren en 2

Los elementos no-nulos son:

$$\langle -1/2 | S_- S_- | 3/2\rangle = \langle 3/2 | S_+ S_+ | -1/2\rangle$$

$$\langle -3/2 | S_- S_- | 1/2\rangle = \langle 1/2 | S_+ S_+ | -3/2\rangle$$

usamos:

$$S_- |3/2\rangle = \sqrt{\frac{3 \cdot 5}{4} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)}\,\hbar\, |1/2\rangle = \sqrt{3}\,\hbar\, |1/2\rangle$$

$$S_- |1/2\rangle = \sqrt{\frac{3 \cdot 5}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}\, |-1/2\rangle = 2\hbar\, |-1/2\rangle$$

$$S_- |-1/2\rangle = \sqrt{\frac{3 \cdot 5}{4} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)}\, |-3/2\rangle = \sqrt{3}\,\hbar\, |3/2\rangle$$

Para obtener

$$\langle -1/2 | S_- S_- | 3/2 \rangle = \langle 3/2 | S_+ S_+ | -1/2 \rangle = 2\sqrt{3}\,\hbar^2$$

$$\langle -3/2 | S_- S_- | 1/2 \rangle = \langle 1/2 | S_+ S_+ | -3/2 \rangle = 2\sqrt{3}\,\hbar^2$$

$\Rightarrow$ Si $\quad V = \dfrac{S_x^2 - S_y^2}{2I_1} = \dfrac{S_+^2 + S_-^2}{4I_1}$

$\Rightarrow$ En la base $|\pm 3/2\rangle$, $|\pm 1/2\rangle$ los elemtos de matriz son:

$$V \doteq \varepsilon \frac{\sqrt{3}\,\hbar^2}{2I_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como no hay elementos diagonales, la corrección a primer orden $= 0$.

$$\Rightarrow \Delta E_m = \sum_{n \neq m}' \frac{|\langle m | V | n \rangle|^2}{E_n - E_m} = \varepsilon^2 \frac{3\hbar^4}{4I_1^2} \sum_{n \neq m}' \frac{1}{E_n - E_m}$$

$$\Delta E_{m=\pm 3/2} = \varepsilon^2 \frac{3\hbar^4 / 4I_1^2}{E_{\mp 1/2} - E_{\pm 3/2}} = \varepsilon^2 \frac{3\hbar^2}{4I_1} \left(\frac{I_3}{I_3 - I_1} \right)$$

$$\Delta E_{m=\pm 1/2} = \varepsilon^2 \frac{3\hbar^4}{E_{\mp \frac{3}{2}} - E_{\pm 1/2}} = -\varepsilon^2 \frac{3\hbar^2}{4I_1} \left(\frac{I_3}{I_3 - I_1} \right)$$

3.

a) $$a|\alpha\rangle = a\, e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle$$

$$= e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha a^\dagger} \underbrace{e^{-\alpha a^\dagger} a e^{\alpha a^\dagger}} |0\rangle$$

$$e^{-\alpha a^\dagger} a e^{\alpha a^\dagger} = a - \alpha \underbrace{[a^\dagger, a]}_{-1} + \frac{\alpha^2}{2!} \underbrace{[a^\dagger, \underbrace{[a^\dagger, a]}_{1}]}_{0} + \dots$$

$$= a + \alpha$$

$$\Rightarrow \quad a|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^\dagger} (a+\alpha)|0\rangle$$

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^\dagger} \alpha |0\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

b) $$\mathcal{H} = \hbar\omega(\hat{N} + 1/2)$$

$$\Rightarrow \quad e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}t} |\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n{}' \frac{\alpha^n e^{-\frac{i}{\hbar}\hbar\omega(\hat{N}+1/2)t}}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

$$= e^{-\frac{i\omega t}{2}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n{}' \frac{(\alpha e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

$$= e^{-\frac{i\omega t}{2}} |\alpha e^{-i\omega t}\rangle$$

c)

$$\langle \psi;t|\hat{x}|\psi;t\rangle = \langle \alpha e^{-i\omega t}|\hat{x}|\alpha e^{-i\omega t}\rangle$$

$$\hat{x} = \frac{a+a^{\dagger}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \qquad a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

$$\langle\alpha|a^{\dagger} = \alpha^{*}\langle\alpha|$$

$$\langle x\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\alpha(t) + \alpha^{*}(t)\right), \quad \alpha(t) = \alpha e^{-i\omega t}$$

