UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
EXAMEN DE CONOCIMIENTOS
2022-1 MECÁNICA ESTADÍSTICA

Julio 26, 2022

- El examen tiene una duración de 3:00 horas y se debe terminar a las 12:00 horas.
- Usted debe responder todos los ejercicios a mano explicando claramente el procedimiento que sigue, de no ser así no se dará puntaje.
- El examen se debe desarrollar manera individual. Usted no debe comunicarse con ningun@ de sus compañer@s ni utilizar ningún documento, libro o apuntes, diferente a las que se le están asignando en el enunciado. Al final de este documento hay algunas fórmulas que pueden ser útiles para el desarrollo de este examen.
- Firmando el examen usted admite que entiende que omitir las reglas estipuladas para este examen será considerado un abuso a la confianza que se ha puesto en usted y tendrá las consecuencias estipuladas en el reglamento general de estudiantes de doctorado de la Universidad.

1. **(20 puntos)** Considere una cadena de N espines con un hamiltoniano descrito por el modelo Ising:

$$H = -J \sum_{n=1}^{N-1} s_n s_{n+1} \tag{1}$$

donde el espín toma valores $s_n = \pm 1$.

Calcule:

a) La función de partición.

b) La capacidad calorífica por espín.

2. **(20 puntos)** El objetivo del siguiente ejercicio es modelar el calor específico de un sólido en función de la temperatura.

a) Encuentre una expresión para la energía promedio de un oscilador armónico cuántico con frecuencia natural ω y temperatura T.

b) Asumiendo que las vibraciones de los modos normales de un sólido tienen la misma frecuencia natural, ω_E, encuentre una expresión para la capacidad calorífica de un sólido.

c) Encuentre el límite de alta temperatura para la capacidad calorífica en este modelo. ¿Sus resultados se encuentran de acuerdo a lo que se sabe de observaciones experimentales?

d) Encuentre el límite de baja temperatura para la capacidad calorífica en este modelo. ¿Sus resultados se encuentran de acuerdo a lo que se sabe de observaciones experimentales?

3. **(30 puntos)** Considere un gas ideal de átomos confinado en un contenedor aislado térmicamente del ambiente. El gas tiene densidad de número n y temperatura T. Suponga que el contenedor tienen un pequeño orificio de área A en una de las paredes. El área del orificio es mucho menor que el contenedor y que el camino libre medio de los átomos. Calcule el número de átomos que escapan por unidad de tiempo. Exprese su respuesta en términos de la densidad de número n, el área del orificio A y la rapidez promedio de los átomos $\langle v \rangle$.

4. **(30 puntos)** Una estrella de neutrones es el núcleo colapsado de una estrella. Los neutrones se encuentran en un estado degenerado donde cada neutrón ocupa un único estado cuántico. La presión de los neutrones degenerados se compensa con la presión gravitacional. El objetivo de este ejercicio es estimar el radio de una estrella de neutrones a partir de su masa.

a) Primero calcule la magnitud del número cuántico, n_F, del neutron en el nivel de energía más alto. Su respuesta debe quedar en términos del número total de neutrones en la estrella, N.

b) Calcule la energía de Fermi ε_F. Esta es la energía que tiene el neutrón en el nivel de energía más alto. Para hacer este cálculo es común usar la siguiente aproximación: los neutrones no son relativistas y su momentum se puede estimar pensándolo como confinado en un potencial infinito de ancho $V^{1/3}$, donde V es el volumen de la estrella. La respuesta debe quedar en términos de la constante de Planck h, la masa del neutrón m, el número total de neutrones N y el volumen de la estrella V.

c) Usando los resultados anteriores calcule la energía interna U (excluyendo la energía gravitacional).

d) A partir del resultado anterior calcule la presión de degeneración como $P_d = -\partial U/\partial V$.

e) Haciendo el balance de presiones $P_d + P_g = 0$ encuentre el radio de la estrella en función de G, h, m y M. Suponga que la presión gravitacional se puede escribir como

$$P_g = -\frac{\partial U_g}{\partial V} = -\frac{GM^2}{5}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} V^{-4/3} \tag{2}$$

donde U_g es la energía potencial gravitacional, G es la constante de gravitación universal, M es la masa total de la estrella y V es el volumen de la estrella.

f) Asumiendo que la estrella tiene una masa 1.5 veces la masa del Sol, es decir $M = 3 \times 10^{30}$ kg, encuentre el radio de la estrella en unidades de km.

Valores de algunas constantes universales:

- h: $6.62607015 \times 10^{-34}$ J s
- G: 6.67430×10^{-11} N m^2 kg^{-2}
- m, masa del neutrón: $1.67492749804 \times 10^{-27}$ kg.

CADENA DE ESPIN 1D

(a) La función de partición se define como

$$Z = \prod_{n=1}^{N} \sum_{S_n=\pm 1} e^{-\beta H}$$

donde el producto se toma sobre los N sitios.

Definimos $K = \beta J$, donde $\beta = \frac{1}{\tau}$

Empezamos a evaluar la suma para $n=1$.

$$\sum_{S_1=\pm 1} e^{-KS_1S_2} = e^{K} + e^{-K}$$

, independiente de si $S_2 = +1$ o si $S_2 = -1$.

Para S_2 obtenemos el mismo resultado.

$$\sum_{S_2=\pm 1} e^{-KS_2S_3} = e^{K} + e^{-K}$$

es decir, tenemos siempre $e^{K} + e^{-K}$ para cada elemento de la suma. y la función de partición es el producto de N de esos factores.

$$\boxed{Z = (e^{K} + e^{-K})^N}$$

(b) El calor específico se puede encontrar a partir de la definición de energía libre.

$$F = -\tau \ln Z = -N\tau \ln(e^{K} + e^{-K})$$

La entropía está dada por:

$$S = -\frac{\partial F}{\partial \tau} = N \ln(e^{K} + e^{-K}) - \frac{NJ}{\tau^2} \tanh K$$

La capacidad calorífica. está dada por

$$C = \tau\left(\frac{\partial S}{\partial \tau}\right) = \frac{NJ^2}{\tau^2} \frac{1}{\cosh^2 K} = \frac{NK^2}{\cosh^2 K}.$$

el calor específico (capacidad calorífica por spin)

$$c = \frac{C}{N} = \boxed{\frac{K^2}{\cosh^2 K}}$$

MODELO DE EINSTEIN PARA EL CALOR ESPECIFICO

(a) Para un oscilador armonico de frecuencia ω la energia promedio es:

$$\mathcal{E} = \hbar\omega \langle n \rangle$$

donde $\langle n \rangle = \dfrac{1}{e^{\hbar\omega/\tau} - 1}$, de esta manera

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/\tau} - 1}}$$

(b) Asumiendo que los N átomos del solido tienen 3 grados de libertad y la misma frecuencia ω_E, entonces la energia total es:

$$E = 3N \frac{\hbar\omega_E}{e^{\hbar\omega_E/\tau} - 1}$$

el calor especifico se puede escribir como:

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial \tau}\right)_V = \boxed{3N\left(\frac{\hbar\omega_E}{\tau}\right)^2 \frac{e^{\hbar\omega_E/\tau}}{(e^{\hbar\omega_E/\tau} - 1)^2}}$$

(c) En el limite de alta temperatura $\hbar\omega_E \ll \tau$ tenemos:

$$C_V \approx 3N\left(\frac{\hbar\omega_E}{\tau}\right)^2 \frac{(1 + \hbar\omega_E/\tau)^2}{(\hbar\omega_E/\tau)^2} \simeq \boxed{3N}$$

en unidads fisicas $\boxed{C_V = 3Nk_B} \to$ constante acorde con la ley Dulong - Petit.

(d) A bajas temperaturas:

$$C = 3N\left(\frac{\hbar\omega_E}{\tau}\right)^2 e^{-\hbar\omega_E/\tau}$$

asi que en el limite $\tau \to 0$, $C \to 0$, mientras que los resultados experimentales dan $C \propto \tau^3$.

GAS QUE ESCAPA POR UN ORIFICIO

El número de átomos por unidad de volumen que se mueven en la dirección normal a la pared se puede escribir en coordenadas esféricas como:

$$dn = n g(v) v^2 dv \sin\phi \, d\phi \, d\theta \qquad (1)$$

donde ϕ es el ángulo azimutal, θ es el ángulo polar, n es la densidad de número de átomos y $g(v)$ es la función de distribución en el espacio de velocidades.

