Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2022 - 2
Electromagnetismo

Instrucciones: El examen comprende dos partes. Para cada parte debe resolver dos de los tres problemas propuestos. **Los problemas deben ser resueltos en hojas separadas, y solo debe entregar la solución a dos problemas por parte**. No se dará crédito parcial si decide entregar la solución a un tercer problema, y en tal caso, solo dos de las soluciones se tendrán en cuenta, a voluntad del calificador. En cada parte, todos los problemas tienen el mismo valor.

No se permite el uso delibros, apuntes, o dispositivos electrónicos.

Duración : 3 horas.

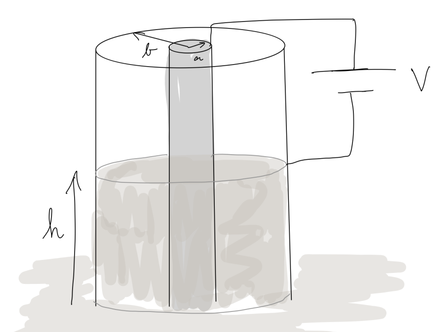
Parte 1: Resuelva dos de los siguientes tres problemas (20 puntos c/u)

---

1. Un condensador está compuesto por dos cilindros coaxiales conductores de longitud l y radios a y b, con $a < b$.

a) Calcule la capacitancia del condensador, suponiendo un caso general en el que el medio entre los dos cilindros está relleno de un dieléctrico de permitividad ϵ.

b) Suponga ahora que sin dieléctrico de por medio, el condensador se posiciona verticalmente sobre un recipiente con líquido dieléctrico de permitividad $\epsilon > \epsilon_0$ y densidad ρ, de tal forma que el líquido pueda subir por el espacio entre las placas. Si se mantiene una diferencia de potencial V entre las placas, ¿a qué altura h asciende el líquido?

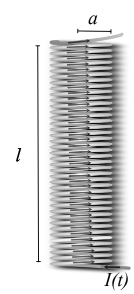


2. Considere un solenoide de longitud l y radio a, construido con un alambre que enrolla N veces y por el que pasa una corriente dependiente del tiempo $I(t)$, positiva en la dirección que se indica en la figura. Suponga que el embobinado es suficientemente denso como para suponer que la corriente fluye uniformemente sobre la superficie del solenoide en la dirección perpendicular a su eje, y que la relación l/a lo suficientemente grande para despreciar efectos de borde.

a) Calcule el campo magnético dentro del solenoide, e integrando la densidad de energía $u = \frac{1}{2\mu_0}|\boldsymbol{B}|^2$, encuentre la energía total $U(t)$ almacenada en el solenoide como función de la corriente instantánea.

b) Suponga ahora que $dI/dt < 0$. Calcule la magnitud y dirección del campo eléctrico inducido en un plano perpendicular al eje del solenoide. Indique claramente el sentido en el que apunta el campo.

c) Usando los resultados de las partes (a) y (b), calcule el vector de Poynting $\boldsymbol{S}(t)$ en la superficie de solenoide, indicando claramente su dirección. Calcule el flujo saliente de energía electromagnética al solenoide $\Phi_E(t) = \oint_S \boldsymbol{S} \cdot d\boldsymbol{a}$ sobre la superficie del solenoide, y verifique que se cumple $\Phi_E(t) = -dU/dt$.

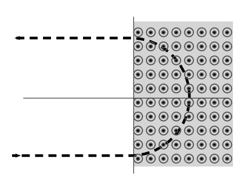


---

3. Suponga que en el semiespacio $x > 0$ hay un campo magnético constante $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{z}}$. Un electrón incialmente libre en la región $x < 0$, moviéndose en la dirección $+x$ con energía cinética E, entra a la región en la que está el campo y recorre media órbita ciclotrónica hasta que sale nuevamente a la región sin campo. Si ΔE es la energía total que radía el electrón durante su paso por la región con campo magnético, es posible expresar la razón $\Delta E/E$ como

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{B}{B_0},$$

donde B_0 es una constante con dimensiones de campo magnético que depende de la carga y masa del electrón y otras constantes del electromagnetismo. Suponiendo que $\Delta E \ll E$, determine la constante B_0 y estime su valor en Teslas.



Parte 2: Resuelva dos de los siguientes tres problemas. (30 puntos c/u)

1. Una solución de dextrosa responde a un campo eléctrico aplicado con una polarización eléctrica dada por

$$\boldsymbol{P} = \gamma \nabla \times \boldsymbol{E},$$

donde γ es una constante que depende de la solución.

a) Incluyendo en las ecuaciones de Maxwell las densidades de carga y corriente asociadas a las cargas ligadas, $\rho_l = -\nabla \cdot \boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{J}_l = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}$, demuestre que el campo eléctrico satisface la ecuación de onda modificada:

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} + \gamma \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\nabla \times \boldsymbol{E}).$$

b) Sean $\boldsymbol{E}_+(z,t)+$ y $\boldsymbol{E}_-(z,t)$ ondas planas monocromáticas de frecuencia ω, dirección de propagación z y polarización circular derecha (+) o izquierda (−), correspondientes a las partes reales de ondas complejas de la forma

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}(z,t)_\pm = \widetilde{E}_o \boldsymbol{\epsilon}_\pm e^{i(k_\pm z - \omega t)} \qquad \boldsymbol{\epsilon}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{\boldsymbol{x}} \pm i\hat{\boldsymbol{y}}\right),$$

donde k_+ y k_- son números de onda positivos por determinar. Demuestre que escogiendo $k_\pm$ apropiadamente, es posible encontrar $\boldsymbol{E}_+(z,t)$ y $\boldsymbol{E}_-(z,t)$ que satisfagan independientemente la ecuación de onda de la parte (a), pero con distintas velocidades de propagación $v_\pm = \frac{\omega}{k_\pm}$. Determine los índices de refracción $n_\pm = c/v_\pm$ de las dos ondas, suponiendo que $\gamma\mu_0\omega c \ll 1$.

c) Suponga que sobre una lámina de espesor d rellena de la solución de dextrosa, incide normalmente una onda de frecuencia ω y polarización *lineal*, por ejemplo polarización en $\hat{x}$. Demuestre que la onda que sale del otro lado de la lámina también está polarizada linealmente, pero con el vector de polarización rotado con respecto al de la onda incidente. Determine el ángulo y el sentido de rotación. (Ayuda: considere la onda incidente como una superposición de una onda de polarización derecha y otra de polarización izquierda y para cada componente analice la amplitud y fase de la onda transmitida).

2. Un medio dieléctrico de permitividad ϵ contiene una cavidad esférica vacía de radio R, en el centro de la cual se sitúa un dipolo eléctrico puntual de magnitud p en la dirección z.

a) Teniendo en cuenta la simetría azimutal, plantee una expansión multipolar en las coordenadas esféricas r y θ, para la solución del potencial eléctrico tanto en el interior como en el exterior de la cavidad esférica, y especifique las condiciones que debe satisfacer la solución cerca del origen y en el interfaz entre los dos medios.

b) Usando el planteamiento anterior, determine los coeficientes de la expansión multipolar en las dos regiones, y encuentre el potencial eléctrico para todo $r > 0$. Verifique que cuando $\epsilon = \epsilon_0$, su respuesta coincide con la expresión para un dipole en el vacío

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

c) Encuentre la densidad de carga de polarización, $\sigma_p(\theta)$, sobre la superficie de la esfera.

---

3. En el gauge de Lorentz los potenciales electromagnético debidos a una distribución de carga vienen dados por

$$V(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3\boldsymbol{r}'\,\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t_r)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}, \qquad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3\boldsymbol{r}'\,\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t_r)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|},$$

donde t_r es el tiempo retardado $t_r = t - |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c$. Suponga que en el plano $z = 0$ se coloca una lámina infinita de grosor despreciable, por la cual fluye una corriente superficial $\boldsymbol{K}(t) = K(t)\theta(t)\hat{\boldsymbol{x}}$, donde la función de Heaviside $\theta(t)$ asegura que $K(t) = 0$ para todo $t < 0$. Se sabe también que la densidad de carga superficial sobre la lamina es nula para $t = 0$.

a) Encuentre expresiones para las densidades de carga y corriente $\rho(\boldsymbol{r}',t_r)$ y $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t_r)$) sobre toda la lámina y para todo tiempo, usando funciones delta de Dirac.

b) Introduzca coordenadas cilíndricas (ρ',ϕ',z') y suponiendo que el punto de observación se encuentra en la posición z $(x = y = 0)$, reduzca las integrales de los potenciales a integrales sobre la variable ρ' en el plano; finalmente, cambiando la variable de integración de ρ' a t_r, obtenga expresiones para los potenciales electromagnéticos en términos de integrales definidas sobre el tiempo de la magnitud de la corriente $K(t)$. Asegúrese que su resultado sea consistente con el hecho de que $K(t) = 0$ para todo $t < 0$ y que cubra tanto el caso $z > 0$ como el caso $z < 0$.

c) Determine los campos eléctricos y magnéticos (tanto magnitud como dirección) en todo el espacio y en todo tiempo, expresados en términos de la función $K(t)$. Interprete físicamente su resultado.

d) Encuentre una expresión para la intensidad de la radiación emitida por la lámina como función del tiempo.

Fórmulas generales

Ecuaciones de Maxwell en un medio lineal y relaciones constitutivas

$$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_{\mathrm{f}}\quad \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}_{\mathrm{f}}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\qquad \mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}=\epsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P},$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0\qquad \nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\qquad \mathbf{H}=\frac{1}{\mu}\mathbf{B}=\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}-\mathbf{M}\qquad \frac{\partial\rho_{\mathrm{f}}}{\partial t}=-\nabla\cdot\mathbf{J}_{\mathrm{f}}$$

Fórmula de Larmor: $P=\mu_0 q^2 a^2/6\pi c$. Vector de Poynting: $\mathbf{S}=\mathbf{E}\times\mathbf{H}$

Identidades vectoriales:

$$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B})=\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})+\vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})+(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}\qquad \vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B})=(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}-(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}+\vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})-\vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

Operaciones diferenciales en coordenadas esféricas:

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\qquad \nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2A_r\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$\nabla\times\mathbf{A}=\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\varphi\sin\theta\right)-\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\hat{\mathbf{r}}+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\varphi\right)\right)\hat{\boldsymbol{\theta}}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\nabla^2 f=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$

Operaciones diferenciales en coordenadas cilíndricas:

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho A_\rho\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{\rho}}+\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho A_\varphi\right)-\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$$

$$\nabla^2 f=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Polinomios de Legendre:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n\qquad P_0(x)=1\qquad P_1(x)=x\qquad P_2(x)=\frac{3x^2-1}{2}\qquad P_3(x)=\frac{5x^3-3x}{2}$$

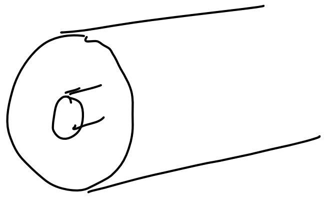
$$\int_{-1}^{1}P_l(x)P_{l'}(x)dx=\int_0^{\pi}P_l(\cos\theta)P_{l'}(\cos\theta)\sin\theta d\theta=\left\{\begin{array}{ll}0, & l\neq l'\\ \frac{2}{2l+1}, & l=l'\end{array}\right\}$$