$$\underline{\langle x\rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\,|\alpha|\cos(\omega t-\phi)}$$

$$\langle x^2\rangle = \langle (a+a^{\dagger})^2\rangle \frac{\hbar}{2m\omega}$$

$$= \langle a^2 + a^{\dagger 2} + a^{\dagger}a + aa^{\dagger}\rangle \frac{\hbar}{2m\omega}$$

$$= \langle a^2 + a^{\dagger 2} + 2a^{\dagger}a + 1\rangle \frac{\hbar}{2m\omega}$$

$$= \left[\alpha^2(t) + \alpha^{*}(t)^2 + 2\alpha^{*}(t)\alpha(t) + 1\right]\frac{\hbar}{2m\omega}$$

$$= \langle x\rangle^2 + \frac{\hbar}{2m\omega}$$

$$\Rightarrow \Delta x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}$$ (independiente del tiempo)

---

4. a) De la ecuación de Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = E\psi \rightarrow E := \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$\rightarrow \nabla^2\psi + k^2\psi = \frac{2mV}{\hbar^2}\psi$$

$$\Rightarrow \psi(\vec{r}) = \psi_{inc}(\vec{r}) - \int G(\vec{r},\vec{r}\,')\frac{2m}{\hbar^2}V(\vec{r}\,')\psi(\vec{r}\,')\,d^3\vec{r}\,'$$

donde $\psi(\vec{r})$ es la sol'n incidente a la ec. de Helmholtz homogénea: $\psi_{inc}(\vec{r}) = e^{ikz}$

$$\psi(\vec{r}) = e^{ikz} - \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}V(\vec{r}\,')\psi(\vec{r}\,')\,d^3\vec{r}\,'$$

En la integral tomamos:

- $\psi(\vec{r}\,') = e^{ikz'}$
- $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \simeq \frac{1}{r}$
- $e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \approx e^{ikr - ik\hat{r}\cdot\vec{r}\,'}$

$$\Rightarrow \psi(\vec{r}) \approx e^{ikz} - \frac{e^{ikr}}{r} \times \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int V(\vec{r}\,')e^{-ik(\hat{r}-\hat{z})\cdot\vec{r}\,'}\,d^3\vec{r}\,'$$

$$\Rightarrow f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int V(\vec{r}\,')e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}\,'}\,d^3\vec{r}\,'$$

donde $\vec{q} = k(\hat{r}-\hat{z})$

b)

$$V(r) = -\lambda \frac{\hbar^2}{2ma}\delta(r-a)$$

$$f = \frac{m}{2\pi\hbar^2}\left(\lambda\frac{\hbar^2}{2ma}\right)\int \delta(r'-a)\, r'^2 dr' \int_{\Omega'} d\Omega'\, e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}'}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi a}\, a^2 \int \underbrace{d\Omega'}_{d\phi\, d\theta' \sin\theta'}\, e^{iaq\underbrace{(\hat{q}\cdot\hat{r})}_{:=\cos\theta'}}$$

$$= \frac{\lambda a}{2}\int_{-1}^{1} d(\cos\theta')\, e^{-i(qa)\cos\theta'}$$

$$= \lambda a\, \frac{e^{iqa} - e^{-iqa}}{2iqa}$$

$$= \lambda a\, \frac{\sin(qa)}{qa}$$

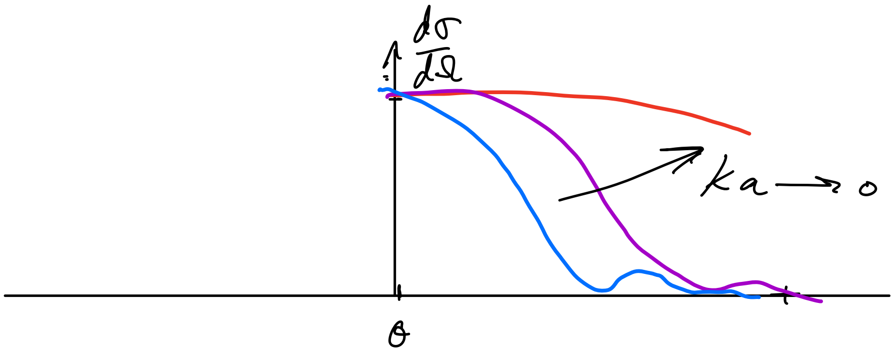
$$q = |\vec{q}| = k|\hat{r} - \hat{z}| = k(2 - 2\cos\theta) = 4k\sin^2\theta/2$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f|^2 = (\lambda a)^2\left[\frac{\sin^2(4ka\sin^2\theta/2)}{(4ka\sin^2\theta/2)^2}\right]$$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\lambda^2}{16k^2}\,\frac{\sin^2(4ka\sin^2\theta/2)}{(\sin^4\theta/2)}}$$