Para encontrar el número de átomos que golpean el área A del hueco por unidad de tiempo dt, multiplicamos (1) por

$$\underbrace{A v \cos\theta \, dt}_{} \qquad (2)$$

Solamente los átomos con esta distancia al hueco, llegan efectivamente al hueco.

Para encontrar el flujo total R integramos:

$$R = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} dv \left(n g(v) v^2 \sin\theta \cdot A v \cos\theta \right)$$

R → número de átomos por unidad de tiempo.

$$R = nA \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} g(v) v^3 dv \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta \, d\theta$$

$$= \pi A n \int_0^{\infty} v^3 g(v) \, dv.$$

Por otro lado, la definición de ~~velocidad~~ rapidez promedio es:

$$\langle v \rangle = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{\infty} dv \left(v^2 (v g(v)) \right)$$

$$= 4\pi \int v^3 g(v) \, dv.$$

de esta manera $\boxed{R = n \dfrac{\langle v \rangle}{4} A}$

RADIO DE UNA ESTRELLA DE NEUTRONES

(a) Empezamos por calcular la magnitud del número cuántico del neutrón en el nivel de energía más alto.

$$n_F = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

Asumiendo que los neutrones tienen temperatura cero; tenemos que el número total de Neutrones N se relaciona con n_F:

$$N = 2\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{4}{3}\pi n_F^3\right)$$

Donde el factor 2 representa el hecho que los spin arriba y abajo están disponibles en cada estado cuántico.
El factor 1/8 representa el hecho que un neutrón puede ocupar cualquier estado en el octante positivo de la esfera del espacio de configuración cuántico.

De esta manera

$$\boxed{n_F = \left(\frac{3N}{\pi}\right)^{1/3}}$$

(b) En cada nivel de energía un neutrón tiene momentum $|p| = \dfrac{hn}{2V^{1/3}}$ correspondiendo a la n-ésima solución de un pozo de potencial infinito. De esta manera podemos calcular la energía de Fermi:

$$\mathcal{E}(n) = \frac{|p|^2}{2m} = \frac{h^2}{8mL^2}|n|^2$$

$$\mathcal{E}_F = \mathcal{E}(n_F) = \boxed{\frac{h^2}{8m}\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{2/3}}$$

donde asumimos que los neutrones no son relativistas.

(c) Ahora calculamos la energía interna, excluyendo la energía gravitacional. Esto lo hacemos integrando la energía de todos los niveles.

$$U = 2\int\int\int \mathcal{E}(n)\, d^3n = 2\int_0^{n_F}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \frac{h^2}{8mV^{2/3}} n^2 n^2 \sin\theta \, dn\, d\theta\, d\phi$$

$$= \left(\frac{\pi h^2}{8mV^{2/3}}\right)\frac{n_F^5}{5} = \left(\frac{h^2}{8mV^{2/3}} n_F^2\right)\left(\frac{\pi}{3} n_F^3\right)\left(\frac{3}{5}\right) = \boxed{\frac{3}{5} N \mathcal{E}_F}$$

(d) De esta expresion calculamos la presion de degeneracion.

$$P_d = -\frac{\partial U}{\partial V} = \frac{2}{3}\frac{U}{V} = \frac{2}{5}\frac{h^2}{8m}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}$$

(e) La presion gravitacional es:

$$P_g = -\frac{\partial U_g}{\partial V} = -\frac{GM^2}{5}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} V^{-4/3}.$$

haciendo el balance de presion:

$$P_d + P_g = 0$$

$$\frac{2}{5}\frac{h^2}{8M}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\left(\frac{N}{V}\right)^{5/3} = \frac{GM^2}{5}\left(\frac{4\pi}{3}\right)V^{-4/3}$$

y tomando $M = mN$, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

$$\boxed{R = \frac{3}{8}\frac{(3/2)^{1/3} h^2}{G\pi^{4/3}\, m^{8/3}} M^{-1/3}}$$

(f) Asumiendo una masa $M = 1.5\, M_{sol} = 3 \times 10^{30}\, kg$.

$$\boxed{R = 10.75\ km}$$

JCS

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2022

Electromagnetismo

Reglas:

- No se permite el uso de libros, apuntes, o dispositivos electrónicos.
- Los problemas propuestos deben ser resueltos a mano explicando claramente el procedimiento.
- El examen se debe contestar de forma individual. No debe comunicarse con ningún compañero o compañera.
- Al firmar el examen, usted acepta estas reglas. De no cumplirlas estará sujeto a las acciones estipuladas en los reglamentos de la Universidad de los Andes.

Duración total del examen : 3 horas

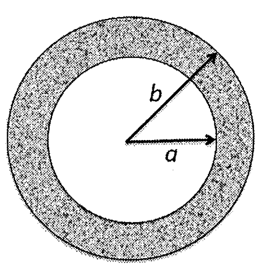
---

1. (**20 puntos**) Un cascarón esférico, como el que se muestra en la figura, tiene una densidad de carga eléctrica:

$$\rho = \frac{k}{r^2}$$

en la región: $a \leq r \leq b$.

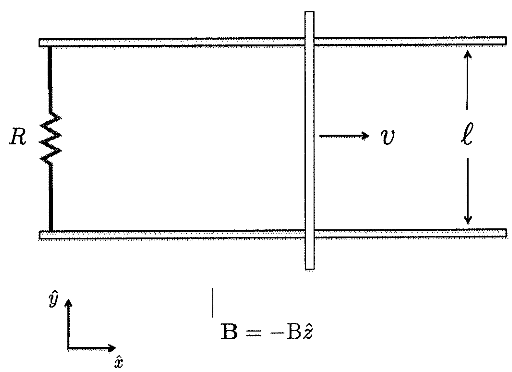
Calcule el potencial eléctrico V en el centro del cascarón ($r = 0$).
(tome $V \to 0$ cuando $r \to \infty$).



---

2. (**20 puntos**) Una barra metálica de masa m se desliza sin fricción sobre dos rieles metálicos paralelos, separados por una distancia ℓ. Los rieles están conectados entre sí por una resistencia eléctrica R, como se muestra en la figura. En toda la región está presente un campo magnético uniforme **B** que apunta en la dirección perpendicular al plano de la página, entrando.

Si ponemos la barra en movimiento, en $t = 0$, con velocidad v_0, y dejamos que se deslice libremente, ¿ cuál será su velocidad, $v(t)$, en un tiempo t ?



---

3. (**30 puntos**) El potencial vectorial electromagnético $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, producido por una densidad de corriente $\mathbf{J}(\mathbf{r})$, está dado por:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')\, d^3r'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,.$$

Considere un loop C que delimita una superficie plana S_C. Por el loop circula una corriente eléctrica estacionaria I. Al hacer una expansión multipolar para $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, demuestre que:

$$\mathbf{A}_{\mathrm{mon}}(\mathbf{r}) = 0 \qquad \text{(monopolar)}$$

$$\mathbf{A}_{\mathrm{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{m}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \qquad \text{(dipolar)}$$

donde,

$$\mathbf{m} = I\int_{S_C} d\mathbf{a}\,.$$

Ayuda:

$$\oint_C (\mathbf{v}\cdot\mathbf{r})\, d\ell = -\mathbf{v}\times\int_{S_C} d\mathbf{a}$$

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\theta')$$

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \tfrac{1}{2}(3x^2-1), \quad \ldots \qquad \text{(Polinomios de Legendre)}$$

---

4. (**30 puntos**) La relación entre una fuerza **F**, que actúa sobre una partícula, y el potencial asociado U, cuando la fuerza depende de la velocidad de la partícula, está dada por:

$$\mathbf{F} = -\nabla_{\mathbf{r}} U + \frac{d}{dt}(\nabla_{\mathbf{v}} U) \ ,$$

donde:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}} &= \hat{\mathbf{i}}\,\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\,\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\,\frac{\partial}{\partial z} \\ \nabla_{\mathbf{v}} &= \hat{\mathbf{i}}\,\frac{\partial}{\partial v_x} + \hat{\mathbf{j}}\,\frac{\partial}{\partial v_y} + \hat{\mathbf{k}}\,\frac{\partial}{\partial v_z} \end{aligned}$$

La fuerza que resulta de la interacción entre una carga eléctrica y un campo electromagnético, $\mathbf{F} = q\,(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$, depende de la velocidad.

Demuestre que: $\quad U = q\,V - q\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}\,,$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \end{aligned}$$

Ayuda:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{k\ell m} = \delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{j\ell}$$

SOLUCION PROBLEMA # 1

$$V(\vec{r}) - V(\vec{r}_0) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$ $\Rightarrow$ debemos calcular primero $\vec{E}(\vec{r})$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(r)$$

↑ Debido a la simetría esférica del problema

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{enc} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_{V_S} \rho\, d^3x$$ ← Ley de Gauss

↳ volumen encerrado por la superficie S.