Constantes útiles (a cuatro cifras significativas)

$$e=1{,}602\times10^{-19}C\qquad m_e=9{,}109\times10^{-31}kg=511{,}0\,keV c^{-2}\qquad c=2{,}998\times10^{8}ms^{-1}\qquad \mu_0=1{,}2566\times10^{-6}N\cdot A^{-2}$$

$$\epsilon_0=8{,}854\times10^{-12}F\cdot m^{-1}\qquad \alpha=\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}=1/137{,}0\qquad \hbar c=197{,}3eV\cdot nm$$

1

a) 

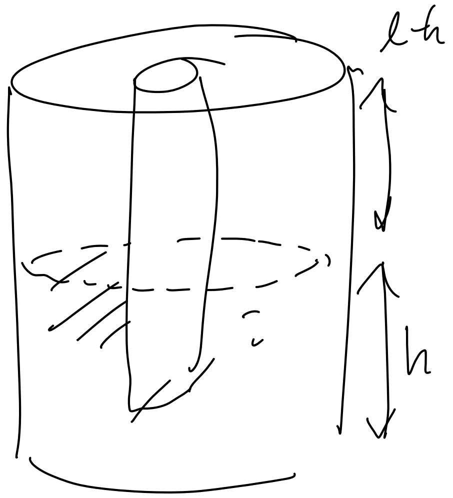
Por ley de Gauss:

$$2\pi r l E = Q/\epsilon$$

$$E = \frac{Q/l}{2\pi \epsilon_0 r}$$

$$V = \left| \int_a^b E\, dr \right| = \frac{Q/l}{2\pi\epsilon} \log\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$V = \frac{Q}{2\pi l \epsilon_0} \log\left(\frac{b}{a}\right) \rightarrow C = \frac{2\pi l \epsilon}{\log(b/a)}$$

b) 

Cuando el dieléctrico está a altura h, se puede considerar como un sistema de dos condensadores en paralelo, con capacitancias:

$$C_1 = \frac{2\pi(l-h)\epsilon_0}{\log(b/a)}$$

$$C_2 = \frac{2\pi h \epsilon}{\log(b/a)}$$

Entonces, la capacitancia total es $C = C_1 + C_2$ y la energía almacenada es

$$U(h) = \frac{1}{2} QV = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2} \frac{\log b/a}{2\pi} \left(\frac{1}{\epsilon h + \epsilon_0(l-h)} \right)$$

La fuerza sobre el líquido es (en la dirección z):

$$\mathcal{F} = -\frac{\partial U}{\partial h} = \frac{Q^2 \log b/a}{4\pi} \left\{ \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)}{[\varepsilon h + \varepsilon_0(l-h)]^2} \right\}$$

$$= C^2 \frac{(\log b/a)/4\pi}{[\varepsilon h + \varepsilon_0(l-h)]^2} (\varepsilon - \varepsilon_0) V^2 \quad :$$

$$= \left[\frac{(2\pi)^2 \, [\varepsilon h + \cancel{\varepsilon_0(l-h)}]^2}{\log(b/a)^{\cancel{2}}}\right] \frac{\cancel{\log b/a}\,(\varepsilon-\varepsilon_0)}{4\pi\,[\varepsilon h \cancel{+\varepsilon_0(l-h)}]^2} V^2$$

$$\mathcal{F} = \frac{\pi(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\log(b/a)} V^2$$

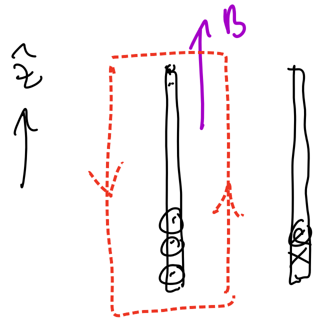
Esta fuerza balancea el peso del líquido:

$$\frac{\pi(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\log(b/a)} V^2 = \pi(b^2-a^2) h \rho g$$

$$\rightarrow \quad h = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\log(b/a)} \frac{V^2}{(b^2-a^2)\rho g}$$

(2)

a) Usando ley de Ampère:



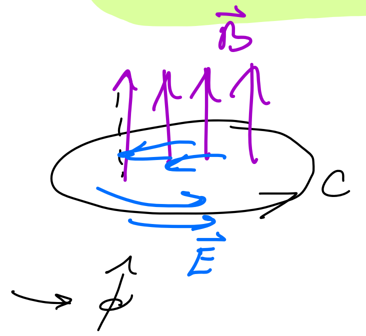
$$\mu_0 N I = B l \rightarrow B = \frac{\mu_0 N I}{l}$$

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 N I}{l}\hat{z} & , r<a \\ 0 & , r>a \end{cases}$$

$$u = \left(\frac{\mu_0 N^2 I^2}{2L^2}\right) \rightarrow U = \pi a^2 L u$$

$$\Rightarrow U = \frac{\mu_0}{2}\left(\frac{\pi a^2 N^2}{l}\right) I^2$$

b)



$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{\partial \phi_M}{\partial t}$$

$\vec{E} = E_\phi \hat{\phi}$ por simetría

para $r<a$:

$$E_\phi(2\pi r) = -\frac{\partial}{\partial t} B \begin{Bmatrix} \pi r^2 \\ \pi a^2 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \begin{cases} -\frac{r}{2}\left(\frac{\mu_0 N}{l}\right)\frac{dI}{dt}\hat{\phi} & r<a \\ -\frac{a^2}{2r}\left(\frac{\mu_0 N}{l}\right)\frac{dI}{dt}\hat{\phi} & r>0 \end{cases}$$

como $\frac{dI}{dt}<0$, $\vec{E}$ va en la dirección de $\hat{\phi}$

c) $\vec{S}_{surf} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \Big|_{surf}$

$$= \frac{1}{\mu_0} \; -\frac{a}{2}\left(\frac{\mu_0 N}{l}\right)^2 (I)\left(\frac{dI}{dt}\right) \hat{\phi} \times \hat{z}$$

$$= -\frac{a\mu N^2}{4l^2} \frac{d}{dt}\left(I^2\right) \hat{\rho}$$

$$\Phi_E = \oint \vec{S} \cdot d\vec{a} = (2\pi a)(l)\left[-\frac{a\mu N^2}{4l^2}\frac{d}{dt}\left(I^2\right)\right]$$

$$= -\mu_0 \frac{\pi a^2 N^2}{2l} \frac{d}{dt}\left(I^2\right)$$

$$= -\frac{d}{dt}\left(\mu_0 \frac{\pi a^2 N^2}{2l} I^2\right) = -\frac{dU}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Phi_E = -\frac{dU}{dt}}$$

3

De la fórmula de Larmor:

$$\left(\frac{dE}{dt}\right) = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} a^2 = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} r^2 \omega^4$$

$$\Rightarrow \Delta E = \left(\frac{dE}{dt}\right) T/2 = \left(\frac{dE}{dt}\right)\frac{\pi}{\omega} = \frac{q^2}{6\epsilon_0 c^3} r^2\omega^3$$

Del movimiento ciclotrónico:

$$qBv = m\frac{v^2}{r} \rightarrow \omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}$$

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2$$

Así que:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\frac{q^2}{6\epsilon_0 c^3} r^2\omega^3}{\frac{1}{2} m r^2 \omega^2} = \frac{q^2}{3m\epsilon_0 c^3}\,\omega$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta E}{E} = \frac{q^2}{3m\epsilon_0 c^3}\,\frac{qB}{m} = \frac{q^3}{3m^2\epsilon_0 c^3}\,B$$

$$B_0 = \frac{3m^2\epsilon_0 c^3}{q^3} = \left(\frac{3}{2}\right)\underbrace{\left(\frac{4\pi\epsilon_0\hbar c}{q^2}\right)}_{\simeq 137}\frac{(mc^2)^2}{(qhc)c}$$

$$\Rightarrow B_0 = 1.5 \times 137 \times \frac{(5.11\times 10^5 eV)^2}{1240\ e^2 V\,(nm)\,(3\times 10^8\ m/s)}$$

$$= \frac{1.5\times 1.37}{1.24\times 3}(5.11)^2\ \frac{10^2\,10^{10}}{10^3\times 10^{-9}\times 10^8}\ T \sim 10^{11}\ T$$

4

a) $\rho_e = -\nabla\cdot\vec{P} = -\gamma\nabla\cdot(\nabla\times\vec{E}) = 0$

$$\vec{J}_e = \frac{\partial\vec{P}}{\partial t} = \gamma\,\nabla\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla\cdot E = 0 \qquad \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0 \qquad \nabla\times\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu_0\gamma\,\nabla\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0\gamma\,\nabla\times\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \nabla\times(-\nabla\times\vec{E}) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \gamma\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\nabla}\times\vec{E}$$

$$\nabla^2\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \gamma\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\vec{\nabla}\times\vec{E})$$

b) $\tilde{\vec{E}}_\pm = \tilde{E}_0 e^{i(k_\pm z-\omega t)}\hat{e}_\pm$

- $\nabla^2\tilde{E}_\pm = -k_\pm^2\tilde{E}_\pm$
- $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\tilde{E}_\pm}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2}{c^2}\tilde{E}_\pm$
- $\vec{\nabla}\times\vec{E}_\pm = ik_\pm(\hat{z}\times\hat{e}_\pm)\tilde{E}_0 e^{i(k_\pm z-\omega t)}$

Pero $\hat{z}\times(\hat{e}_\pm) = \hat{z}\times(\hat{x}\pm i\hat{y})/\sqrt{2}$

$= (\hat{y}\mp i\hat{x})/\sqrt{2} = \mp i\,\hat{e}_\pm$

Así que $\vec{\nabla}\times\tilde{\vec{E}}_\pm = \pm k_\pm\tilde{E}_\pm$

Así que

$$\left[-k_\pm^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \mp k_\pm\gamma\mu_0(-\omega^2)\right]\tilde{E}_\pm = 0$$

$$\Rightarrow k_\pm^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 \pm \gamma\mu_0 c^2 k_\pm\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad k_\pm = \frac{\omega}{c}\left[1 \pm \gamma\mu_0 c^2 k_\pm\right]^{1/2}$$

$$\simeq \frac{\omega}{c}\left[1 \pm \frac{1}{2}\gamma\mu_0 c\omega\right]$$

$$k_\pm \simeq \frac{\omega}{c} n_\pm(\omega)$$

donde $n_\pm(\omega) = 1 \pm \frac{\gamma\mu_0 c\omega}{2}$

c) Como es incidencia normal $\vec{E}$ es continua en las interfaces y como μ_0 no cambia, $\vec{B}$ también lo es.

