Universidad de los Andes

Departamento de Física

Doctorado en Ciencias-Física
Examen de conocimientos
Electrodinámica

Semestre 2021-2
Duración: 3 horas

I. Un modelo del átomo de hidrógeno (20 puntos)

Consideremos el modelo siguiente para el átomo de hidrógeno: el protón es una partícula puntual de carga e situada en el origen O y a su alrededor hay una nube de carga eléctrica con simetria esférica que representa, en promedio sobre el tiempo, la carga del electrón. La densidad de carga de volumen de esta nube *no* es uniforme: en un punto M situado a una distancia r del protón esta dada por

$$\rho(r) = -e\frac{\alpha^3}{8\pi}\exp(-\alpha r) \tag{1.1}$$

en donde α es un cierto parámetro.

1. ¿Cuál es el sentido físico del parámetro α?
2. Calcular el campo eléctrico $\mathbf{E}$ creado por el átomo (próton + nube de carga) en un punto P situado a una distancia r del protón.
3. ¿Que tan realista es este modelo para el átomo de hidrógeno? Justifique su respuesta.

II. Campo y potencial de una barra (20 puntos)

Una barra delgada de largo L y grosor despreciable tiene una densidad lineal de carga variable que cambia linealmente entre sus extermos entre los valores 0 y λ_0.

1. Calcular el potencial eléctrico creado por esa barra en un punto arbitrario del espacio.
2. Calcular el campo électrico creado por esa barra en un punto arbitrario del espacio.

III. Ecuaciones de Maxwell en un conductor ideal (30 puntos)

Nos proponemos estudiar y resolver las ecuaciones de Maxwell en un medio conductor. Como es bien sabido en un conductor ideal no hay densidad de carga de volumen $\rho = 0$ y la corriente electrica $\mathbf{j}$ está relacionada con el campo eléctrico $\mathbf{E}$ a travez de la ley de Ohm

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}\,. \tag{3.1}$$

Vamos a trabajar en la aproximación de los campos casi-estáticos es decir que consideramos que las dimensiones del conductor son mucho mas pequeñas que la longitud de las ondas electromagneticas de manera que la propagación de los campos se hace "instantaneamente". Bajo esta aproximación se puede despreciar la corriente de despazamiento $\partial \mathbf{D}/\partial t$ frente a la corriente eléctrica $\mathbf{j}$ en la ecuación de Maxwell-Ampère para quedar con la ecuación de Ampère

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}\,. \tag{3.2}$$

Además consideramos que el conductor es un medio lineal, uniforme, isotropo, de permeabilidad μ y conductividad σ constantes.

1. Plantear las ecuaciones de Maxwell en este medio. Trabajar en la "gauge" de Coulomb, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Mostrar que $\mathbf{A}$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - D\Delta \mathbf{A} = \mathbf{C}\,. \tag{3.3}$$

   ¿Cuánto valen D y $\mathbf{C}$? ¿En qué otras ramas de la física aparece este tipo de ecuación?

2. A partir de ahora se supone $\mathbf{C} = 0$. ¿Qué significa esta suposición para el potencial eléctrico?

3. Para resolver la ecuación (3.3), con $\mathbf{C} = 0$, usamos la transformada de Fourier de $\mathbf{A}$ con respecto al espacio

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\, d^3\mathbf{k} \tag{3.4}$$

   Mostrar que para $t > 0$, $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, t)$ se puede expresar en función de condición inicial $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, 0)$ como

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, t) = \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, 0)\tilde{G}(\mathbf{k}, t) \tag{3.5}$$

   Que vale la función $\tilde{G}(\mathbf{k}, t)$?

4. Deducir de la pregunta anterior que $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ se puede expresar como un producto de convolución

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{A}(\mathbf{r}', 0) G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) d^3\mathbf{r}' \tag{3.6}$$

   en donde G es la transformada inversa de Fourier de $\tilde{G}$.

5. Calcular la función $G(\mathbf{r}, t)$.

IV. Campo de un hilo en movimiento paralelo a la dirección del hilo (30 puntos)

En un referencial inercial K' tenemos un hilo infinito en reposo en el eje x' ($y' = z' = 0$) con densidad lineal de carga λ_0 uniforme y sin densidad de corriente alguna ($\mathbf{j}' = 0$). En un referencial K el hilo se mueve con una velocidad constante $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{x}}$ paralela a la dirección del hilo.

1. Calcular el campo electromagnético creado por hilo en el referencial K'. Usando la transformación de Lorentz de los campos, calcular el campo eléctrico y magnético en el referencial K.