$r < a$:

$$Q_{enc} = 0 \qquad \oint_{r'=r} \vec{E}\cdot d\vec{a}' = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = 0}$$

$a \leq r \leq b$:

$$Q_{enc} = \int_{a\leq r'\leq r} \rho\, d^3r' = \int_{a\leq r'\leq r} \frac{k}{r'^2}\, r'^2 \operatorname{sen}\theta'\, dr'\, d\theta'\, d\varphi'$$

$$= k\int_a^r dr' \underbrace{\int_0^\pi \operatorname{sen}\theta'\, d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi'}_{4\pi}$$

$$\boxed{Q_{enc} = 4\pi k(r-a)} \qquad a \leq r \leq b$$

$$\oint_{r'=r} \vec{E}\cdot d\vec{a}' = E(r)\,(4\pi r^2)$$

$$\Rightarrow \quad E(r)\,(4\pi r^2) = \frac{4\pi k}{\epsilon_0}(r-a)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{k}{\epsilon_0}\left(\frac{r-a}{r^2}\right)\hat{r}} \qquad a \leq r \leq b$$

$\underline{r > b}$:

para $r = b \rightarrow Q_{enc} = 4\pi k\,(b-a)$

$$r > b \Rightarrow \boxed{Q_{enc} = 4\pi k\,(b-a)}$$

$$\oint_{r'=r>a} \vec{E}\cdot d\vec{a}' = \frac{4\pi k\,(b-a)}{\epsilon_0}$$

$$\hookrightarrow E(r)\,(4\pi r^2) = \frac{4\pi k}{\epsilon_0}(b-a)$$

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{k}{\epsilon_0}\left(\frac{b-a}{r^2}\right)\hat{r}} \qquad r > b$$

Ahora podemos calcular $V(r)$: $\quad V(0) = -\int_{\infty}^{0}\vec{E}\cdot d\vec{l}$

$$V(0) = -\int_{\infty}^{\vec{b}}\vec{E}\cdot d\vec{l} - \int_{\vec{b}}^{\vec{a}}\vec{E}\cdot d\vec{l} - \cancel{\int_{\vec{a}}^{0}\vec{E}\cdot d\vec{l}}^{\,0} \qquad d\vec{l} = \hat{r}\,dr$$

camino radial.

$$= -\frac{k(b-a)}{\epsilon_0}\underbrace{\int_{\infty}^{b}\frac{dr}{r^2}}_{-\frac{1}{r}\Big|_{\infty}^{b}} - \frac{k}{\epsilon_0}\int_{b}^{a}\frac{r-a}{r^2}\,dr$$

$$V(0) = \frac{K}{\epsilon_0}(b-a)\frac{1}{r}\Big|_{\infty}^{b} - \frac{K}{\epsilon_0}\int_b^a \frac{r-a}{r^2}\,dr$$

$$= \frac{K}{\epsilon_0}\left(\frac{b-a}{b}\right) - \frac{K}{\epsilon_0}\int_b^a \frac{r-a}{r^2}\,dr$$

$$\int_b^a \frac{r-a}{r^2}\,dr = \int_b^a \frac{dr}{r} - a\int_b^a \frac{dr}{r^2} = \ln\left(\frac{a}{b}\right) + a\frac{1}{r}\Big|_b^a$$

$$= \ln\left(\frac{a}{b}\right) + a\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{a}{b}\right) + 1 - \frac{a}{b}$$

$$V(0) = \frac{K}{\epsilon_0}\left(\frac{b-a}{b}\right) - \frac{K}{\epsilon_0}\left\{\ln\left(\frac{a}{b}\right) + 1 - \frac{a}{b}\right\}$$

$$= -\frac{K}{\epsilon_0}\ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{V(r=0) = \frac{K}{\epsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

SOLUCION: PROBLEMA # 2

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad \Phi = \int \vec{B}\cdot d\vec{a}$$

Fuerza Electromotriz — Flujo magnetico.

$$\Phi = \int B\hat{\otimes}\cdot da\,\hat{\odot} = -B\int da = -Blx$$

Posición de la barra desde la posición de la resistencia.

$$\frac{d\Phi}{dt} = -Bl\frac{dx}{dt} = -Blv$$

velocidad de la barra

$$\mathcal{E} = -Blv \qquad \mathcal{E} = IR \quad \Rightarrow \quad I = -\frac{Blv}{R}$$

hacia abajo atraves del Resistor.

$$\vec{F} = \int (\vec{I}\times\vec{B})\,dl \quad \Leftarrow \text{Fuerza magnetica}$$

$$\begin{cases}\vec{I} = I\hat{y}\\ \vec{B} = -B\hat{z}\end{cases}$$

$$\vec{F} = -IBl\,(\hat{y}\times\hat{z})$$

$$\vec{F} = -IBl\,\hat{x} \quad \Leftarrow \text{sobre la barra.}$$

I va hacia arriba.

$$\vec{F} = m\frac{dv}{dt} = -IBl = -\left(\frac{Blv}{R}\right)Bl = -\left(\frac{B^2l^2}{R}\right)v$$

$$\frac{dv}{dt} = -\left(\frac{B^2l^2}{Rm}\right)v \longrightarrow \boxed{v(t) = v_0\, e^{-\left(\frac{B^2l^2}{mR}\right)t}}$$

SOLUCION: PROBLEMA #3

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{l}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\theta')\, d\vec{l}'$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \oint_C (r')^n P_n(\cos\theta')\, d\vec{l}'$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\underbrace{\frac{1}{r} \oint_C d\vec{l}'}_{\text{monopolar}} + \underbrace{\frac{1}{r^2} \oint_C (r') \cos\theta'\, d\vec{l}'}_{\text{dipolar.}} + \cdots \right]$$

$$\oint_C d\vec{l}' = 0. \Rightarrow \boxed{\vec{A}_{mon}(\vec{r}) = 0}$$

$$\vec{A}_{dip}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint_C (r') \cos\theta'\, d\vec{l}'$$

$$r' \cos\theta' = \vec{r}' \cdot \hat{r} \Rightarrow \oint_C r' \cos\theta' d\vec{l}' = \oint_C (\hat{r}\cdot\vec{r}')\, d\vec{l}'$$

$$= -\hat{r} \times \int_{S_c} d\vec{a}'$$

$$\vec{A}_{dip}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi r^2}\, \hat{r} \times I \int_{S_c} d\vec{a}' = -\frac{\mu_0}{4\pi r^2}\, \hat{r} \times \vec{m}$$

$$\boxed{\vec{A}_{dip}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{r}}{r^2}}$$

SOLUCION : PROBLEMA #4

Tomemos $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

con $\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$; $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

$$\Rightarrow \vec{F} = q\left\{ -\nabla_r V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}) \right\}$$

$$F_i = q\left\{ -\partial_i V - \partial_t A_i + \epsilon_{ijk} v_j (\nabla \times \vec{A})_k \right\}$$

$$= q\left\{ -\partial_i V - \partial_t A_i + \epsilon_{ijk} v_j \epsilon_{klm} \partial_l A_m \right\}$$

$$= q\left\{ -\partial_i V - \partial_t A_i + \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} v_j \partial_l A_m \right\}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

$$F_i = q\left\{ -\partial_i V - \partial_t A_i + (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) v_j \partial_l A_m \right\}$$

$$\boxed{F_i = q\left\{ -\partial_i V - \partial_t A_i + v_j \partial_i A_j - v_j \partial_j A_i \right\}}$$

Eso por este lado

Ahora evaluemos $\vec{F} = -\nabla_{\vec{r}} U + \frac{d}{dt}(\nabla_{\vec{v}} U)$

$$U = qV - q\vec{v} \cdot \vec{A}$$

$$-\nabla_{\vec{r}} U = -q \nabla_{\vec{r}} (V - \vec{v}\cdot\vec{A})$$

$$\left[-q \nabla_{\vec{r}} (V - \vec{v}\cdot\vec{A})\right]_i = -q \left\{ \partial_i V - \partial_i (v_j A_j) \right\}$$

$$= -q \left\{ \partial_i V - v_j \partial_i A_j \right\}$$

↳ v_j es una variable dinámica

$$\nabla_{\vec{v}} U = \nabla_{\vec{v}} \left\{ qV - q\vec{v}\cdot\vec{A} \right\}$$

$$= -q \nabla_{\vec{v}} (\vec{v}\cdot\vec{A})$$

$$\left[\nabla_{\vec{v}} U\right]_i = -q\, \partial_{v_i} (v_j A_j) = -q A_j \delta_{ij} = -q A_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\nabla_{\vec{v}} U\right)_i = -q \frac{dA_i}{dt} = -q \left\{ \partial_t A_i + (\partial_j A_i) \underbrace{\frac{dx_j}{dt}}_{v_j} \right\}$$

$$= -q\, \partial_t A_i - q\, v_j \partial_j A_i$$

$$F_i = -(\nabla_{\vec{r}} U)_i + \left[\frac{d}{dt}(\nabla_{\vec{v}} U)\right]_i$$

$$\hookrightarrow \boxed{F_i = q \left\{ -\partial_i V - \partial_t A_i + v_j \partial_i A_j - v_j \partial_j A_i \right\}}$$