entonces:

$$\vec{E}(z=0,t) = E_0 e^{-i\omega t}\hat{x}$$

$$= E_0 e^{-i\omega t}\left(\hat{e}_+ + \hat{e}_-\right)/\sqrt{2}$$

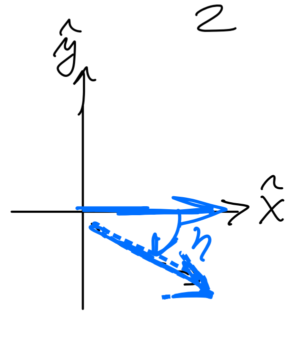
$$\Rightarrow \vec{E}(z=d,t) = E_0 e^{-i\omega t}\left(\hat{e}_+ e^{ik_+d} + \hat{e}_- e^{+ik_-d}\right)/\sqrt{2}$$

$$= E_0 e^{-i\omega t + ikd}\left(\hat{e}_+ e^{i\eta} + \hat{e}_- e^{-i\eta}\right)\sqrt{2}$$

donde $\eta = \gamma\mu_0 c\omega/2$

Reescribiendo: $\frac{\hat{e}_+ e^{i\eta} + \hat{e}_- e^{-i\eta}}{\sqrt{2}} = \hat{x}\left(\frac{e^{i\eta} + e^{-i\eta}}{2}\right) + i\hat{y}\left(\frac{e^{i\eta} - e^{-i\eta}}{2}\right)$

$$= \hat{x}\cos\eta - \hat{y}\sin\eta$$



$\Rightarrow$ Se rota en sentido horario por un ángulo $\eta = \gamma\mu_0 c\omega$

5

a) Con simetría esférica

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{A_l}{r^{l+1}} + B_l r^l\right) P_l(\cos\theta)$$

para $r > R$ los B_l deben ser $=0$

para $r < R$ los A_l deben ser $=0$ salvo $l=1$

que debe dar cuenta del potencial del dipolo cerca al origen:

$$V_{dip} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2} \rightarrow A_1 = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}$$

Así que: (tomando $B_0=0$ sin pérdida de generalidad)

$$V(r,\theta) = \begin{cases} \dfrac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2}P_1(\cos\theta) + \displaystyle\sum_{l=1}^{\infty} B_l r^l P_l(\cos\theta) & r<R \\ \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \frac{A_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta) & r>R \end{cases}$$

La condición de frontera es:

$$E_{\parallel}\Big|_{r=R} \text{ continuo y } \epsilon_0 E_{\perp}\Big|_{R^-} = \epsilon E_{\perp}\Big|_{R^+}$$

$$\frac{\partial V}{\partial\theta}\Big|_{r=R} \text{ contino y } \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial r}\Big|_{R^-} = \epsilon \frac{\partial V}{\partial r}\Big|_{R^+}$$

b) $\dfrac{\partial V}{\partial\theta}$ = contino

$\Rightarrow$

$$\frac{p}{4\pi\epsilon_0 R^2} P_1'(\cos\theta) + \sum_{l=1}^{\infty} B_l R^l P_l'(\cos\theta) = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{A_l}{R^{l+1}} P_l'(\cos\theta)$$

Como los $P^l(x)$ son linealmente independientes:

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{p}{4\pi\epsilon_0 R^2} + B_1 R = \dfrac{A_1}{R^2} & (l=1) \\ B_l R^l = \dfrac{A_l}{R^{l+1}} & (l \neq 1) \end{cases}$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial r}\Big|_{R^-} = \epsilon \frac{\partial V}{\partial r}\Big|_{R^+}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{p}{2\pi\epsilon_0 R^3} + B_1 = -2\dfrac{A_1}{R^3}\left(\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) & (l=1) \\ l B_l R^{l-1} = -(l+1)\dfrac{A_l}{R^{l+2}}\left(\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) & (l \neq 1) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Para $l \neq 1$ tenemos $A_l = B_l = 0$

Para $l = 1$:

$$A_1 - B_1 R^3 = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) A_1 + \frac{B_1 R^3}{2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) A_1 = \frac{3}{2}\left(\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\right) \Rightarrow A_1 = \left(\frac{3}{\varepsilon_0 + 2\varepsilon}\right)\frac{p}{4\pi}$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) B_1 R^3 = \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \Rightarrow B_1 = \left(\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{\varepsilon_0 + 2\varepsilon}\right)\frac{p}{2\pi\epsilon_0 R^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{V(r,\theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\begin{cases} \left[\dfrac{1}{r^2} + 2\left(\dfrac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{\varepsilon_0 + 2\epsilon}\right)\dfrac{r}{R^3}\right]\cos\theta & r < R \\ \dfrac{3\epsilon_0}{\varepsilon_0 + 2\epsilon}\dfrac{\cos\theta}{r} & r > R \end{cases}}$$

c) $$\sigma_{pol}(\theta) = \varepsilon_0 \left(E_\perp \big|_{R+} - E_\perp \big|_{R-} \right)$$

$\cos\theta$

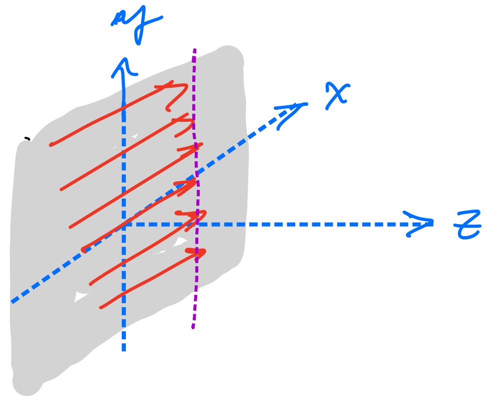
$$= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ -\left(\left(\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon_0 + 2\varepsilon} \right) - 1 \right) \frac{2}{R^2} - \left(\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{\varepsilon_0 + 2\varepsilon} \right) \frac{2}{R^2} \right\}$$

$$= \frac{2p}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \left\{ \frac{\varepsilon_0 + 2\varepsilon_0 - 3\varepsilon_0 - \varepsilon_0 + \varepsilon}{\varepsilon_0 + 2\varepsilon} \right\} \cos\theta$$

$$\boxed{\sigma_{pol} = \frac{2p}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0 + 2\varepsilon} \right) \cos\theta}$$

6

a)



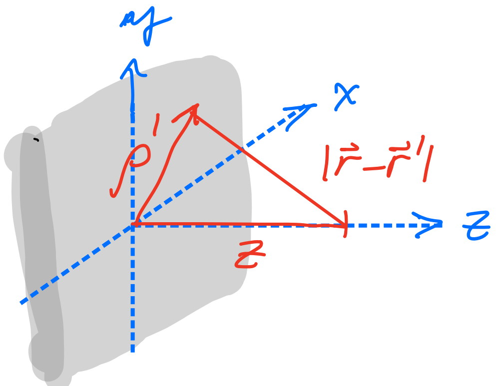
$$\int dy\, \vec{K}\cdot\hat{x} = \int dy\, dz\, \vec{J}\cdot\hat{x}$$

$$\Rightarrow \vec{J}(\vec{r}) = K(t)\,\delta(z)\,\hat{x}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = -K(t)\left(\delta'(z)\hat{z}\right)\cdot\hat{x} = 0$$

$$\Rightarrow \rho(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},0) = 0$$

b) $\underline{V = 0}$



$$|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{\rho^2+z^2}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \rho' d\rho' d\phi\, \frac{\vec{K}\left(t-\frac{1}{c}\sqrt{\rho'^2+z^2}\right)}{\sqrt{\rho'^2+z^2}}$$

$$= \frac{\mu_0}{2}\left[\int_0^\infty \rho' d\rho'\, \frac{K\left(t-\frac{1}{c}\sqrt{\rho'^2+z^2}\right)}{\sqrt{\rho'^2+z^2}}\,\theta\left(t-\frac{\sqrt{\rho'^2+z^2}}{c}\right)\right]\hat{x}$$

$$t_r = t - \frac{1}{c}\sqrt{\rho'^2+z^2}$$

$$dt_r = -\frac{1}{c}\frac{\rho' d\rho'}{\sqrt{\rho'^2+z^2}}$$

$$\Rightarrow \vec{A} = c\frac{\mu_0}{2}\left[\int_{t_r(\rho=\infty)}^{t_r(\rho=0)} dt_r\, K(t_r)\,\theta(t_r)\right]\hat{x}$$

donde $t_r(\rho=\infty) = -\infty$

$t_r(\rho=0) = t - |z|/c$

$$\vec{A} = c\frac{\mu_0}{2}\left[\int_{-\infty}^{t-|z|/c} dt_r\, K(t_r)\,\theta(t_r)\right]\hat{x}$$

Si $t-|z|/c<0 \quad \int = 0$

$$\Rightarrow \vec{A} = c\frac{\mu_0}{2}\,\theta\left(t-\frac{|z|}{c}\right)\left[\int_0^{t-|z|/c} K(t_r)\,dt_r\right]\hat{x}$$

c) $\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}$

$$= -c\frac{\mu_0}{2}\left[\underbrace{\delta\left(t-\frac{|z|}{c}\right)\int_0^{t-|z|/c} K(t_r)\,dt_r}_{=0} + \theta(t-|z|/c)\,K(t-|z|/c)\right]\hat{x}$$

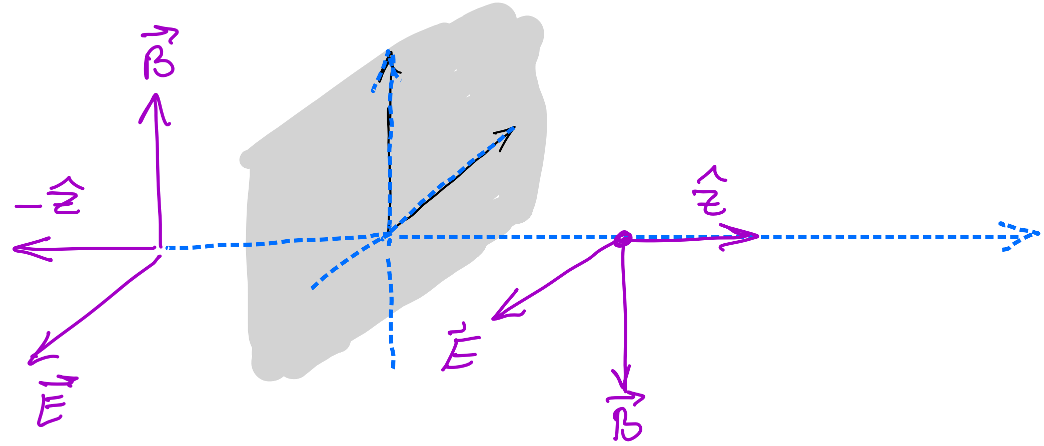
$$\Rightarrow \vec{E} = -c\frac{\mu_0}{2}\,\theta(t-|z|/c)\,K(t-|z|/c)\,\hat{x}$$

$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$

$$= c\frac{\mu_0}{2}\,\theta\left(t-\frac{|z|}{c}\right)\left[-\frac{1}{c}\left(\frac{\partial|z|}{\partial z}\right)K\left(t-\frac{|z|}{c}\right)\right](\hat{z}\times\hat{x})$$

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{2}\,\theta(t-|z|/c)\,K(t-|z|/c)\ \text{signo}(z)\ \hat{y}$$

Los campos corresponden a ondas planas con polarización en $\hat{x}$



d)

$$I = \operatorname{sgn}(z)\left(\vec{S}\cdot\hat{z}\right) =$$

$$= \operatorname{sgn}(z)\,\frac{1}{\mu_0}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)\cdot\hat{z}$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\left(c\frac{\mu_0}{2}\right)\left(\frac{\mu_0}{2}\right)\theta\left(t-\frac{|z|}{c}\right)\left|K\left(t-\frac{|z|}{c}\right)\right|^2$$

$$\boxed{I = \frac{c\mu_0}{4}\theta\left(t-\frac{|z|}{c}\right)\left|K\left(t-\frac{|z|}{c}\right)\right|^2}$$

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
EXAMEN DE CONOCIMIENTOS
2022-2 MECÁNICA CLÁSICA

Enero 10, 2023

- **Instrucciones:** El examen comprende dos partes. Para cada parte debe resolver dos de los tres problemas propuestos. **Los problemas deben ser resueltos en hojas separadas, y solo debe entregar la solución a dos problemas por parte**. No se dará crédito parcial si decide entregar la solución a un tercer problema, y en tal caso, solo dos de las soluciones se tendrán en cuenta, a voluntad del calificador. Todos los problemas tienen el mismo valor.
- No se permite el uso de libros, apuntes, o dispositivos electrónicos.
- **Duración** : 3 horas.