Usando $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$; tenemos:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) \xrightarrow[ka\to 0]{} (\lambda a)^2$$



2a)

$$H = H_x + H_y + H_z$$

$$= \hbar\omega_0 \Big[\underbrace{n_x + n_y + n_z}_{n_{TOT}} + \frac{3}{2} \Big]$$

Como n_{TOT} toma valores enteros, los dos niveles más bajos son:

NIVEL		ESTADOS
$E_0 = 3\hbar\omega_0/2$	con $n_{TOT} = 0$	0 0 0
$E_1 = 5\hbar\omega_0/2$	con $n_{TOT} = 1$	0 0 1 0 1 0 1 0 0

b) $L_z = x p_y - y p_x$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} \left[(a_x + a_x^\dagger)\frac{(a_y - a_y^\dagger)}{i} - (a_y + a_y^\dagger)\frac{(a_x - a_x^\dagger)}{i} \right]$$

$$\rightarrow L_z = -i\hbar\left(a_x^\dagger a_y - a_y^\dagger a_x\right)$$

sobre los estados anteriores en la base $|000\rangle$:

$$L_z|000\rangle = 0 \qquad L_z|010\rangle = -i\hbar|100\rangle$$

$$L_z|001\rangle = 0 \qquad L_z|100\rangle = +i\hbar|010\rangle$$

tomando combinaciones lineales de $|010\rangle$ y $|100\rangle$

$$|\pm\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|100\rangle \pm i|010\rangle\right)$$

$$\rightarrow L_z|\pm\rangle = \frac{i\hbar|010\rangle \pm (-i\hbar)i|100\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$= \pm\hbar|\pm\rangle$$

Tenemos entonces:

$$|n_{xy}=0, l_z=0, n_z=0\rangle = |000\rangle$$

$$|n_{xy}=1, l_z=0, n_z=1\rangle = |001\rangle$$

$$|n_{xy}=1, l_z=1, n_z=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|100\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|010\rangle$$

$$|n_{x}=1, l_z=-1, n_z=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|100\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|010\rangle$$

c) Expandiendo H:

$$H = \frac{1}{2m}\left[p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right] + \frac{1}{2}\left(\frac{qB}{mc}\right)(p_x y - p_y x)$$

$$+ \frac{1}{2m}\left(\frac{qB}{2c}\right)^2 (x^2+y^2) + \frac{1}{2}m\omega_0^2(x^2+y^2+z^2)$$

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}m\left(\omega_0^2 + \frac{1}{4}\omega_c^2\right)(x^2+y^2) - \frac{\omega_c}{2}L_z$$
$$+ \frac{1}{2m}p_z^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 z^2$$

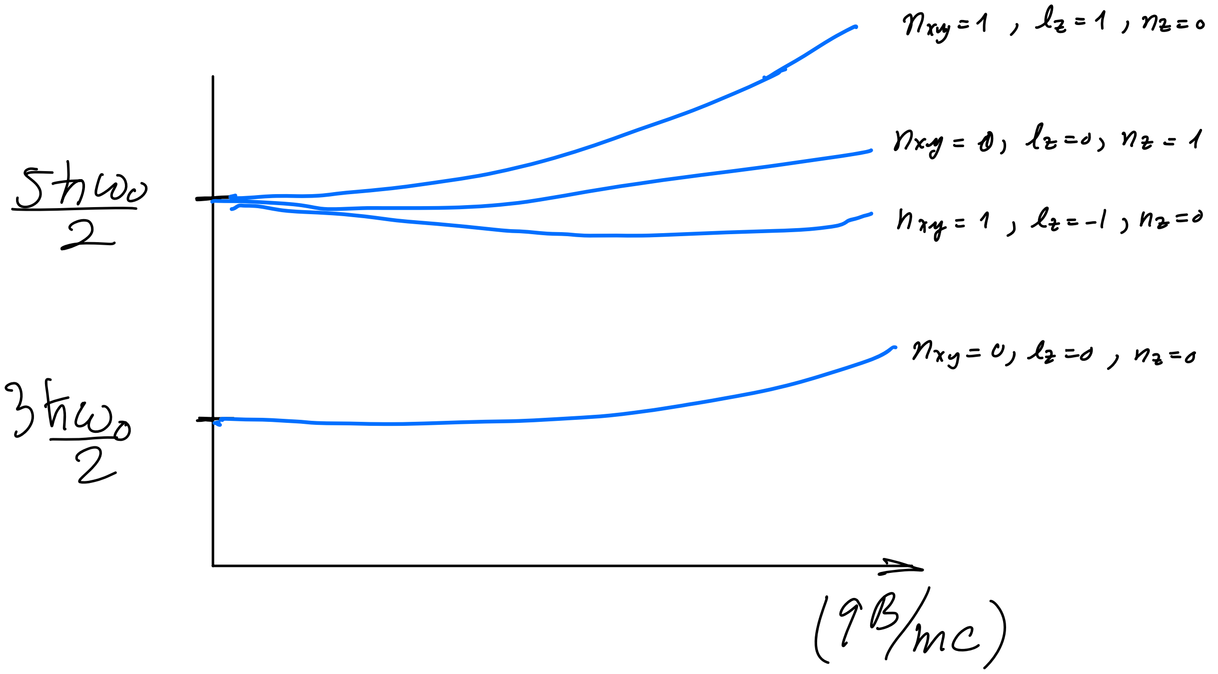
definiendo $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{1}{4}\omega_c^2}$