Si comparamos las dos expresiones para F_i nos damos cuenta de que son iguales

$$\Rightarrow \vec{F} = q\left\{ \vec{E} + \vec{v}\times\vec{B} \right\} = -\nabla_{\vec{r}} U + \frac{d}{dt}(\nabla_{\vec{v}} U)$$

con $U = qV - q\vec{v} \cdot \vec{A}$

$\Rightarrow$ La energía potencial de interacción entre una carga eléctrica q y un campo electromagnético es

$$\boxed{U = qV - q\vec{v} \cdot \vec{A}}$$

Solución

Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias

Doctorado en Ciencias-Física.
Examen de Conocimientos
Mecánica Clásica.
Departamento de Física.
Universidad de los Andes 2022-II
Duración: 3 horas.

Instrucciones:

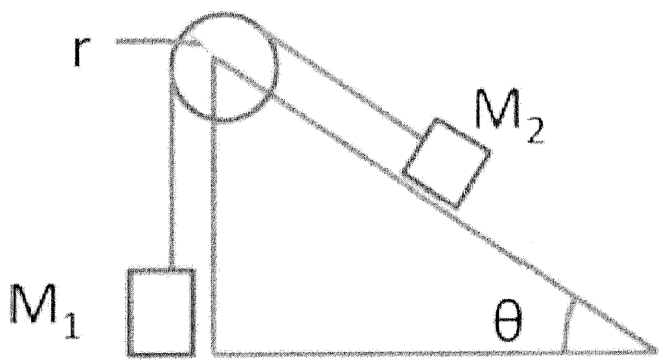
- El examen tiene una duración de 3:00 horas y se debe terminar a las 17:00 horas.
- Usted debe responder todos los ejercicios a mano explicando claramente el procedimiento que sigue, de no ser así no se dará puntaje.
- El examen se debe desarrollar manera individual. Usted no debe comunicarse con otros estudiantes ni utilizar ningún documento, libro o apuntes, diferente a las que se le están asignando en el enunciado. Se proporcionan algunas fórmulas que pueden ser útiles para el desarrollo de este examen.
- Firmando el examen usted admite que entiende que omitir las reglas estipuladas para este examen será considerado un abuso a la confianza que se ha puesto en usted y tendrá las consecuencias estipuladas en el reglamento general de estudiantes de doctorado de la Universidad

FORMULAS

Coordenadas Generalizadas	q, Q	
Velocidades generalizadas	$\dot{q}, \dot{Q}$	$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}$
Momentos generalizados	p, P	$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$; $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial q}$
Lagrangiano	L	$L(q, \dot{q}, t) = T(\dot{q}) - V(q, \dot{q}, t)$
Hamiltoniano	$H = T + V$	$H(q, p, t) = p.\dot{q} - L(q, \dot{q}, t)$
Acción, Hamiltoniano, Lagrangiano	$S = \int_{t_1}^{t_2} (p\dot{x} - H)dt =$ $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt =$	$S = \int_{t_1}^{t_2} (p\dot{x} - H)dt$ $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt$
Función generatriz Transformaciones canónicas	$F_1(q, Q, t)$ $F_2(q, P, t)$ $F_3(p, Q, t)$ $F_4(p, P, t)$	$p = \frac{\partial F_1}{\partial q}$ $\quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}$ $p = \frac{\partial F_2}{\partial q}$ $\quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$ $q = -\frac{\partial F_3}{\partial p}$ $\quad P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q}$ $q = -\frac{\partial F_4}{\partial p}$ $\quad Q = \frac{\partial F_1}{\partial P}$

Departamento de Física
Cra. 1No. 18 A – 10, Bloque Ip, primer piso, Bogotá, Colombia | A.A. 4976 – 12340 | Tel.:(57-1) 3324500 | Conm: (57-1) 3394949/99 Ext. 2730 | Fax: (57-1) 3324516
http://fisica.uniandes.edu.co | e-mail:inffisic@uniandes.edu.co

1. ***(20 Puntos)*** Considere un plano inclinado fijo. Dos bloques de masa M_1 y M_2 están unidos por una cuerda que pasa sobre una polea de radio r y momento de inercia I, como se muestra en la figura
(a) Encuentre el torque neto que actúa sobre el sistema.
(b) Encuentre el momento angular total del sistema alrededor del centro de la polea cuando los bloques se mueven con velocidad v.
(c) Calcule la aceleración de los bloques.



Solución

a) Supondremos que el bloque M_1 cae entonces:

$$\tau = M_1 gr - M_2 g\, r sen\theta = (M_1 - M_2 sen\theta)gr$$

b) Los momentos angulares de la polea (L_p), el de la masa M_1 (L_1) y la masa 2 (L_2), son:

$$L_p = I\omega = \frac{Iv}{r} \quad ; \; L_1 = M_1 vr \quad ; \; L_2 = M_2 v\, r$$

Por lo tanto, el momento angular total es

$$L = L_p + L_1 + L_2 = vr(M_1 + M_2 + \frac{I}{r^2})$$

c) sabemos que

$$\tau = \frac{dL}{dt} = \frac{dv}{dt} r(M_1 + M_2 + \frac{I}{r^2}) = (M_1 - M_2 sen\theta)gr$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{(M_1 - M_2 sen\theta)g}{M_1 + M_2 + \frac{I}{r^2}}$$

2. ***(20 Puntos)*** Un objeto de masa m es lanzado verticalmente hacia arriba. En presencia de una fuerte resistencia del aire, el tiempo de ascenso es t_1, y no es igual al tiempo de descenso, t_2. De manera similar, la velocidad inicial que es u, con la que se lanza el cuerpo no es igual a la velocidad final que es v, con la que el objeto regresa. Suponiendo que la fuerza de la resistencia del aire es F y es constante, calcule:
(a) t_2/t_1
(b) v/u

Solución

a) Cuando el objeto va subiendo

$$ma_s = -(mg + F) \to a_s = -(g + \frac{F}{m})$$

$$v_s = 0 = u + a_s t = u - \left(\frac{F}{m} + g\right) t_s \to t_s = \frac{u}{\frac{F}{m} + g}$$

$$v_s^2 = 0 = u^2 + 2a_s h \to u = \sqrt{2h(\frac{F}{m} + g)}$$

$$t_s = \sqrt{\frac{2h}{\frac{F}{m} + g}}$$

Cuando el objeto va bajando

$$ma_b = (mg - F) \to a_b = \left(g - \frac{F}{m}\right)$$

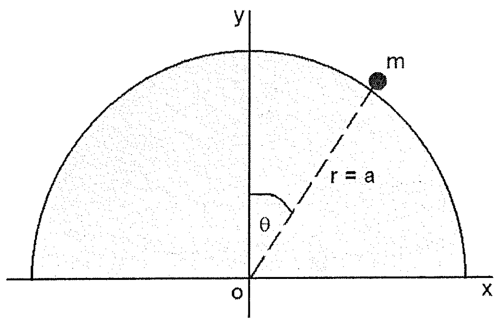
$$v^2 = 2a_b h = 2h\left(g - \frac{F}{m}\right)$$

$$t_b = \frac{v}{a_b} = \frac{\sqrt{2h\left(g - \frac{F}{m}\right)}}{\left(g - \frac{F}{m}\right)} = \sqrt{\frac{2h}{\left(g - \frac{F}{m}\right)}}$$

$$\frac{t_b}{t_s} = \sqrt{\frac{\left(g + \frac{F}{m}\right)}{\left(g - \frac{F}{m}\right)}} \quad ; \quad \frac{v}{u} = \sqrt{\frac{\left(g - \frac{F}{m}\right)}{\left(g + \frac{F}{m}\right)}}$$

Departamento de Física
Cra. 1No. 18 A – 10, Bloque Ip, primer piso, Bogotá, Colombia | A.A. 4976 – 12340 | Tel.:(57-1) 3324500 | Conm: (57-1) 3394949/99 Ext. 2730 | Fax: (57-1) 3324516
http://fisica.uniandes.edu.co | e-mail:inffisic@uniandes.edu.co

3. ***(30 Puntos)*** Una partícula de masa m comienza a moverse desde el reposo, partiendo de la parte más alta de la mitad de una esfera fija y lisa de radio a. Encuentre las fuerzas generalizadas de ligadura y el ángulo en el cual la partícula abandona la superficie de la semiesfera.