Parte 1: Resuelva dos de los siguientes tres problemas (25 puntos c/u)

---

1. Estime el radio que debería tener el Sol ($M = 2 \times 10^{30}$kg) para convertirse en un agujero negro. Exprese su respuesta en unidades de metros.
2. Un insecto de masa m camina radialmente hacia afuera sobre un disco. La rapidez radial del insecto es v. El disco, a su vez, rota alrededor de su centro con velocidad angular Ω constante. Calcule la magnitud de la fuerza que actúa sobre el insecto en la dirección del plano del disco cuando el insecto está a una distancia r del centro del disco.
3. Dos estrellas de masa igual a la masa del Sol se encuentran orbitando una alrededor de la otra. Las mediciones astronómicas dicen que la distancia relativa entre las dos estrellas es constante e igual a una hora luz. Calcule el período del movimiento rotacional en unidades de años.

Parte 2: Resuelva dos de los siguientes tres problemas (25 puntos c/u)

1. Considere el siguiente lagrangiano de una partícula restringida a moverse en el plano x-y donde m, q, B y c son constantes.

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{qB}{2c}(x\dot{y} - \dot{y}x). \tag{1}$$

   Utilice este lagrangiano para encontrar la constante de movimiento asociada a la rotación en torno al origen del sistema de coordenadas.

2. Considere una partícula de masa m restringida a moverse sobre un cilindro descrito por la ecuación $x^2 + y^2 = R^2$. Sobre la partícula actúa una fuerza radial restauradora $\vec{F} = -k\vec{r}$ donde $\vec{r}$ es el vector que indica la posición de la partícula con respecto al origen del sistema de coordenadas. Adicionalmente el sistema se encuentra en presencia de un campo gravitacional constante $\vec{g} = -g\hat{k}$.

   - Calcule el hamiltoniano del sistema en coordenadas cilíndricas.
   - A partir del hamiltoniano calcule las ecuaciones de movimiento.
   - Identifique dos constantes de movimiento del sistema y explique porqué se conservan.

3. El péndulo doble de la Figura 1 oscila en el plano vertical.

   - Escriba el lagrangiano del sistema.
   - Obtenga las ecuaciones de movimiento para el régimen de oscilaciones pequeñas, suponiendo que $L_1 = L_2 = l$ y $m_1 = m_2 = m$.
   - A partir del resultado anterior, escriba el sistema de ecuaciones de movimiento acopladas para θ_1 y θ_2 en forma matricial y determine las frecuencias de oscilación de los modos normales del sistema, o en su defecto, explique cómo encontraría dichas frecuencias de oscilación.

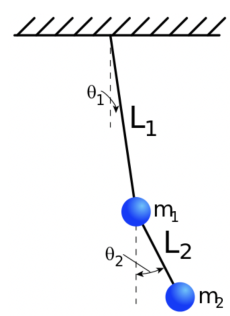


Figure 1: Péndulo doble.

Valores de algunas constantes universales:

- G: 6.67430×10^{-11} N m^2 kg^{-2}
- c, velocidad de la luz: 2.99792458×10^8 m s^{-1}.

Para que un objeto de masa M se convierta en un agujero negro, hacemos igual la energía potencial + energía cinética de una partícula de prueba de masa m_0 a su energía mecánica en el infinito (cero), tomando como velocidad, la velocidad de la luz

$$-\frac{GM\cancel{m_0}}{R^2} + \frac{1}{2}\cancel{m_0}c^2 = 0$$

$$R = \sqrt{\frac{2GM}{c^2}}$$

reemplazando

$$R = \left(\frac{2 \times 6.67 \times 10^{-11}\,Nm^2kg^{-2} \cdot 2 \times 10^{30}kg}{(3 \times 10^8\,m/s)^2}\right)^{1/2}$$

$$\boxed{R = 54.4\ m}$$

En el marco de referencia en rotación se puede escribir la fuerza aparente como:

$$\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_{ficticia}$$

Donde $\vec{F}_{ficticia} = -2m\vec{\Omega}\times\vec{v} - m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})$

con $\vec{r} = r\hat{r}$, $\vec{v} = v_0\hat{r}$, $\Omega = \Omega\hat{k}$

de esta manera

$$-2m\vec{\Omega}\times\vec{v} = -2m\Omega v\hat{\theta}$$

$$-m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}) = m\Omega^2 r\hat{r}$$

En este marco de referencia en rotación el insecto se encuentra en equilibrio $\vec{F}' = \vec{0}$, así que si tomamos $\vec{F} = F_r\hat{r} + F_\theta\hat{\theta}$

$$F_r = -m\Omega^2 r \quad y \quad F_\theta = 2m\Omega v$$

de esta manera

$$F = \sqrt{F_r^2 + F_\theta^2} = \sqrt{m^2\Omega^4 r^2 + 4m^2\Omega^2 v^2}$$

$$\boxed{F = m\Omega\sqrt{\Omega^2 r^2 + 4v^2}}$$

En la situación descrita las dos estrellas deben encontrarse orbitando alrededor de su centro de masa, sobre un círculo de radio $d/2$, donde d es la distancia entre las dos estrellas. De esta manera, por la segunda ley de Newton para cada estrella.

$$\frac{Gm\cancel{m}}{(d/2)^2} = \frac{\cancel{m}v^2}{d/2}$$

donde podemos expresar a v como

$$v = \frac{2\pi(d/2)}{T}$$, donde T es el periodo orbital

De esta manera

$$4\frac{Gm}{d^2} = \frac{4\pi^2}{\cancel{4}}\frac{d^2}{T^2}\frac{2}{d}$$

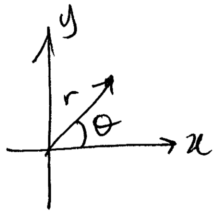
$$Gm = \frac{\pi^2}{2}\frac{d^3}{T^2}$$

$$T = \sqrt{\frac{\pi^2 d^3}{2Gm}}$$, reemplazando

$$T = \left(\frac{\pi^2 (3600\,s \cdot 3\times10^8\,m/s)^3}{2 \times 6.67\times10^{-11}\,Nm^2kg^{-2} \cdot 2\times10^{30}\,kg}\right)^{1/2} = 2.15\times10^8\,s$$

en unidades de años $\boxed{T = 6.84 \text{ años}}$

Podemos escribir el Lagrangiano en coordenadas polares.



donde

$$x = r\cos\theta \qquad \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - \dot{\theta} r\sin\theta$$

$$y = r\sin\theta \qquad \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + \dot{\theta} r\cos\theta$$

De esta manera

$$x\dot{y} - y\dot{x} = r\cos\theta\,(\dot{r}\sin\theta + \dot{\theta} r\cos\theta) - r\sin\theta\,(\dot{r}\cos\theta - \dot{\theta} r\sin\theta)$$

$$= r\dot{r}\cos\theta\sin\theta + r^2\dot{\theta}\cos^2\theta - r\dot{r}\sin\theta\cos\theta + r^2\dot{\theta}\sin^2\theta = r^2\dot{\theta}$$

así que en coordenadas polares

$$L = \frac{1}{2} m\,(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{qB}{2c} r^2\dot{\theta}$$

en este caso las cantidades conservadas por rotaciones están asociadas a θ.

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$ lo que implica $$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$$ es constante de movimiento asociada a rotaciones

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \boxed{m r^2\dot{\theta} + \frac{qB}{2c} r^2}$$

La energía cinética en coordenadas cilíndricas se puede escribir como:

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right)$$, con ρ la coordenada radial

La energía potencial del resorte es:

$$V_r = \frac{1}{2} k r^2 = \frac{1}{2} k \left(x^2+y^2+z^2\right) = \frac{1}{2} k \left(R^2+z^2\right)$$

La energía potencial gravitacional se puede escribir como:

$$V_g = mgz.$$

Dado que ρ es constante para esta partícula $\dot{\rho} = 0$, así que

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \left(R^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) - \frac{1}{2} k \left(R^2+z^2\right) - mgz$$

ahora los momentos generalizados.

$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta} \quad y \quad P_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \quad , \quad \dot{\theta} = \frac{P_\theta}{mR^2} \quad , \quad \dot{z} = \frac{P_z}{m}$$

lo que nos permite escribir el Hamiltoniano

$$H = \dot{\theta} P_\theta + \dot{z} P_z - L = \frac{P_\theta^2}{mR^2} + \frac{P_z^2}{m} - \frac{1}{2}\frac{P_\theta^2}{mR^2} - \frac{1}{2}\frac{P_z^2}{m} + \frac{1}{2}k\left(R^2+z^2\right) + mgz$$

$$\boxed{H = \frac{1}{2}\frac{P_\theta^2}{mR^2} + \frac{1}{2}\frac{P_z^2}{m} + \frac{1}{2}k\left(R^2+z^2\right) + mgz}$$

Las ecuaciones canónicas de movimiento son:

$$\boxed{\begin{aligned}
\dot{z} &= \frac{\partial H}{\partial P_z} \rightarrow \dot{z} = \frac{P_z}{m} \\
\dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial P_\theta} \rightarrow \dot{\theta} = \frac{P_\theta}{mR^2} \\
\dot{P}_z &= -\frac{\partial H}{\partial z} \rightarrow \dot{P}_z = -kz - mg \\
\dot{P}_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} \rightarrow \dot{P}_\theta = 0
\end{aligned}}$$

dado que $\dot{P}_\theta = 0$, $\boxed{mR^2\dot{\theta}}$ es una constante de movimiento

Podemos definir las coordenadas

$$x_1 = l_1 \cos\theta_1 \qquad x_2 = x_1 + l_2 \cos\theta_2$$
$$y_2 = l_1 \sin\theta_1 \qquad y_2 = y_1 + l_2 \sin\theta_2$$

Calculando las derivadas temporales

$$\dot{x}_1 = -l_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 \qquad \dot{x}_2 = -l_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 - l_2\dot{\theta}_2 \sin\theta_2$$
$$\dot{y}_1 = l_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 \qquad \dot{y}_2 = l_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \cos\theta_2$$

Tomando $l_1 = l_2$, y $m_1 = m_2$.