y los $a_x, a_x^\dagger, a_y, a_y^\dagger$ con ω':

$$H = \hbar\omega'(n_{xy}+1) - \frac{\omega_c}{2}L_z + \hbar\omega_0(n_z + 1/2)$$

los niveles son:

n_{xy}	l_z	n_z	E_{n_{xy}, l_z, n_z}
0	0	0	$\hbar[\omega' + \omega_0/2]$
0	0	1	$\hbar[\omega' + 3\omega_0/2]$
1	1	0	$\hbar[2\omega' - \frac{\omega_c}{2} + \omega_0/2]$
1	-1	0	$\hbar[2\omega' + \frac{\omega_c}{2} + \omega_0/2]$



3(a) Como los estados s y p son estados propios de paridad y $\vec{r}$ es un operador impar, quedan excluidos todos los elementos que involucran transiciones $s \to s$ o $p \to p$ en el mismo átomo.

Usando orbitales reales, por simetría

$\langle 2p_y | x | 1s \rangle$, $\langle 2p_z | x | 1s \rangle$,
$\langle 2p_x | y | 1s \rangle$, $\langle 2p_z | y | 1s \rangle$,
y $\langle 2p_x | z | 1s \rangle$, $\langle 2p_y | z | 1s \rangle$,

son cero y los elementos

$\langle 2p_x | x | 1s \rangle$, $\langle 2p_y | y | 1s \rangle$ y $\langle 2p_z | z | 1s \rangle$

son iguales, y como los orbitales son reales, son iguales también a sus conjugados.

Si escribimos H_{dd} en componentes cartesianas:

$$H_{dd} = \frac{e^2}{R^3}\left(x_1 x_2 + y_1 y_2 - 2 z_1 z_2 \right),$$

vemos entonces que solo tiene elementos de matriz no-nulos entre estados

$|1s\rangle |p_i\rangle$ y $|p_i\rangle |1s\rangle$ con el mismo i

b) En el subespacio en consideración

$$H_{dd} = \frac{e^2 d^2}{R^3}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} 1s1s & 1s2p_x & 1s2p_y & 1s2p_z & 2p_x1s & 2p_y1s & 2p_z1s \end{array} \\
\left[\begin{array}{c|ccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\
\hline
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\end{array}$$

los estados propios son el fundamental original

$$|g\rangle := |1s\rangle|1s\rangle$$

y las combinaciones de excitados

$$|x_\pm\rangle := \left(|1s\rangle|2p_x\rangle \pm |2p_x\rangle|1s\rangle\right)/\sqrt{2}$$

$$|y_\pm\rangle := \left(|1s\rangle|2p_y\rangle \pm |2p_y\rangle|1s\rangle\right)/\sqrt{2}$$

$$|z_\pm\rangle := \left(|1s\rangle|2p_z\rangle \pm |2p_z\rangle|1s\rangle\right)/\sqrt{2}$$

las correcciones son entonces:

$$\Delta E_g = 0$$

$$\Delta E_{x\pm} = \pm\, e^2 d^2/R^3$$

$$\Delta E_{y\pm} = \pm\, e^2 d^2/R^3$$

$$\Delta E_{z\pm} = \mp\, 2 e^2 d^2/R^3$$

c) Para $\vec{E} \propto \hat{z} \rightarrow H_{int} = eE_0(z_1+z_2)\cos\omega t$