Solución:

La ecuación que va a permitir calcular la ligadura es

$$f(r) = r - a = 0$$

El lagrangiano, teniendo como referencia la parte mas baja de la semiesfera

$$L = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - mgrcos\theta$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = \lambda\frac{\partial f}{\partial r} \rightarrow m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mg\ cos\theta - \lambda = 0$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \lambda\frac{\partial f}{\partial \theta} \rightarrow r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - g\ sen\theta = 0$$

Aplicando la ecuación de ligadura

$$-ma\dot{\theta}^2 + mg\ cos\theta - \lambda = 0$$
$$a\ddot{\theta} - g\ sen\theta = 0$$

A partir de la ultima ecuación se tiene que

$$\ddot{\theta} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \frac{g}{a}\ sen\theta$$

$$\int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\ d\dot{\theta} = \frac{g}{a}\int_0^{\theta} sen\theta\ d\theta$$
$$\frac{1}{2}\ \dot{\theta}^2 = -\frac{g}{a}cos\theta + \frac{g}{a}$$

$$-ma\frac{2g}{a}(1-cos\theta)+mg\,cos\theta-\lambda=0$$
$$\lambda=mg(3cos\theta-2)$$

Lo cual quiere decir que las fuerzas de ligadura son

$$Q_r^{lig}=\lambda\frac{\partial f}{\partial r}=mg(3cos\theta-2)$$
$$Q_\theta^{lig}=\lambda\frac{\partial f}{\partial \theta}=0$$

La partícula se despega de la semiesfera cuando $Q_r^{lig}=0\rightarrow \text{arccos}\left(\frac{2}{3}\right)$

Departamento de Física
Cra. 1No. 18 A – 10, Bloque Ip, primer piso, Bogotá, Colombia | A.A. 4976 – 12340 | Tel.:(57-1) 3324500 | Conm: (57-1) 3394949/99 Ext. 2730 | Fax: (57-1) 3324516
http://fisica.uniandes.edu.co | e-mail:inffisic@uniandes.edu.co

4. ***(30 Puntos)*** Una partícula de masa m esta sujeta a la interacción con un potencial armónico, de tal forma que su hamiltoniano, puede ser escrito como

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} \quad ; \quad Q = \tan^{-1}\left(\frac{q}{p}\right)$$

Suponga que hace la siguiente transformación

$$p = g(P)cosQ \quad ; \quad q = \frac{g(P)}{m\omega} sen\, Q$$

a) Calcular quien es $g(P)$ para que esta transformación sea canónica.
b) Calcule el hamiltoniano transformado.
c) Dibuje el espacio de fase para el hamiltoniano original y para el transformado.
d) Demuestre cuales son las soluciones para $P, Q, p\ y\ q$

Solución:

a) Primero miremos como queda transformado el hamiltoniano, al cual llamaremos K

$$K = \frac{g^2(P)\cos^2 Q}{2m} + \frac{m^2\omega^2 g^2(P)\,\mathrm{sen}^2\, Q}{2m^2\omega^2} = \frac{g^2(P)}{2m}$$

De las formulas entregadas se usará la transformación asociada a F_1 (q,Q,t) con q y Q como variable independientes

$$p = m\omega q cot\, Q$$

Para que F_1 sea canónica tiene que satisfacer

$$p(q,Q) = \frac{\partial F_1}{\partial q} \qquad P(q,Q) = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega q cot\, Q \quad \rightarrow \quad F_1 = \frac{m\omega}{2} q^2 cotQ$$

$$P(q,Q) = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m\omega}{2} q^2 \frac{1}{sen^2 Q} \rightarrow q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} senQ$$

$$p = m\omega q\ cotQ = \sqrt{2Pm\omega}\, cosQ$$

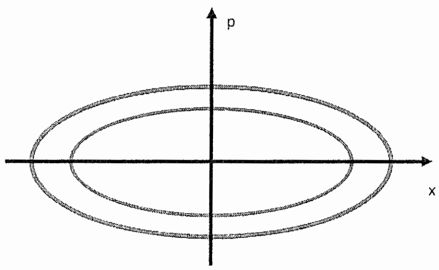
$$q = \frac{g(P)}{m\omega} sen\, Q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} senQ \quad \rightarrow \quad g(P) = \sqrt{2Pm\omega}$$

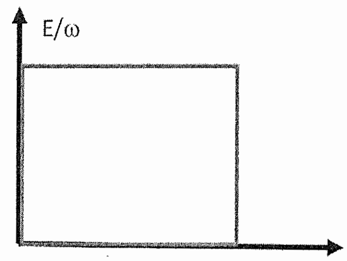
b) Con la función g(P) conocida el Hamiltoniano transformado K es:

Universidad de
los Andes
Facultad de Ciencias

$$K = \frac{2Pm\omega}{2m} = \omega P$$

c)El espacio de fase para el no-trasformado corresponde al de una elipse y para el transformado a un rectángulo





d) Dado que siguen ya las transformaciones canónicas tenemos que

$$K = \omega P = H = E$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0 \to P = cte. \, Coordenada\ ciclica$$

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \omega. \to Q = \omega t + \phi$$

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} senQ = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} sen(\omega t + \phi)$$

$$p = \sqrt{2Pm\omega}\, cosQ = \sqrt{2mE}\, cos(\omega t + \phi)$$

Departamento de Física
Cra. 1No. 18 A – 10, Bloque Ip, primer piso, Bogotá, Colombia | A.A. 4976 – 12340 | Tel.:(57-1) 3324500 | Conm: (57-1) 3394949/99 Ext. 2730 | Fax: (57-1) 3324516
http://fisica.uniandes.edu.co | e-mail:inffisic@uniandes.edu.co

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES – DEPARTAMENTO DE FÍSICA
EXAMEN DE CONOCIMIENTOS - 2022-1 MECÁNICA CUÁNTICA Sobre 100 puntos

Instrucciones:

- El examen tiene una duración de 3:00 horas y se debe terminar a las 17:00 horas.
- Usted debe responder todos los ejercicios a mano explicando claramente el procedimiento que sigue, de no ser así no se dará puntaje.
- El examen se debe desarrollar manera individual. Usted no debe comunicarse con ningun@ de sus compañer@s ni utilizar ningún documento, libro o apuntes, diferente a las que se le están asignando en el enunciado. Al final de este documento hay algunas fórmulas que pueden ser útiles para el desarrollo de este examen.
- Firmando el examen usted admite que entiende que omitir las reglas estipuladas para este examen será considerado un abuso a la confianza que se ha puesto en usted y tendrá las consecuencias estipuladas en el reglamento general de estudiantes de doctorado de la Universidad.

1. (20 puntos) La función de onda de un par de electrones ligados se puede escribir como $\psi(\vec{r}_1, \sigma_1, \vec{r}_2, \sigma_2)$, donde $\vec{r}_i$ es la posición y σ_i el espín del electrón *i*, donde *i*=1, 2.

a. Aplique el operador de permutación, P_{12}, a la función de onda del par de electrones ligados (el cual intercambia las dos partículas), y explique la diferencia entre el resultado y la función de onda $\psi(\vec{r}_1, \sigma_1, \vec{r}_2, \sigma_2)$ original.

b. Si la función de onda del par de electrones puede separarse en sus partes espaciales y de espín como $\psi(\vec{r}_1, \sigma_1, \vec{r}_2, \sigma_2) = \phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\chi(\sigma_1, \sigma_2)$, y dado su resultado de a, enumere las opciones posibles que deben cumplir las funciones $\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ y $\chi(\sigma_1, \sigma_2)$ al aplicar el operador de permutación.

c. Cuantos tipos de funciones de onda de espín $\chi(\sigma_1, \sigma_2)$ simétricas ante la operación de permutación se puede construir para el par de electrones? (escríbalas en términos de las distintas posibilidades de estados de espín: $\chi(\uparrow,\uparrow) = |\uparrow\uparrow\rangle$, $\chi(\uparrow,\downarrow) = |\uparrow\downarrow\rangle$, $\chi(\downarrow,\uparrow) = |\downarrow\uparrow\rangle$, $\chi(\downarrow,\downarrow) = |\downarrow\downarrow\rangle$. Demuestre que estas funciones de onda de espín simétricas son eigenfunciones del operador de espín total, $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S_1} + \boldsymbol{S_2}$, y de la componente S_z del espín total, y encuentre los eigenvalores correspondientes.

d. Cuantos tipos de funciones de onda de espín $\chi(\sigma_1, \sigma_2)$ antisimétricas ante la operación de permutación se puede construir para el par de electrones? (escríbalas en términos de las distintas posibilidades de estados de espín). Demuestre que estas funciones de onda de espín antisimétricas son eigenfunciones del operador de espín total, $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S_1} + \boldsymbol{S_2}$, y de la componente S_z del espín total, y encuentre los eigenvalores correspondientes.

e. Reescriba las funciones de onda de espín total de los numerales c y d, pero ahora en la notación $|s, m\rangle$, donde *s* y *m* son tales que $\boldsymbol{S}^2|s, m\rangle = s(s+1)\hbar^2|s, m\rangle$ y $S_z|s, m\rangle = m\hbar|s, m\rangle$.