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$
$$= \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)\right)$$

La energía potencial, tomando como referencia el plano a distancia $l_1 + l_2$ por debajo del punto de suspensión es

$$V = mgl(2-\cos\theta_1) + mgl(2-(\cos\theta_1+\cos\theta_2))$$
$$= mgl(2-\cos\theta_1 + 2 - \cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$
$$= mgl(4 - 2\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

De esta manera el Lagrangiano es:

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2\left(2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)\right)$$
$$- mgl(4 - 2\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

Las ecuaciones de Lagrange son:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -ml^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1-\theta_2) - 2mgl\sin\theta_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = 2ml^2\dot{\theta}_1 + ml^2\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = ml^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2) - mgl\sin\theta_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = ml^2\dot{\theta}_2 + ml^2\dot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)$$

Las ecuaciones de movimiento son:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0$$

$$2ml^2\ddot{\theta}_1 + ml^2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) + ml^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2) + 2mgl\sin\theta_1 = 0$$

$$ml^2\ddot{\theta}_2 + ml^2\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2) - ml^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2) + mgl\sin\theta_2 = 0$$

Simplificando factores de m y l

$$2l\ddot{\theta}_1 + l\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) + l\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2) = -2g\sin\theta_1$$

$$l\ddot{\theta}_2 + l\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2) - l\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2) = -g\sin\theta_2$$

Con $\sin\theta \simeq \theta$, $\cos\theta \simeq 1$ y despreciando términos $\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2(\theta_1-\theta_2)$

$$\boxed{\begin{aligned} 2l\ddot{\theta}_1 + l\ddot{\theta}_2 &= -2g\theta_1 \\ l\ddot{\theta}_1 + l\ddot{\theta}_2 &= -g\theta_2 \end{aligned}}$$

que se pueden escribir como:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = -\frac{g}{l}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

Definiendo las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

las frecuencias de los modos normales se pueden encontrar a partir de los valores propios de la matriz.

$$\omega^2 A^{-1} B$$

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2023

Mecánica Cuántica

Reglas:

- Debe escoger y resolver dos problemas de nivel de pregrado y dos problemas de nivel de posgrado.
- No se permite el uso de libros, apuntes, o dispositivos electrónicos.
- Los problemas propuestos deben ser resueltos a mano explicando claramente el procedimiento.
- El examen se debe contestar de forma individual. No debe comunicarse con ningún compañero o compañera.
- Al firmar el examen, usted acepta estas reglas. De no cumplirlas estará sujeto a las acciones estipuladas en los reglamentos de la Universidad de los Andes.

Duración total del examen : 3 horas

---

1. (**20 puntos. Nivel: Pregrado**)

El potencial que describe la interacción entre nucleones (protones o neutrones) posee un término que acopla el spin de las partículas al momentum angular entre ellas. A nivel nuclear, esta interacción se manifiesta como un potencial de la forma:

$$V = v_{SO}(r)\,\vec{\mathbf{L}}\cdot\vec{\mathbf{S}}\,,$$

donde $v_{SO}(r)$ es una función que solo depende de r, la distancia al centro del núcleo; $\vec{\mathbf{L}}$ es el momentum angular orbital de un nucleón dado; y $\vec{\mathbf{S}}$ es su spin.

Para un estado con números cuánticos: $n,\ j,\ m_j,\ \ell,\ s$; calcule ΔE_ℓ, la separación en los niveles de energía que resultan de esta interacción.

---

2. (**20 puntos. Nivel: Pregrado**)

Considere una partícula de masa m cuya dinámica está descrita por un hamiltoniano de la forma:

$$\mathrm{H} = \frac{\vec{\mathbf{p}}^2}{2m} + \tfrac{1}{2} m\omega^2\, \vec{\mathbf{r}}^2 \; .$$

Para ésta partícula calcule los niveles de energía y su degeneración.

---

3. (**20 puntos. Nivel: Pregrado**)

Una partícula de masa m está sometida a una fuerza

$$\vec{\mathrm{F}}(\vec{r}) = -\nabla \mathrm{V}(\vec{r}) \; .$$

El Hamiltoniano del sistema, en representación de momentum, es:

$$\hat{\mathrm{H}} = \frac{\vec{\mathbf{p}}^2}{2m} - a\, \nabla_{\vec{p}}^{\;2} \; , \qquad \text{donde} \quad \nabla_{\vec{p}}^{\;2} \equiv \frac{\partial^2}{\partial {p_x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {p_y}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {p_z}^2} \; ,$$

tales que la ecuación de Schrödinger es:

$$\left(\frac{\vec{\mathbf{p}}^2}{2m} - a\, \nabla_{\vec{p}}^{\;2} \right) \varphi(\vec{\mathbf{p}}, t) \; = \; i\hbar\, \frac{\partial \varphi(\vec{\mathbf{p}}, t)}{\partial t} \; .$$

Encuentre $\mathrm{V}(\vec{r})$.

---

4. (**30 puntos. Nivel: Posgrado**)

Considere un sistema físico cuyo hamiltoniano $\hat{H}$ no depende en forma explícita del tiempo, y una cantidad física A, cuyo observable asociado es $\hat{A}$.

a) Demuestre que, en el tiempo t, el vector de estado del sistema $|\psi(t)\rangle$ se puede escribir como:

$$|\psi(t)\rangle \;=\; \hat{U}(t-t_o)\,|\psi(t_o)\rangle$$

y encuentre una expresión para $\hat{U}(\tau)$.

b) Sea $a(t) = \langle\psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle$ el valor de expectación de los resultados de la medición de A en el tiempo t.
Demuestre que $a(t)$ se puede escribir como:

$$a(t) \;=\; \langle\psi(t=0)|\,\hat{A}_{H}(t)\,|\psi(t=0)\rangle$$

y encuentre una expresión para $\hat{A}_{H}(t)$ en términos de $\hat{U}$ y de $\hat{A}$.

c) Demuestre que la evolución temporal de $\hat{A}_{H}(t)$ está dada por:

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\hat{A}_{H}(t) \;=\; \left[\,\hat{A}_{H}(t)\,,\,\hat{H}\,\right]\,.$$

---

5. (**30 puntos. Nivel: Posgrado**)

El deuterón es un sistema ligado neutrón-protón. No existen sistemas ligados neutrón-neutrón ni protón-protón.

En el modelo de *isospin* para la fuerza nuclear, protón y neutrón son interpretados como dos estados cuánticos que conforman una base del espacio de Hilbert de *nucleones* (un espacio vectorial de dimensión 2):

$$\{\,|p\rangle\,,\,|n\rangle\,\}\,.$$

En este modelo la fuerza nuclear es invariante ante transformaciones unitarias en el espacio de isospin.

Construya las posibles funciones de onda, en el espacio de isosopin, para un sistema de dos nucleones, y deduzca cuál de ellas corresponde a la del deuterón.

---

6. (**30 puntos. Nivel: Posgrado**)

Considere un oscilador armónico unidimensional con hamiltoniano:

$$\hat{\mathrm{H}}_o = \frac{\hat{\mathrm{p}}^2}{2m} + \tfrac{1}{2} m\omega^2 \, \hat{\mathrm{x}}^2$$

y una perturbación de la forma: $\hat{\mathrm{H}}_1 = \mathrm{F}\,\hat{\mathrm{x}}$.

Encuentre una expresión para E_n , los valores propios de energía del sistema perturbado, en un cálculo aproximado al orden más bajo en F .

FORMULAS

- **Formulas matemáticas:**

$$\sum_{x=0}^{y} x = \frac{y(y+1)}{2}$$

- **Funciones de onda:**

$$\psi(\vec{\mathrm{r}},t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \varphi(\vec{\mathrm{p}},t)\, \mathrm{e}^{\,i\vec{\mathrm{p}}\cdot\vec{\mathrm{r}}/\hbar}\, \mathrm{d}^3\vec{\mathrm{p}}$$
$$\varphi(\vec{\mathrm{p}},t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \psi(\vec{\mathrm{r}},t)\, \mathrm{e}^{\,-i\vec{\mathrm{p}}\cdot\vec{\mathrm{r}}/\hbar}\, \mathrm{d}^3\vec{\mathrm{r}}$$

- **Momentum angular:**

$$\hat{\mathbf{J}}^2\,|j,m_j\rangle = \hbar^2 j(j+1)\,|j,m_j\rangle$$
$$\hat{\mathrm{J}}_z\,|j,m_j\rangle = \hbar\, m_j\,|j,m_j\rangle \qquad m_j = -j,\,\ldots,\,j$$

- **Oscilador armónico 1D:**

$$\hat{\mathrm{H}}_o = \frac{\hat{\mathrm{p}}^2}{2m} + \tfrac{1}{2}m\omega^2\,\hat{\mathrm{x}}^2$$
$$\hat{\mathrm{X}} \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,\hat{\mathrm{x}}$$
$$\hat{\mathrm{P}} \equiv \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}\,\hat{\mathrm{p}}$$
$$\hat{\mathrm{H}}_o = \tfrac{1}{2}\hbar\omega\left(\hat{\mathrm{P}}^2 + \hat{\mathrm{X}}^2\right)$$
$$\hat{\mathrm{a}} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{\mathrm{X}} + i\hat{\mathrm{P}}\right)$$
$$\hat{\mathrm{H}}_o = \hbar\omega\left(\hat{\mathrm{a}}^\dagger\hat{\mathrm{a}} + \tfrac{1}{2}\right)$$
$$\hat{\mathrm{a}}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$
$$\hat{\mathrm{a}}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$
$$\hat{\mathrm{N}} = \hat{\mathrm{a}}^\dagger\hat{\mathrm{a}}$$
$$\hat{\mathrm{N}}\,|n\rangle = n\,|n\rangle$$

- **Teoría de perturbaciones independiente del tiempo:**

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathrm{H}} &= \hat{\mathrm{H}}_o + \hat{\mathrm{H}}_1 \\
\Delta \mathrm{E}_n^{(1)} &= \langle n | \hat{\mathrm{H}}_1 | n \rangle \\
\Delta \mathrm{E}_n^{(2)} &= \sum_{k \neq n} \frac{\left\| \langle k | \hat{\mathrm{H}}_1 | n \rangle \right\|^2}{\mathrm{E}_n - \mathrm{E}_k}
\end{aligned}
$$

EXAMEN DE CONOCIMIENTOS 2023 - Enero.

PROBLEMAS PROPUESTOS

MECANICA CUANTICA

PROBLEMA # 1

Nivel: Pregrado

Acoplamiento Spin-orbita:

El potencial de interacción entre nucleones (protones o neutrones) posee un término que acopla el spin de las partículas al momentum angular orbital entre ellas. A nivel nuclear, esta interacción se manifiesta como un potencial de la forma

$$V = -V_{so}(r)\,\vec{L}\cdot\vec{S},$$

donde $\vec{L}$ es el momentum angular orbital de un nucleon y $\vec{S}$ es su spin.

Calcule ΔE_l, la separación en los niveles de energia que resulta de esta interacción.