$\langle e|\mathcal{H}_{int}|g\rangle \neq 0$ solo cuando

$|e\rangle = |z+\rangle$, o sea que

$\Delta E = -2e^2 d_z^2/R^3 \rightarrow$ $\boxed{\Delta\omega = -\dfrac{2e^2 d_z^2}{\hbar R^3}}$

Para $\vec{E} \propto \hat{z}$, $\mathcal{H}_{int} = eE_0(x_1+x_2)\cos\omega t$

y $\langle e|\mathcal{H}_{int}|g\rangle \neq 0$ solo cuando $|e\rangle = |x\pm\rangle$,

o sea cuando

$$\Delta E = +\frac{e^2 d_z^2}{R^3} \rightarrow \boxed{\Delta\omega = \frac{e^2 d_z^2}{\hbar R^3}}$$

Examen de conocimientos mecánica analítica
2023-2

Instrucciones: El examen comprende dos partes. Para cada parte debe resolver dos de los tres problemas propuestos. **Los problemas deben ser resueltos en hojas separadas, y solo debe entregar la solución a dos problemas por parte**. No se dará crédito parcial si decide entregar la solución a un tercer problema, y en tal caso, solo dos de las soluciones se tendrán en cuenta, a voluntad del calificador. En cada parte, todos los problemas tienen el mismo valor.

No se permite el uso de libros, apuntes, o dispositivos electrónicos. **Duración**: 3 horas.

Relaciones potencialmente útiles:

$I_{bola}=2/5\ MR^2$, $I_{cascarón}=2/3\ MR^2$, $I_{barra}=1/3\ ML^2$ (alrededor de un extremo de la barra)

$\boldsymbol{F}_{coriolis} = -2m\,\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$

$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)$

$\sqrt{7} \approx 2{,}65$

Examen de conocimientos mecánica analítica
2023-2

Parte 1

Problema 1.1 Barco varado (20 pts)

El capitán de un barco (M=1000kg sin el ancla) en un mar sin viento ni corriente (el mar de Sargasso, a 30º Norte) decide usar la fuerza de Coriolis como medio de propulsión, usando el ancla (m=200kg). La idea es subirla lentamente hasta arriba del mástil (h=20m) para dejarla caer a una velocidad promedio v.

a) ¿Por qué se movería el barco? 3 pts (enuncie principio(s) fundamental tras la fuerza de Coriolis)
b) ¿En qué dirección se moverá? ¿La fuerza de Coriolis sería mayor o menor si estuviera en el ecuador? 4 pts
c) Suponiendo que no hay resistencia del agua, ¿qué tan rápido se moverá en función de la velocidad del ancla? Exprese la solución algebraicamente (8 pts)
d) Estime el valor de la velocidad que gana el barco sin resistencia del agua (puede usar la velocidad promedio de una caída libre para el ancla). Es realista la idea del capitán? (5pt)

Problema 1.2 (20 pts) doble masa y resorte

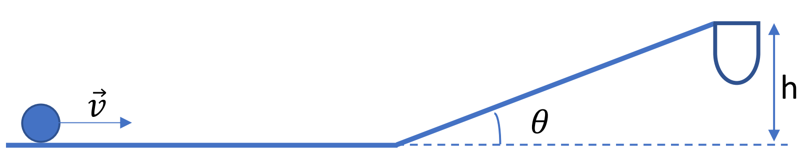
Dos masas puntuales se mueven sin fricción en un eje vertical, el eje y en el campo gravitacional de la tierra. La masa 1 está conectada al origen de coordenadas a través de un resorte ideal sin masa con constante elástica $k_1 > 0$, y la masa 2 está conectada a la primera a través de un segundo resorte con constante $k_2 > 0$.

a) Determine el Lagrangiano del sistema (7pt)
b) Determine las ecuaciones de movimiento de Lagrange (7pt)
c) Encuentre los puntos de equilibrio del sistema y establezca si son estables o no. (6pt)