2. (20 puntos) Una partícula cargada, con masa *m* y carga +*q*, está confinada a moverse en un anillo de radio *R*, sobre el plano *xy*. La posición de la partícula está descrita por su coordenada angular θ sobre el anillo.

a. Escriba el Hamiltoniano para esta partícula, en términos de las coordenadas polares (asuma que la intensidad del potencial de confinamiento es muy pequeño comparado con la energía cinética de la partícula, y por ende es despreciable).

b. Encuentre los eigenestados y eigenvalores para este Hamiltoniano.

c. Ahora suponga que la partícula se somete a un campo eléctrico $\vec{E} = \varepsilon\hat{x}$ en la dirección *x*, de modo que este actúa como una perturbación *V* al Hamiltoniano, donde *V* está dado por $V = q\varepsilon x = q\varepsilon R\cos\theta$. Calcule las correcciones a la energía del estado base, hasta segundo orden en el campo ε.

d. ¿Qué tan pequeño debe ser el campo para que esta aproximación a segundo orden sea válida?

3. **(30 puntos)** Se define un estado coherente como la superposición de estados con todos los posibles números de partículas posibles, es decir:

$$|\alpha\rangle = C\left(|0\rangle + \frac{\alpha}{1!^{1/2}}|1\rangle + \frac{\alpha^2}{2!^{1/2}}|2\rangle + \frac{\alpha^3}{3!^{1/2}}|3\rangle + \cdots\right)$$

Donde α es un número complejo, y $|n\rangle$ es el estado que describe al sistema con un número de partículas *n* bien definido. Suponga que los operadores de creación y aniquilación $\hat{a}^+$ y $\hat{a}$ están definidos de forma estándar como: $\hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$; $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$; $\hat{a}^+\hat{a}|n\rangle = \hat{n}|n\rangle = n|n\rangle$; y además $[\hat{a}^+, \hat{a}] = 1$

a. Justifique (matemáticamente) porqué un estado coherente no tiene un número de partículas bien definido.

b. Demuestre que el valor de la constante de normalización de la función de onda coherente es $C = e^{-|\alpha|^2/2}$

c. Demostrar que la función de onda del estado coherente puede ser escrita también como $|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\exp(\alpha\hat{a}^+)|0\rangle$

d. Demostrar que $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, y que $\langle\alpha|\hat{a}^+\hat{a}|\alpha\rangle = |\alpha|^2$

e. Demostrar que $\frac{\Delta n}{\langle\hat{n}\rangle} \sim \frac{1}{\sqrt{\langle\hat{n}\rangle}}$, donde $\Delta n = \sqrt{\langle\hat{n}^2\rangle - \langle\hat{n}\rangle^2}$.

f. Indique porqué, a partir de la ecuación del punto e, tendría sentido usar una función de onda coherente para describir un sistema de muchos cuerpos con un número bien definido de partículas ($N \sim 10^{23}$), a pesar que un estado coherente no tiene un número definido de partículas.

4. **(30 puntos)** Considere un electrón libre, en presencia de un campo magnético independiente del tiempo, $\vec{B} = B\hat{z}$.

a. Escriba el Hamiltoniano para este sistema, y posteriormente, la ecuación de Schrödinger que rige su comportamiento. Utilice el gauge de Landau para introducir el efecto del campo magnético ($\vec{A} = (0, Bx, 0)$).

b. Demuestre que las componentes del momento lineal en las direcciones *y* y *z* son constantes de movimiento en este problema.

c. Proponga una solución del tipo $\psi(x,y,z) = \phi(x)Y(y)Z(z)$. Escriba las soluciones para las funciones $Y(y)$ y $Z(z)$, dada su respuesta del punto anterior (por simplicidad, considere únicamente una dirección de propagación para el electrón, en *y* y *z*).

d. Teniendo en cuenta sus soluciones del numeral anterior, demuestre que la ecuación para $\phi(x)$ es equivalente a la de un oscilador armónico cuántico. Escriba la expresión para la frecuencia angular del oscilador, o frecuencia de ciclotrón, ω_c.

e. Escriba la solución para la energía total del electrón en presencia de un campo magnético. Para un k_z dado, ¿cómo aumenta la distancia entre los niveles de energía con el campo magnético?

f. Escriba la solución para $\phi(x)$, y con esto, escriba una expresión para la solución total del sistema, $\psi(x,y,z)$ (no necesita encontrar la constante de nmormalización).

g. Demuestre que las órbitas del electrón en el plano *x-y* **del espacio de momento** son circulares, y determine el radio de estas órbitas. (Ayuda: A partir de la expresión para la energía total, y comparando esta con la de un electrón libre, escriba una expresión para $k_x^2 + k_y^2$).

FÓRMULAS DE UTILIDAD

Operadores de momento angular

$\boldsymbol{S}^2|s,m\rangle = s(s+1)\hbar^2|s,m\rangle$

$S_z|s,m\rangle = m\hbar|s,m\rangle$

$[S_i, S_j] = \sum_k i\hbar\varepsilon_{ijk}S_k$

$S_\pm = S_x \pm iS_y$

$S_\pm|s,m\rangle = \sqrt{(s\mp m)(s\pm m+1)}\hbar|s,m\pm 1\rangle$

Perturbaciones independientes del tiempo

Sin perturbación: $H^0|n^0\rangle = E_n^0|n^0\rangle$

Perturbación → H^1, de modo que $H = H^0 + H^1$

Correcciones a la energía, primer orden: $E_n^1 = \langle n^0|H^1|n^0\rangle$

Correcciones a la energía, segundo orden: $E_n^2 = \sum_{m\neq n}\frac{|\langle n^0|H^1|m^0\rangle|^2}{E_n^0 - E_m^0}$

Correcciones a los estados, primer orden: $|n\rangle = |n^0\rangle + \sum_{m\neq n}\frac{|m^0\rangle\langle m^0|H^1|n^0\rangle}{E_n^0 - E_m^0}$

Coordenadas polares: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

Para los operadores A y B: $e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$

Ecuación de un oscilador armónico cuántico 1D: $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \left(\frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)\psi(x) = E\psi(x)$

Donde $E = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$

1

2 partículas de espín 1/2.

a) $\Psi(\vec{r}_1, \sigma_1, \vec{r}_2, \sigma_2)$

$$P_{12}\Psi(\vec{r}_1, \sigma_1, \vec{r}_2, \sigma_2) = \Psi(\vec{r}_2, \sigma_2, \vec{r}_1, \sigma_1) = -\Psi(\vec{r}_1, \sigma_1, \vec{r}_2, \sigma_2)$$

$\Downarrow$

Ya que al ser dos fermiones la función de onda total debe ser antisimétrica ante el intercambio de las dos partículas.

b) $\Psi(\vec{r}_1, \sigma_1, \vec{r}_2, \sigma_2) = \phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\chi(\sigma_1, \sigma_2)$

si $\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ es simétrica

$\hookrightarrow$ $\chi(\sigma_1, \sigma_2)$ debe ser antisimétrica para que la función de onda total sea antisimétrica

si $\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ es antisimétrica

$\hookrightarrow$ $\chi(\sigma_1, \sigma_2)$ debe ser simétrica.