SOLUCION

$$V = -V_{so}\,\vec{L}\cdot\vec{S} \qquad \vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

$$J^2 = (\vec{L} + \vec{S})^2 = L^2 + S^2 + 2\vec{L}\cdot\vec{S}$$

$$\vec{L}\cdot\vec{S} = \frac{1}{2}\left\{(\vec{L}+\vec{S})^2 - L^2 - S^2\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{J^2 - L^2 - S^2\right\}$$

Valores propios de $\vec{L}\cdot\vec{S} \rightarrow \frac{\hbar^2}{2}\left\{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\right\}$

$s = 1/2 \leftarrow$ protones o neutrones $\longrightarrow s(s+1) = 3/4$

$j : |l-s|, \ldots, (l+s) \longrightarrow j = \underset{j_1}{\underset{\uparrow}{(l-1/2)}}, \underset{j_2}{\underset{\uparrow}{(l+1/2)}}$

$$\Delta E_l = \left(-V_{so}\vec{L}\cdot\vec{S}\right)\Big|_{j_1} - \left(-V_{so}\vec{L}\cdot\vec{S}\right)\Big|_{j_2}$$

Para un l dado.

$$\Delta E_l = -V_{so}\frac{\hbar^2}{2}\left\{(l-1/2)(l+1/2) - (l+1/2)(l+3/2)\right\}$$

$$= -V_{so}\frac{\hbar^2}{2}\left\{(l-1/2) - (l+3/2)\right\}\cdot(l+1/2)$$

$$\boxed{\Delta E_l = V_{so}\,\hbar^2\,(l+1/2)}$$

PROBLEMA # 2

Nivel: Pregrado

Oscilador Armonico 3D:

Concidere una particula de masa m y un hamiltoniano de la forma

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \vec{r}^{\,2}$$

Calcule los niveles de energía y su degeneración

SOLUCION

$$\vec{p}^{\,2} = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \quad ; \quad \vec{r}^{\,2} = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} p_x^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + \frac{1}{2m} p_y^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 y^2 + \frac{1}{2m} p_z^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 z^2$$

Tres osciladores 1D independientes

$$E_{n_x} = (n_x + \tfrac{1}{2})\hbar\omega \; ; \; E_{n_y} = (n_y + \tfrac{1}{2})\hbar\omega \; ; \; E_{n_z} = (n_z + \tfrac{1}{2})\hbar\omega$$

Valores propios de energía para el oscilador 3D

$$(n_x + n_y + n_z + 3/2)\hbar\omega$$

$$\left.\begin{aligned} n_x &= 0, 1, 2, \ldots \\ n_y &= 0, 1, 2, \ldots \\ n_z &= 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} n &= n_x + n_y + n_z \\ n &= 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

$$\boxed{E_n = (n + 3/2)\hbar\omega}$$

Degeneración de cada nivel de energía $\rightarrow g_n = ?$

$$n = n_x + n_y + n_z \longrightarrow n - n_x = n_y + n_z$$

Para un n dado, $n_x = 0, 1, 2, \ldots, n$

¿Cuantas posibilidades hay para la pareja (n_y, n_z)?

$$(n_y, n_z) = \underbrace{(0, n-n_x), (1, n-n_x-1), \ldots, (n-n_x, 0)}_{n - n_x + 1 \text{ parejas.}}$$

$\Rightarrow$ dado un n y un n_x, hay $n-n_x+1$ posibilidades para n_y y n_z

$$\Rightarrow \quad g_n = \sum_{n_x=0}^{n} (n-n_x+1) = \sum_{n_x=0}^{n}(n+1) - \underbrace{\sum_{n_x=0}^{n} n_x}_{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$= (n+1)*(n+1) - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= (n+1)*\left\{(n+1) - \frac{n}{2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{g_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}}$$

PROBLEMA #3

Nivel: pregrado

Ecuación de Schrödinger en representación de momentum.

Una partícula de masa m esta sometida a una fuerza
$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r})$

El Hamiltoniano del sistema, en representación de momentum es:

$$\hat{H} = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} - a\nabla_{\vec{p}}^{2} \quad ; \quad \nabla_{\vec{p}}^{2} \equiv \frac{\partial^2}{\partial p_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_y^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_z^2} \, ,$$

tales que la ecuación de Schrödinger es:

$$\left(\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} - a\nabla_{\vec{p}}^{2}\right)\varphi(\vec{p},t) = i\hbar \frac{\partial \varphi(\vec{p},t)}{\partial t}$$

Encuentre $V(\vec{r})$.

SOLUCION

$$\begin{cases} \psi(\vec r,t) = \dfrac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \displaystyle\int \varphi(\vec p,t)\, e^{i\vec p\cdot\vec r/\hbar}\, d^3\vec p \\[2ex] \varphi(\vec p,t) = \dfrac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \displaystyle\int \psi(\vec r,t)\, e^{-i\vec p\cdot\vec r/\hbar}\, d^3\vec r \end{cases}$$

$$\left(\underbrace{\frac{\vec p^{\,2}}{2m}}_{\text{Término de Energia cinetica}} - \underbrace{a\nabla_{\vec p}^2}_{\text{Término de Energia potencial.}}\right)\varphi(\vec p,t) = i\hbar\,\frac{\partial\varphi(\vec p,t)}{\partial t}$$

$-a\nabla_{\vec p}^2\,\varphi(\vec p,t)$ corresponde a $+V(\vec r)\psi(\vec r,t)$ en representación de coordenadas.

$$-a\nabla_{\vec p}^2\varphi(\vec p,t) = -a\,\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int \psi(\vec r,t)\left[\nabla_{\vec p}^2\, e^{-i\vec p\cdot\vec r/\hbar}\right] d^3 r$$

$$= -\frac{a}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int \psi(\vec r,t)\left[(-i\,x/\hbar)^2 + (-i\,y/\hbar)^2 + (-i\,z/\hbar)^2\right] e^{-i\vec p\cdot\vec r/\hbar}\, d^3\vec r$$

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int \underbrace{\left\{\psi(\vec r,t)\,\frac{a}{\hbar^2}\,\vec r^{\,2}\right\}}_{V(\vec r)\psi(\vec r,t)} e^{-i\vec p\cdot\vec r/\hbar}\, d^3\vec r$$

$$\Rightarrow \boxed{V(\vec r) = \frac{a}{\hbar^2}\,\vec r^{\,2}}$$

PROBLEMA # 4

Nivel: Posgrado

Punto de vista de Heisomberg:

Concidere un sistema físico cuyo hamiltoniano $\hat{H}$ no depende del tiempo, y una cantidad física A cuyo observable asociado es $\hat{A}$.

a) Demuestre que, en el tiempo t, el vector de estado del sistema, $|\psi(t)\rangle$ se puede escribir como

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t-t_0)\,|\psi(t_0)\rangle$$

y encuentre una expresión para $\hat{U}(\tau)$.

b) Sea $a(t)$ el valor de expectación de los resultados de la medición de A en el tiempo t. $a(t) = \langle\psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle$.

Demuestre que $a(t)$ se puede escribir como:

$$a(t) = \langle\psi(0)|\,\hat{A}_H(t)\,|\psi(0)\rangle,$$

y encuentre una expresion para $\hat{A}_H(t)$ en términos de $\hat{U}$ y $\hat{A}$.

c) Demuestre que la evolución temporal de $\hat{A}_H(t)$ esta dada por:

$$i\hbar\frac{d}{dt}\hat{A}_H(t) = \left[\hat{A}_H(t), \hat{H}\right]$$

SOLUCION

a) $|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t-t_0)|\psi(t_0)\rangle$

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$$

$$\downarrow$$

$$i\hbar\frac{d}{dt}\left\{\hat{U}(t-t_0)\cancel{|\psi(t_0)\rangle}\right\} = \hat{H}\,\hat{U}(t-t_0)\cancel{|\psi(t_0)\rangle}$$

$$i\hbar\frac{d}{dt}\hat{U}(t-t_0) = \hat{H}\,\hat{U}(t-t_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{U}(t-t_0) = e^{-i\hat{H}\cdot(t-t_0)/\hbar}}$$

b)
$$a(t) = \langle\psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle$$
$$= \langle\psi(0)|\hat{U}^{+}(t)|\hat{A}|\hat{U}(t)|\psi(0)\rangle$$
$$= \langle\psi(0)|\hat{A}_H(t)|\psi(0)\rangle$$

$$\boxed{\hat{A}_H(t) = \hat{U}^{+}(t)\hat{A}\,\hat{U}(t)}$$

c)
$$i\hbar\frac{d}{dt}\hat{A}_H(t) = i\hbar\frac{d}{dt}\left\{\hat{U}^{+}(t)\hat{A}\,\hat{U}(t)\right\}$$
$$= i\hbar\left\{\frac{d\hat{U}^{+}}{dt}\hat{A}\,\hat{U} + \hat{U}^{+}\hat{A}\frac{d\hat{U}}{dt}\right\}$$

$$\frac{d\hat{U}}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\hat{H}\hat{U} \quad ; \quad \frac{d\hat{U}^{+}}{dt} = \frac{i}{\hbar}\hat{H}\hat{U}^{+}$$

$$i\hbar\frac{d}{dt}\hat{A}_H(t) = -\hat{H}\,\hat{U}^{+}(t)\hat{A}\,\hat{U}(t) + \hat{U}^{+}(t)\hat{A}\,\hat{H}\,\hat{U}(t)$$

$\hat{U} = \hat{U}(\hat{H}) \Rightarrow [\hat{U}, \hat{H}] = 0 \rightarrow [\hat{U}^{+}, \hat{H}] = 0$

$$\Rightarrow \quad i\hbar \frac{d}{dt}\hat{A}_H(t) = -\hat{U}^{+}\hat{H}\hat{A}\hat{U} + \hat{U}^{+}\hat{A}\hat{H}\hat{U}$$
$$= \left(\hat{U}^{+}(t)\hat{A}\hat{U}(t)\right)\hat{H} - \hat{H}\left(\hat{U}^{+}(t)\hat{A}\hat{U}(t)\right)$$
$$= \hat{A}_H(t)\hat{H} - \hat{H}\hat{A}_H(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{i\hbar \frac{d}{dt}\hat{A}_H(t) = [\hat{A}_H(t), \hat{H}]}$$

PROBLEMA # 5

Nivel: posgrado

SU(2) y sistemas de dos niveles:

El deuteron es un sistema ligado neutron-proton. No existen estados ligados proton-proton ni neutron-neutron.

En el modelo de "isospin" para la fuerza nuclear, proton y neutron son dos estados que conforman una base del espacio de Hilbert de "nucleones"; un espacio de dimensión 2.

$$\{ |n\rangle, |p\rangle \}$$

En esta teoria, la fuerza nuclear es invariante ante transformaciones unitarias en espacio de isospin. ($SU(2)_I$).

Construya las posibles funciones de onda -en espacio de isospin- para un sistema de dos nucleones y deduzca cual de ellas corresponde a la del deuteron.