Problema 1.3 (20 pts) Golf

Una bola de golf, de densidad uniforme, de radio r y masa m se empuja de manera a que ruede sin deslizarse sobre una superficie plana con una velocidad inicial v_i. Después del lanzamiento la bola encuentra una rampa a un ángulo θ y debe parar a una altura h, dónde hay un hueco, al que debe llegar con velocidad 0 de manera a que entre en el hueco sin seguir derecho. Suponiendo que no hay fuerzas disipativas y que tenemos una bola de golf que cae en el hueco que se encuentra a una altura h, encuentre:

a) ¿Cómo se debería modificar la velocidad inicial de la bola de golf con respecto a la de una partícula idealizada que llega a la misma altura? Exprese la solución como una razón entre las velocidades iniciales, siendo claro en cuanto a cuál es la que requiere mayor velocidad. (10pt)
b) Calcule esta razón de velocidades cuando se compara la pelota de golf con el caso de un cascarón como una pelota de ping-pong. (10pt)



Examen de conocimientos mecánica analítica
2023-2

Parte 2

Problema 2.1 Hamiltoniano van der Waals (30pts)

la interacción clásica entre dos moléculas de gas inerte de masa m se puede escribir como:

$$U(r) = -\frac{2A}{r^6} + \frac{B}{r^{12}}$$

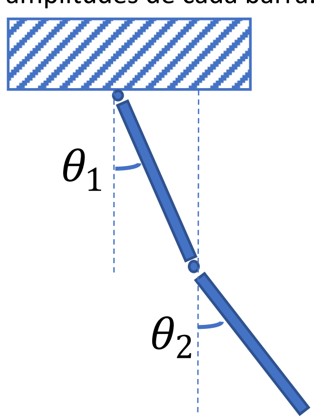
donde A, B > 0, y r = |$\mathbf{r}_1$-$\mathbf{r}_2$|es la separación entre las dos moléculas de gas que son idénticas.

a) Encuentre el hamiltoniano del sistema de dos átomos.(10pts)
b) Describa el estado clásico mínimo de energía del sistema clásico. (10pts)
c) Si la energía del sistema el ligeramente mayor al estado en b), cuales son las posibles frecuencias de movimiento del sistema? (10pts)

Problema 2.2 Péndulo doble (30pts)

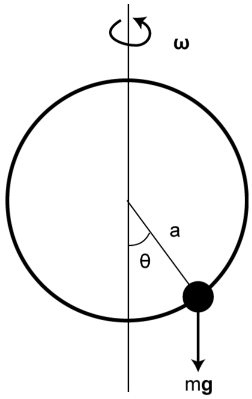
Un péndulo doble consiste en dos barras idénticas conectadas por los extremos por una bisagra y colgadas del techo por una segunda bisagra como se muestra en el diagrama. Las barras tienen masa m, largo L, densidad constante y se encuentran en un campo gravitacional hacia abajo con aceleración g. Los péndulos solo se pueden mover en un plano vertical (como si fuera sobre la superficie del papel si este estuviera en posición vertical). Puede suponer ángulos pequeños para $\theta_1 \ll 1$, $\theta_2 \ll 1$.

a) Encuentre el lagrangiano del sistema en función de los dos ángulos θ_1 y θ_2, y sus derivadas en el tiempo $\dot{\theta}_1$ y $\dot{\theta}_2$. (12 pt)
b) Encuentre las frecuencias de oscilación para oscilaciones pequeñas. (12 pt)
c) Ilustre los modos normales explicando en detalle su movimiento y la relación entre las amplitudes de cada barra. (6pt)



Examen de conocimientos mecánica analítica
2023-2

Problema 2.3 bola en aro (30 pts)



Considere un aro de radio a colgado de un techo, rotando con velocidad angular ω constante alrededor del eje vertical. Una pepa de masa m con un hueco donde se ensarta el aro se desliza sin fricción sobre este aro como indica la figura.

a) Escriba el lagrangiano de la pepa usando como coordenada el ángulo θ como indica la figura. (6pt)

b) Encuentre el hamiltoniano de la pepa en función de θ y el momento conjugado p_θ correspondiente. ¿Coincide el hamiltoniano con la energía de la pepa E= ½ mv^2 + mgz? ¿Por qué si/no? (8pt)

c) Deduzca las ecuaciones de movimiento de la pepa a partir de las ecuaciones de Hamilton correspondientes, e identifique en estas, para un ω dado, los valores de θ para los cuales existe equilibrio (donde se cumple $p_\theta = \dot{p_\theta} = 0$). (10pt)

d) Grafique las curvas de fase del hamiltoniano para distintos valores de ω, para los casos ω < ω_0 y ω > ω_0 $donde$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{a}}$. En las gráficas identifique los puntos de equilibrio encontrados en c) y determine si son estables o inestables (puede usar el potencial efectivo). (6pt)