c) $\chi(\sigma_1, \sigma_2)$ simétricas:
$$\begin{cases} |\uparrow\uparrow\rangle \\ |\downarrow\downarrow\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \end{cases}$$

d) $\chi(\sigma_1, \sigma_2)$ antisimétricas: $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$

c,d) $S = S_1 + S_2 \longrightarrow S^2 = (S_1 + S_2)^2 = S_1^2 + S_2^2 + \underline{2 S_1 \cdot S_2}$

ya que $[S_1, S_2] = 0$

$$S_1 \cdot S_2 = S_{1x}S_{2x} + S_{1y}S_{2y} + S_{1z}S_{2z}$$
$$= S_{1z}S_{2z} + \frac{1}{2}(S_{1+}S_{2-} + S_{1-}S_{2+})$$

$$S^2|\uparrow\uparrow\rangle = S_1^2|\uparrow\uparrow\rangle + S_2^2|\uparrow\uparrow\rangle + 2S_1\cdot S_2|\uparrow\uparrow\rangle$$
$$= 2*\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\hbar^2|\uparrow\uparrow\rangle + 2\cdot S_{1z}S_{2z}|\uparrow\uparrow\rangle + \phi$$
$$= \frac{3}{2}\hbar^2|\uparrow\uparrow\rangle + \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\hbar^2}{2}|\uparrow\uparrow\rangle$$
$$= 2\hbar^2|\uparrow\uparrow\rangle$$ → eigenvector con eigenvalor de $S \to \sqrt{2}\,\hbar$

$$S^2|\downarrow\downarrow\rangle = \frac{3}{2}\hbar^2|\downarrow\downarrow\rangle + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\hbar^2|\downarrow\downarrow\rangle + \phi$$
$$= 2\hbar^2|\downarrow\downarrow\rangle$$ → eigenvector con eigenvalor de $S \to \sqrt{2}\hbar$

$$S^2|\uparrow\downarrow\rangle = \frac{3}{2}\hbar^2|\uparrow\downarrow\rangle + 2S_{1z}S_{2z}|\uparrow\downarrow\rangle + S_{1-}S_{2+}|\uparrow\downarrow\rangle$$
$$= \frac{3}{2}\hbar^2|\uparrow\downarrow\rangle + 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\hbar^2|\uparrow\downarrow\rangle + \sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1\right)}\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\left(\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)+1\right)} \times \hbar^2 \times |\downarrow\uparrow\rangle$$

$$= 1\cdot\hbar^2|\uparrow\downarrow\rangle + \hbar^2|\downarrow\uparrow\rangle$$

De igual forma: $S^2|\downarrow\uparrow\rangle = \hbar^2|\downarrow\uparrow\rangle + \hbar^2|\uparrow\downarrow\rangle$

Asi que:

$$S^2\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(S^2|\uparrow\downarrow\rangle + S^2|\downarrow\uparrow\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hbar^2\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle\right)$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2}}\hbar^2\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$
$$= 2\hbar^2\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right)\right]$$ → eigenvector con eigenvalor de $S \to \sqrt{2}\,\hbar$

$$S^2\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)\right] = \frac{\hbar^2}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle\right)$$
$$= 0$$ → eigenvector con eigenvalor de $S \to 0$.

$S = S_1 + S_2 \rightarrow S_z = S_{z1} + S_{z2}$

$S_z|\uparrow\uparrow\rangle = (S_{z1} + S_{z2})|\uparrow\uparrow\rangle = \left(\frac{1}{2}\hbar + \frac{1}{2}\hbar\right)|\uparrow\uparrow\rangle = \hbar|\uparrow\uparrow\rangle$

↳ eigenvector con eigenvalor $\hbar$

$S_z|\downarrow\downarrow\rangle = -\hbar|\downarrow\downarrow\rangle \rightarrow$ eigenvector con eigenvalor $-\hbar$

$S_z\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle \pm |\downarrow\uparrow\rangle)\right) = \emptyset \rightarrow$ eigenvalor $\emptyset$ para ambas eigenfunciones

e) Simétricos, en notación $|s, m\rangle$

para los eigenvalores de $S \rightarrow \sqrt{2}\hbar = \sqrt{s(s+1)}\hbar \rightarrow s = 1$

$0\hbar = \sqrt{s(s+1)}\hbar \rightarrow s = 0$

entonces:

$|\uparrow\uparrow\rangle \longrightarrow |1, 1\rangle$

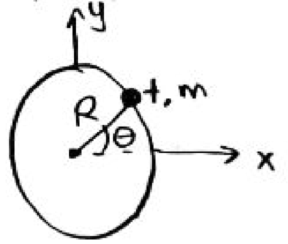
$|\downarrow\downarrow\rangle \rightarrow |1, -1\rangle$

$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \longrightarrow |1, 0\rangle$

para la antisimétrica:

$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \longrightarrow |0, 0\rangle$

② PARTÍCULA CARGADA EN UN ANILLO.



a) $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$ → en coordenadas polares.

b) $H\Psi = E\Psi$

$$-\frac{\hbar^2}{2mR^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2} = E\Psi \rightarrow \frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2} + \frac{2mR^2E}{\hbar^2}\Psi = 0$$

soluciones → $\Psi_+ = A_+ e^{ik\theta}$

$\Psi_- = A_- e^{-ik\theta}$

pero: $\Psi_\pm(\theta) = \Psi_\pm(\theta + 2\pi)$

$$A_\pm e^{\pm ik\theta} = A_\pm e^{\pm ik\theta \pm ik2\pi} \rightarrow e^{\pm i\cdot 2\pi k} = 1$$

↳ $k = n$

con $n = 0, 1, 2, \ldots$

Eigenestados:

$\Psi_\pm = A_\pm e^{\pm in\theta}$ (ó de forma equivalente: $\Psi_+ = A\cos(n\theta)$, $\Psi_- = B\,\mathrm{sen}(n\theta)$)

Energías o eigenvalores:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2} = (\pm in)^2\Psi = -n^2\Psi \rightarrow -n^2\Psi + \frac{2mR^2E}{\hbar^2}\Psi = 0$$

↳ $\boxed{E = \frac{\hbar^2}{2mR^2}n^2}$

↳

c) $V = qEx = qER\cos\theta$ → perturbación

Estado base: $E(n=0) = 0 = E_0 \rightarrow \Psi = \Psi_+ + \Psi_-$

$\Psi_0 = A_+ + A_- = 2A \rightarrow \int_0^{2\pi} (2A)^2 d\theta = 1 \rightarrow 4A^2 \cdot 2\pi = 1$

$\hookrightarrow A = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \rightarrow \Psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

correcciones a la energía:

* 1er orden:

$$E_0^{(1)} = \langle 0 | qER\cos\theta | 0 \rangle = qER \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cdot \cos\theta \, d\theta$$

$$= \frac{qER}{2\pi} \operatorname{sen}\theta \Big|_0^{2\pi} = \emptyset$$

* 2do orden:

$$E_0^{(2)} = \sum_n \frac{\langle 0|V|n\rangle\langle n|V|0\rangle}{E_0^{(0)} - E_n^{(0)}} = \sum_n \frac{|\langle n|V|0\rangle|^2}{0 - E_n^{(0)}}$$

donde $|n\rangle = A_+ e^{in\theta} + A_- e^{-in\theta}$, $E_n^{(0)} = \frac{\hbar^2}{2mR^2} n^2$

pero $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$ $\qquad A_+ = A_- = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$

$$\langle n | \frac{V}{qER} | 0 \rangle = \langle n | \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) | 0 \rangle$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta})(A_+^* e^{-in\theta} + A_-^* e^{in\theta}) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \underbrace{(e^{-i(n-1)\theta} + e^{i(n+1)\theta} + e^{-i(n+1)\theta} + e^{i(n-1)\theta})}_{\text{integral es } \neq 0 \text{ si } e^x = 1 \rightarrow x = 0} d\theta$$

$\hookrightarrow \boxed{\text{solo si } n=1}$

$$\langle 1 | \frac{V}{qER} | 0 \rangle = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} (1 + \emptyset + 1 + \emptyset) d\theta = \frac{1}{\cancel{4}\sqrt{2\cancel{\pi}}} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|\langle n | \frac{V}{qER} | 0 \rangle|^2 = \frac{1}{2} \delta_{n,1}$$

con esto.

$$E_0^{(2)} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{-\frac{\hbar^2}{\cancel{2}mR^2} 1^2} \cdot q \epsilon R = -\frac{q m R^3}{\hbar^2} \varepsilon$$

$$\boxed{E_0 = -\frac{mR^3}{\hbar^2} q \varepsilon}$$

→ Energía del estado base con correcciones a 2do orden.