SOLUCION

Dado que el espacio de Hilbert de nucleones, en el modelo de isospin, es de dimensión dos, es analogo al caso de spin 1/2 (de ahí el nombre isospin)

$\{|p\rangle, |n\rangle\}$ son estados con isospin $I = 1/2$

Un sistema con dos particulas de isospin 1/2 nos da dos posibilidades para el isospin total:

- $I = 0$
- $I = 1$

$$|I=0, I_3=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|pn\rangle - |np\rangle\} \leftarrow \text{Singlete antisimetrico.}$$

↑ tercera componente de isospin

$$\left\{ \begin{array}{l} |I=1, I_3=-1\rangle = |nn\rangle \\ |I=1, I_3=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|pn\rangle + |np\rangle\} \leftarrow \text{Triplete simetrico.} \\ |I=1, I_3=+1\rangle = |pp\rangle \end{array} \right.$$

Dado que no existen estados $|nn\rangle$ ni $|pp\rangle$, y que la interacción nuclear se supone invariante ante transformaciones invariantes de isospin, tampoco debería existir el estado $|I=1, I_3=0\rangle$.

Por tanto, la función de onda del deuteron $|d\rangle$ debe ser:

$$|d\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|pn\rangle - |np\rangle\}$$

PROBLEMA #6

Nivel: posgrado

Oscilador armonico perturbado:

Considere un oscilador armonico unidimensional con hamiltoniano

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m w^2 \hat{x}$$

y una perturbación de la forma: $\hat{H}_1 = F\hat{x}$.

Encuentre una expresión para E_n, los valores propios de energía del sistema en un calculo perturbativo al orden más bajo.

SOLUCION

- Oscilador armonico 1D: $\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2$

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,\hat{x} \,; \quad \hat{P} = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}\,\hat{p} \;\rightarrow\; \hat{H}_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega\left(\hat{P}^2 + \hat{X}^2\right)$$

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X} + i\hat{P}\right) \quad ; \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X} - i\hat{P}\right)$$

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1/2\right) \qquad \left\{\begin{array}{l} \hat{H}_0|n\rangle = E_n|n\rangle \\ E_n = (n+1/2)\hbar\omega \\ n = 0, 1, 2, \ldots \end{array}\right.$$

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a} \;\longrightarrow\; \hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$$

$$\left\{\begin{array}{l} \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \\ \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n\rangle \end{array}\right.$$

- Teoria de perturbaciones: $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta E_n^{(1)} = \langle n|\hat{H}_1|n\rangle \\ \Delta E_n^{(2)} = \displaystyle\sum_{n \neq n} \frac{|\langle n|\hat{H}_1|n\rangle|^2}{E_n - E_n} \end{array}\right.$$

- $\hat{H}_1 = ?$ $\rightarrow$ $\hat{a}^\dagger + \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, 2\hat{X} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,\hat{x}$

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}^\dagger + \hat{a}\right)$$

$$\hat{H}_1 = F\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar F^2}{2m\omega}}\left(\hat{a}^\dagger + \hat{a}\right)$$

- $\Delta E_n^{(1)} = \langle n|\hat{H}_1|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar F^2}{2m\omega}} \langle n|(\hat{a}^\dagger + \hat{a})|n\rangle$

$$= \sqrt{\frac{\hbar F^2}{2m\omega}} \left\{ \langle n|\hat{a}^\dagger|n\rangle + \langle n|\hat{a}|n\rangle \right\}$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar F^2}{2m\omega}} \left\{ \sqrt{n+1}\langle n|n+1\rangle + \sqrt{n}\langle n|n-1\rangle \right\}$$

$$= 0$$

$\Rightarrow \Delta E_n^{(1)} = 0 \longrightarrow$ debemos ir al segundo orden.

- $\Delta E_n^{(2)} = \sum_{k \neq n} \frac{|\langle k|\hat{H}_1|n\rangle|^2}{E_n - E_k}$

$$\langle k|\hat{H}_1|n\rangle = \begin{cases} \sqrt{\frac{\hbar F^2}{2m\omega}}\sqrt{n+1} & \text{para } k = n+1 \\ \sqrt{\frac{\hbar F^2}{2m\omega}}\sqrt{n} & \text{para } k = n-1 \\ 0 & \text{de lo contrario.} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} E_n - E_{n+1} &= -\hbar\omega \\ E_n - E_{n-1} &= \hbar\omega \end{aligned}\right\}$$

$$\Delta E_n^{(2)} = \frac{F^2\hbar}{2m\omega}\left\{ \frac{n+1}{-\hbar\omega} + \frac{n}{\hbar\omega} \right\}$$

$$= \frac{F^2}{2m\omega^2}(n - n - 1) = -\frac{F^2}{2m\omega^2}$$

$$\Delta E_n^{(2)} = -\frac{F^2}{2m\omega^2}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{E_n = \hbar\omega(n + 1/2) - \frac{F^2}{2m\omega^2}}$$

3) Compresor

Un compresor diseñado para comprimir aire ($N_2 + O_2$) es usado para comprimir helio (He). El compresor se recalienta. Suponga que son gases ideales.

a) Explique la causa del recalentamiento suponiendo que la compresión es aproximadamente adiabática y ambos gases empiezan a la misma presión.

b) Suponiendo que la presión inicial es 1 bar, y la final 10 bar, encuentre la temperatura final para ambos gases.

Problemas de postgrado

4) Sistema cuántico 1D

Considere un sistema cuántico en una dimensión cuyos niveles de energía son $\epsilon_n = an + b$, con a y b constantes y n = 0, 1, 2, ...

a) Encuentre la función de partición. Recuerde que $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ para x<1

Considere un nuevo sistema que consiste en N copias *distinguibles* de este primer sistema

b) Encuentre la energía promedio U en función de la temperatura

c) Calcule el calor específico C_v en función de la temperatura

d) Calcule la entropía del sistema

5) Gas de fotones

Considere un gas de fotones en un volumen V y en equilibrio a temperatura T.

a) ¿Cuál es el potencial químico del gas de fotones? Explique.

b) Determine cómo el número de fotones en el volumen depende de la temperatura.

c) La densidad de energía se puede escribir como:

$$\frac{\bar{E}}{V} = \int_0^{\infty} \rho(\omega) d\omega$$

Determine la forma de $\rho(\omega)$, la densidad espectral de energía.

d) ¿Cómo depende la energía $\bar{E}$ de la temperatura?

6) Enana blanca

a) Dado que la masa del sol son 2 10^{29} kg, estime el número de electrones que tiene, suponiendo que está compuesto principalmente de hidrógeno.

b) En una enana blanca de una masa solar, todos los átomos están ionizados y contenidos en una esfera de radio 2 10^7 m. Derive la energía de Fermi para un gas de electrones,

c) y estime la energía de Fermi para esta enana blanca.

d) Si la temperatura de la enana blanca es de 10^7 K, establezca si el gas de electrones y nucleones están altamente degenerados se pueden considerar como gases de Fermi degenerados.

Universidad de los Andes **Doctorado en Ciencias – Física-**
Termodinámica y mecánica estadística
Examen de Conocimientos - 2022 – 2

Instrucciones: El examen comprende dos partes (pregrado y postgrado). Para cada parte debe resolver dos de los tres problemas propuestos. **Los problemas deben ser resueltos en hojas separadas, y solo debe entregar la solución a dos problemas por parte.** No se dará crédito parcial si entrega la solución a un tercer problema, y en tal caso, solo dos de las soluciones se tendrán en cuenta, a voluntad del calificador. En cada parte todos los problemas tienen el mismo valor. No se permite el uso de libros, apuntes, dispositivos electrónicos, ni la comunicación con otras personas o sistemas.
Duración : 3 horas.

Problemas de pregrado

1) Bomba de calor

Suponga que una persona inventa una "bomba de calor" para calentar una casa en Bogotá. La idea es usar el "calor" de afuera y bombearlo dentro de la casa, en la dirección opuesta al movimiento natural, como en una nevera, pero con el lado caliente adentro de la casa y el frío afuera. El inventor dice que puede mover 3 unidades de calor por cada unidad de energía que usa la bomba. Desde esta perspectiva sería más eficiente que usar una resistencia para calentar la casa que solo puede transformar el 100% de la energía en calor a través del efecto Joule.

a. Explique usando un diagrama de flujo de energía para un refrigerador si este tipo de aparato viola o no y por qué la conservación de energía
b. Use la segunda ley de la termodinámica para estimar la "eficiencia" máxima posible de un sistema como el que propone el inventor(medida en función del calor que entra a la casa sobre el trabajo requerido), y si es realista mover 3 unidades de calor por cada unidad de energía que usa la bomba como dice el inventor en un sitio como la Calera.

2) Enfriamiento magnético

El campo magnético creado por un dipolo tiene una magnitud aproximada de $(\mu_0/4\pi)(\mu/r^3)$, donde r es la distancia al dipolo y μ_0 es la permeabilidad del vacío, cuyo valor es $4\pi\ 10^{-7}$ en unidades SI. En esta aproximación estamos ignorando la variabilidad del campo con el ángulo.

Considere un material paramagnético cuyo momento magnético μ es de aproximadamente un magnetón de Bohr ($9.\ 10^{-24}$ J/T), con dipolos separados por una distancia de 1nm. Suponga que los dipolos sólo interactúan a través de fuerzas magnéticas ordinarias.

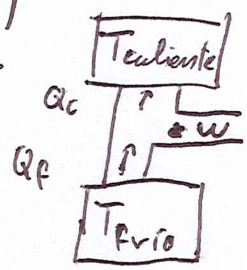
a) Estime la magnitud del campo magnético causado por n vecinos, a una distancia r, sobre el dipolo (en r=0). Este es el campo magnético efectivo aún cuando no haya campos magnéticos externos.
b) Usando la función de partición, muestre que la magnetización total de un material paramagnético con N dipolos está dada por $M=N\mu \tanh(\mu B/kT)$, donde N es el número total de dipolos.
c) En un experimento de enfriamiento magnético usando este material se empieza con un campo externo aplicado de 1T. Si se aísla el material del baño y el campo magnético *externo* se disminuye rápidamente a 0, ¿qué tanto (por qué factor) disminuirá la temperatura?

Solución examen Conocimientos Termo y Mec. Estadística 2023-1 (2022-2).

Pregrado

1) Bomba de calor.

a)



$Q_{caliente} = Q_{frío} + W$

↳ no viola la conservación de Energía.

$Q_c > W$ porque usa Q_f (transporta calor desde el reservorio frío)

- En una nevera sacamos ese calor de la parte interna hacia el reservorio ~~interior~~ exterior, y en una bomba de calor usamos el reservorio frío exterior para mover el calor hacia el interior de la residencia.

b) sabemos que: $\Delta S_c \geq \Delta S_f$

entonces: $\frac{Q_c}{T_c} \geq \frac{Q_f}{T_f}$

$$\frac{T_f}{T_c} \geq \frac{Q_f}{Q_c} = \frac{Q_f}{Q_f + W} = \frac{Q_c - W}{Q_c} = 1 - \frac{W}{Q_c}$$

$$1 - \frac{T_f}{T_c} \leq \frac{W}{Q_c} \quad , \quad \frac{Q_c}{W} \leq \frac{1}{1 - \frac{T_f}{T_c}} = \frac{T_c}{T_c - T_f}$$

para la calera, supongamos que la persona quiere una temperatura de 22° en la casa, y que la T^o externa es de 7°C. en ese caso: $\frac{Q_c}{W} = \frac{295}{15} \simeq 20 >>$ que 3 con lo que no sería problema.

2) Enfriamiento magnético.

a)

$r = 1\,nm.$

\#vecinos

ignoramos ~~no depende~~ ángulo

$$B = \sum B_{vecinos} = n \cdot \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \frac{\mu}{r^3} f(\phi)$$

$$B_{max} = n \cdot \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{4\pi} \cdot \frac{(9 \cdot 10^{-24})}{(10^{-9})^3} = n \cdot 9 \cdot 10^{-4}\,T \simeq n \cdot 1\,mT.$$

b)

$$Z = \sum_s e^{-\beta E(s)} = e^{+\beta\mu B} + e^{-\beta\mu B} = 2\cosh(\beta\mu B).$$

$$Prob(\uparrow) = \frac{e^{+\beta\mu B}}{Z} = \frac{e^{\beta\mu B}}{2\cosh(\beta\mu B)}$$

$$Prob(\downarrow) = \frac{e^{-\beta\mu B}}{Z} = \frac{e^{-\beta\mu B}}{2\cosh(\beta\mu B)}$$

$$\bar{\mu} = \sum_i \mu_i P_i = +\mu \cdot P(\uparrow) + (-\mu) \cdot P(\downarrow)$$

$$= \mu \frac{\overbrace{(e^{\beta\mu B} - e^{-\beta\mu B})}^{2\sinh(\beta\mu B)}}{2\cosh(\beta\mu B)}$$

$$= \mu \tanh(\beta\mu B).$$

La magnetización total es:

$$M = N\bar{\mu} = N\mu \tanh(\beta\mu B) = N\mu \tanh\left(\frac{\mu B}{k_B T}\right).$$

c) es un proceso adiabático reversible $\Rightarrow S = cst$

$\Rightarrow$ proporción dipolos ↑ no cambia.

$\Rightarrow M$ cst.
se mantiene

#dipolos.

$$M = N\mu \tanh\left(\frac{\mu B}{k_b T}\right)$$

$$M_i = M_f \rightarrow \frac{\mu B_i}{k_b T_i} = \mu \frac{B_f}{k_b T_f}$$

de a) el B mínimo. (sin externo).

$$T_f = T_i \frac{B_f}{B_i} = T_i \frac{n \cdot 10^{-3} T}{1 T}$$

la t° final depende del campo inicial y del campo magnético mínimo (sin campo externo), es decir también del # de vecinos n.

3) Compresor.

a) para un gas ideal $pV = nRT$

y un proceso adiabático nos da: $p\left(\frac{V}{V_0}\right)^{\gamma} = P_0$

donde $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$, y $\gamma_{He} = \frac{5/2}{3/2} = 5/3$

$c_p = c_v + Nk$

$c_v = \frac{Nk}{2} f \leftarrow$ grados lib. $\quad \gamma_{aire} = \frac{7/2}{5/2} = 7/5$

$f_{He} \to x, y, z \Rightarrow 3$; $f_{aire} \Rightarrow x, y, z, \theta, \phi \to f = 5$

$O=O$ $\quad$ $+ \; \theta \; + \; \phi$

$N \equiv N$

$\gamma_{He} > \gamma_{aire}$.

en compresión $V_0 > V_f$, P_0 la presión inicial es la misma para los dos.

$$P^{final}_{He}\left(\frac{V}{V_0}\right)^{\gamma_{He}} = P_0 = P^{final}_{aire}\left(\frac{V}{V_0}\right)^{\gamma_{aire}}.$$

$\uparrow$
< 1

$$P^f_{He}\left(\frac{V}{V_0}\right)^{1.66} = P^f_{N_2}\left(\frac{V}{V_0}\right)^{1.4}$$

$\Rightarrow \quad P^f_{He} > P^f_{aire}$ y $T^f_{He} > T^f_{aire}$

Gas ideal.

El compresor no está diseñado para disipar el calor debido a la mayor T°.

15

3) b) Sabemos que $pV^{\gamma} = cst$ y $PV = nRT$

adiab.

queremos expresión sin V y con T.

$$PV^{\gamma} = cst \Rightarrow P_1 V_1^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma}$$

$$V_1^{\gamma} = \frac{P_2}{P_1} V_2^{\gamma} \quad \Big\downarrow P = \frac{nRT}{V}$$

$$V_1^{\gamma} = \left(\frac{nRT_2}{V_2} \frac{V_1}{nRT_1} \right) V_2^{\gamma}$$

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}$$

ahora queremos cambiar V por P.

Usando de nuevo:

$$PV^{\gamma} = cst \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

reemplazamos y obtenemos:

$$\boxed{T_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

como $\frac{P_2}{P_1} = \frac{10 \text{ bar}}{1 \text{ bar}} \Rightarrow T_2 = T_1 \, 10^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$

Para He: $\gamma_{He} = \frac{5}{3}$ y $T_f^{He} = 300 \, 10^{2/3 / 5/3} = 300 \, 10^{2/5}$

aire $\gamma = \frac{7}{5}$ y $T_f^{aire} = 300 \cdot 10^{\frac{2/5}{7/5}} = 300 \cdot 10^{2/7}$

Problemas Postgrado

4) Sistema cuántico 1D.

a) $Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-E\beta} = \sum_{0}^{\infty} e^{-(an+b)\beta} = e^{-b\beta} \sum_{0}^{\infty} e^{-a\beta n}$

$$= e^{-b\beta} \frac{1}{1-e^{-a\beta}}$$

b) $u = -N \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -N \left(-b - \frac{1}{1-e^{-a\beta}} a e^{-a\beta} \right)$

$$= N \left(b + \frac{a}{e^{a\beta}-1} \right).$$

c) $C_V = N \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right) = -\frac{N}{k_b T^2} \frac{\partial u}{\partial \beta}$ $\left[\beta = 1/kT \Rightarrow \frac{\partial \beta}{\partial T} = -\frac{1}{kT^2} \right.$

$$= -\frac{N}{kT^2} \left(a \left(\frac{-1}{(e^{a\beta}-1)^2} \cdot a e^{a\beta} \right) \right)$$

$$= \frac{N}{kT^2} a^2 \frac{e^{a\beta}}{(e^{a\beta}-1)^2}.$$

d) $S = -\frac{\partial F}{\partial T}$, $F = -kT \ln Z$.

$$= Nk \frac{\partial}{\partial T} (T \ln Z) = Nk \left(\ln Z + T \frac{\partial}{\partial T} \ln Z \right)$$

$$= Nk \left(\ln Z - T \cdot \frac{1}{kT^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \right)$$

$$= Nk \left(-\cancel{b\beta} - \ln(1-e^{-a\beta}) + \cancel{b\beta} + \frac{a\beta}{e^{a\beta}-1} \right)$$

$$= Nk \left(\frac{a\beta}{e^{a\beta}-1} - \ln(1-e^{-a\beta}) \right).$$

problema 5/ Gas de fotones.

a) $\mu = 0$ dado que el # de fotones no se conserva, y no cuesta adicionar fotones al sistema ?

b) $$\mu = \left.\frac{\partial F}{\partial N}\right|_{T,V} = 0$$

$$\bar{N} = \int g(\omega) \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} d\omega$$ ← Forma de $\bar{N}$

densidad estados. Bose-Einstein.

→ empezamos calculando la densidad de estados.

Suponemos que los fotones están en una caja cúbica de lado L con condiciones de borde, que nos da:

$$\text{modos permitidos} = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \left(\frac{2L}{\lambda}\right)^2 = r^2$$

- Se toma un octavo de esfera, para solo tener los n's > 0. de radio r

para no contar estados repetidos n ó $-n$ son el mismo.

- $$n = \#\text{ modos} = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{1}{8} \cdot 2 = \frac{\pi}{3} r^3$$

2 polarizaciones.

$$= \frac{\pi}{3}\left(\frac{2L}{\lambda}\right)^3 = \frac{8\pi}{3} V \frac{p^3}{h^3} \qquad \text{donde } p = \frac{h}{\lambda}$$

densidad de estados en momento:

$$\rho(p)dp = \frac{\partial n}{\partial p} = \frac{8\pi}{3}\frac{V}{h^3} 3p^2 dp = 8\pi V \frac{p^2}{h^3} dp$$

pasando a ω: $p = \dfrac{\hbar\omega}{c}$ $\quad dp = \dfrac{\hbar}{c} d\omega$

$$g(\omega) = \frac{8\pi V}{h^3} \frac{\hbar^2\omega^2}{c^2} \frac{\hbar}{c} d\omega = \frac{V}{c^3}\frac{1}{\pi^2}\omega^2 d\omega$$

sigue →

entonces $\bar{N} = \int_0^{\infty} g(\omega) \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT}-1} d\omega$

$$= \int \frac{V}{c^3\pi^2} \frac{\omega^2}{e^{\hbar\omega/kT}-1} d\omega = \frac{V}{c^3\pi^2} \int \frac{\omega^2}{e^{\hbar\omega\beta}-1} d\omega$$

Cambiando de variable:

$\alpha = \frac{\hbar\omega}{kT}$ $\quad d\alpha = \frac{\hbar}{kT} d\omega$

$\omega = \frac{\alpha}{\beta\hbar} = \frac{\alpha kT}{\hbar}$ $\quad d\omega = \frac{d\alpha}{\hbar\beta}$

$$\bar{N} = \frac{V}{\pi^2 c^3} \left(\frac{kT}{\hbar}\right)^2 \int \frac{kT}{\hbar} \frac{\alpha^2}{e^{\alpha}-1} d\alpha$$

$$= \frac{V}{\pi^2 c^3} \left(\frac{kT}{\hbar}\right)^3 \int_0^{\infty} \frac{\alpha^2}{e^{\alpha}-1} d\alpha$$

entonces finalmente $\bar{N} \propto T^3$ ✓

c) $\frac{\bar{E}}{V} = \int_0^{\infty} \rho(\omega) d\omega$, $\rho(\omega) = ?$

$$\frac{\bar{E}}{V} = \frac{1}{V} \int g(\omega) E(\omega) \frac{1}{e^{\hbar\omega\beta}-1} d\omega = \frac{\cancel{V}}{\cancel{V}} \frac{\hbar}{c^3\pi^2} \int \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega\beta}-1} d\omega$$

$$\Rightarrow \rho(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega\beta}-1}$$

d) sigue →

ej 5/d) $\bar{E} \propto T^{?}$?

Cambiando de variable: $\alpha \doteq \frac{\hbar \omega}{kT}$

$$\frac{\bar{E}}{V} = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \left(\frac{kT}{\hbar}\right)^3 \cdot \left(\frac{kT}{\hbar}\right) \int \frac{\alpha^3 \, d\alpha}{e^{\alpha}-1}$$

con lo que $\frac{\bar{E}}{V} \propto T^4$

—o—

ejercicio 6 Enana blanca.

Nadie de los que lo tomó intentó este ejercicio, por lo que se le deja la solución al lector.

Nota: se parece al ej 5, pero con fermiones.