d) ε debe ser tal que $\Delta E \ll |E_0^{(0)} - E_1^{(0)}|$ $\Big\}$ $\frac{mR^3}{\hbar^2} q \varepsilon < \frac{\hbar^2}{2mR^2} \Rightarrow \varepsilon < \frac{\hbar^4}{2m^2 q R^5}$

③ ESTADOS COHERENTES

a) $|\alpha\rangle$ no es eigenfunción de $\hat{n}$ $\rightarrow \hat{n}|\alpha\rangle = C\left(0 + \frac{\alpha}{\sqrt{1!}} \cdot 1|1\rangle + \frac{\alpha^2}{\sqrt{2!}} \cdot 2|2\rangle + \cdots\right) \neq D \cdot |\alpha\rangle$

b) $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$

$$1 = |C|^2\left(1 + \frac{|\alpha|^2}{1!} + \frac{(|\alpha|^2)^2}{2!} + \frac{(|\alpha|^2)^3}{3!} + \cdots\right) = |C|^2 e^{|\alpha|^2}$$

$$C = e^{-|\alpha|^2/2}$$

c) $$|\alpha\rangle = C\left\{|0\rangle + \frac{\alpha}{\sqrt{1!}}\frac{\hat{a}^+}{\sqrt{1}}|0\rangle + \frac{\alpha^2}{\sqrt{2!}}\frac{\hat{a}^+}{\sqrt{2}}\frac{\hat{a}^+}{\sqrt{1}}|0\rangle + \cdots\right\}$$

$$= e^{-|\alpha|^2/2}\left\{1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2\hat{a}^{+2}}{2!} + \cdots\right\}|0\rangle$$

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha\hat{a}^+}|0\rangle$$

d) $$\hat{a}|\alpha\rangle = C\left\{\hat{a}|0\rangle + \frac{\alpha}{\sqrt{1!}}\hat{a}|1\rangle + \frac{\alpha^2}{\sqrt{2!}}\hat{a}|2\rangle + \frac{\alpha^3}{\sqrt{3!}}\hat{a}|3\rangle + \cdots\right\}$$

$$= C\left\{\emptyset + \frac{\alpha}{\sqrt{1!}}\sqrt{1}|0\rangle + \frac{\alpha^2}{\sqrt{2!}} \cdot \sqrt{2}|1\rangle + \frac{\alpha^3}{\sqrt{3!}}\sqrt{3}|2\rangle + \cdots\right\}$$

$$= \alpha \cdot C\left\{|0\rangle + \frac{\alpha^2}{\sqrt{1!}}|1\rangle + \frac{\alpha^2}{\sqrt{2!}}|2\rangle + \cdots\right\}$$

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

$$\langle\alpha|a^+a|\alpha\rangle = (\langle\alpha|a^+) \times (a|\alpha\rangle) = (a|\alpha\rangle)^* \times (a|\alpha\rangle)$$

$$= \langle\alpha|\alpha^*\alpha|\alpha\rangle = |\alpha|^2\langle\alpha|\alpha\rangle$$

$$= |\alpha|^2$$

e) $$\frac{\Delta n}{\langle\hat{n}\rangle} = \frac{\sqrt{\langle\hat{n}^2\rangle - \langle\hat{n}\rangle^2}}{\langle\hat{n}\rangle}$$

pero $\langle\hat{n}\rangle = \langle\alpha|\hat{n}|\alpha\rangle = \langle\alpha|\hat{a}^+\hat{a}|\alpha\rangle$
$= |\alpha|^2$

$$\langle \hat{n}^2 \rangle = \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle = |\alpha|^2 \langle \alpha | a a^\dagger | \alpha \rangle$$
$$= |\alpha|^2 \langle \alpha | a^\dagger a + 1 | \alpha \rangle = |\alpha|^2 (|\alpha|^2 + 1)$$
$$= |\alpha|^4 + |\alpha|^2$$

$$\Delta n = \sqrt{|\alpha|^4 + |\alpha|^2 - |\alpha|^4} = |\alpha|$$

con esto: $\dfrac{\Delta n}{\langle \hat{n} \rangle} = \dfrac{|\alpha|}{|\alpha|^2} = \dfrac{1}{|\alpha|} = \dfrac{1}{\sqrt{\langle \hat{n} \rangle}}$

e) si $\langle \hat{n} \rangle \sim 10^{23}$ partículas $\rightarrow \dfrac{\Delta n}{\langle \hat{n} \rangle} \sim \dfrac{1}{\sqrt{10^{23}}} \sim 10^{-11}$

↳ dispersión en # de partículas es insignificante

↳ # partículas está definido prácticamente de forma "exacta".

(5) TUBOS DE LANDAU .

a) $H = \frac{p^2}{2m} + V$

el campo H se introduce a partir del potencial vector: $\Rightarrow \vec{A}$, donde $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

de la forma: $\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(\vec{p} - e\vec{A})^2$

ec. de schrödinger $\rightarrow$ $\mathcal{H}\Psi = E\Psi$

$$\frac{1}{2m}(\vec{p} - e\vec{A})^2\Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r})$$

en el gauge de landau: $\vec{A} = (0, Bx, 0)$

$$\frac{1}{2m}(\vec{p} - eBx\,\hat{y})^2\Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r})$$

b) Dado que $\mathcal{H}$ no depende explícitamente de las coordenadas y z; y por las ecuaciones de Hamilton $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dP_y}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = 0 \\ \frac{dP_z}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \text{P_y y P_z son constantes de mov.}$$

c) $\Psi(x,y,z) = \phi(x)\,Y(y)\,Z(z)$

dado que P_y, P_z son ctes de mov. $\rightarrow$ mov. en estos dir. puede ser descrito como ondas planas .

$Y(y) = e^{-ik_y y}$

$Z(z) = e^{-ik_z z}$

d) $\frac{1}{2m}(\vec{p}-eBx\hat{y})^2 = \left\{(p_x\hat{x} + (p_y - eBx)\hat{y} + p_z\hat{z})^2\right\}\frac{1}{2m}$

$$= \left\{(p_x^2+p_z^2) + (p_y - eBx)^2\right\}\frac{1}{2m}$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y} - eBx\right)^2$$

teniendo esto en cuenta, y aplicándolo a

$\psi(\vec{r}) = \phi(x)e^{ik_y y}e^{ik_z z}$

La ecuación resultante es:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + \frac{(eB)^2}{2m}\left[x + \frac{\hbar k_y}{eB}\right]^2\phi(x) = \left[E - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}\right]\phi(x)$$

↳ como la ecuación de un oscilador en x, con el origen del sistema de coordenadas corrido a $x_0 = -\frac{\hbar k_y}{eB}$.

donde $\frac{(eB)^2}{2m} = \frac{1}{2}m\omega^2 \rightarrow \omega_c = \frac{eB}{m} \rightarrow$ Frecuencia angular del oscilador.

Frec. de ciclotrón.

e) Energía del oscilador $E_{osc} = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega_c = \left[E - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}\right]$

Energía total del e^- en el campo $\rightarrow$ $E = E_{osc} + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$

$$E = (n+\tfrac{1}{2})\hbar\omega_c + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$$

$\Delta E = \hbar\omega_c = \frac{\hbar eB}{m}$ $\rightarrow$ distancia entre niveles crece linealmente.

f) $\phi_n(x) = C_n e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x-\frac{\hbar k_y}{eB}\right)^2} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\left(x-\frac{\hbar k_y}{eB}\right)\right)$

$\downarrow$ polinomios de Hermite.

$$\psi(\vec{r}) = C_n e^{-i(k_y y + k_z z)} e^{-\frac{(eB)^2}{2m\hbar}\left(x-\frac{\hbar k_y}{eB}\right)^2} H_n\left(\sqrt{\frac{eB}{\hbar}}\left(x-\frac{\hbar k_y}{eB}\right)\right)$$

g) $E = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega_c + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} \Rightarrow \frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2+k_y^2) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$

$\hookrightarrow \frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2+k_y^2) = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega$.

$k_x^2+k_y^2 = (n+\frac{1}{2})\frac{2m\omega}{\hbar}$ } ecuación de un círculo en el plano x-y, en el espacio de momento.

radio del círculo.

$$r_k^2 = (n+\tfrac{1}{2})\frac{2m}{\hbar}\frac{eB}{m}$$

$$r_k = \sqrt{(n+\tfrac{1}{2})\frac{2eB}{\hbar}}$$

distancia entre órbitas $\rightarrow r_i - r_j = \left\{\sqrt{(i+\tfrac{1}{2})} - \sqrt{(j+\tfrac{1}{2})}\right\}\sqrt{\frac{2eB}{\hbar}}$