2. Escribir la densidad de corriente $\mathbf{j}'(\mathbf{r}', t')$ y de carga $\rho'(\mathbf{r}', t')$ en el referencial K' y en el referencial K ($\rho(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$).

3. Con la expresión de la densidad de corriente y carga en K obtenida en el punto anterior, justificar que se pueden usar las leyes de la electrostática y de la magnetostática en K para calcular los campos. Calcular entonces los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ en K y comparar con la respuesta del primer punto.

Apendice: Algunas formulas

- Ecuaciones de Maxwell (en unidades del sistema internacional)

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \tag{A.1}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{A.2}$$
$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j} \tag{A.3}$$
$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \tag{A.4}$$

- Relaciones constitutivas de un material isotrópico en el regimen de respuesta lineal

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \tag{A.5}$$
$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \tag{A.6}$$

- Transformadas de Fourier y producto de convolución:

  Sean $f(\mathbf{r})$ y $g(\mathbf{r})$ son dos funciones y $\tilde{f}(\mathbf{k}) = \mathcal{F}f(\mathbf{k})$ y $\tilde{g}(\mathbf{k}) = \mathcal{F}g(\mathbf{k})$ sus respectivas transformadas de Fourier

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\, d\mathbf{k} \tag{A.7}$$

  Definimos el producto de convolución de f y g como

$$(f * g)(\mathbf{r}) = \int f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') g(\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}' \tag{A.8}$$

  Tenemos entonces

$$(\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g) = \mathcal{F}(f * g) \tag{A.9}$$

- Integral Gaussiana: para $p > 0$ y $q \in \mathbb{C}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-px^2+qx}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{p}}\, e^{\frac{q^2}{4p}} \tag{A.10}$$

- Para un vector $\mathbf{a}$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \Delta \mathbf{a} \tag{A.11}$$

- La transformación de Lorentz para un vector contravariante (A^α) entre los referenciales inerciales K' y K con K' de velocidad $\mathbf{v} = c\beta\hat{\mathbf{x}}$ con respecto a K es

$$\begin{aligned} A'^0 &= \gamma(A^0 - \beta A^1) \\ A'^1 &= \gamma(-\beta A^0 + A^1) \\ A'^2 &= A^2 \\ A'^3 &= A^3 \end{aligned}$$

  en donde $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$. La transformación de Lorentz correspondiente del campo electromagnético es

$$\begin{array}{rr} E'_x = E_x & B'_x = B_x \\ E'_y = \gamma(E_y - \beta B_z) & B'_y = \gamma(B_y + \beta E_z) \\ E'_z = \gamma(E_z + \beta B_y) & B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y) \end{array}$$

En el caso general, K' con velocidad $\mathbf{v} = c\vec{\beta}$ con respecto a K, la transformación de Lorentz de los campos es

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \gamma(\mathbf{E} + \vec{\beta} \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\vec{\beta} \cdot \mathbf{E})\vec{\beta} \\ \mathbf{B}' &= \gamma(\mathbf{B} - \vec{\beta} \times \mathbf{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\vec{\beta} \cdot \mathbf{B})\vec{\beta} \end{aligned}$$

- Tensor electromagnético (en unidades gaussianas)

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{A.12}$$

- Gradiente en coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z)

$$\nabla\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{\partial\Psi}{\rho\partial\phi}\mathbf{e}_\phi + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\mathbf{e}_z \tag{A.13}$$

- Laplaciano en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)

$$\Delta\Psi(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2}\,. \tag{A.14}$$

- Laplaciano en coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z)

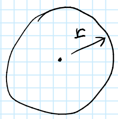
$$\Delta\Psi(\rho,\phi,z) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\,. \tag{A.15}$$

Modelo de átomo de hidrogeno

1) $\rho(r) = -e \frac{\alpha^3}{8\pi} e^{-\alpha r}$

$1/\alpha$ es la longitud típica de la nube de carga negativa: es el radio del átomo.

2) Usando ley de Gauss



$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{enc}$$

$$4\pi E r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{enc}$$

$$Q_{enc} = e + \int_0^r \rho(r')\,d\vec{r}'^3 = -e\frac{\alpha^3}{8\pi}\int_0^r e^{-\alpha r'} 4\pi r'^2 dr' + e$$

Calculo de la integral para Q_{enc}:

Sea $$I(\alpha) = \int_0^r e^{-\alpha r'} dr' = \frac{-1}{\alpha}\left[e^{-\alpha r} - 1\right]$$

$$\frac{d^2 I}{d\alpha^2} = \int_0^r e^{-\alpha r'} r'^2 dr' = \frac{d}{d\alpha}\left(\alpha^{-2}\left(e^{-\alpha r} - 1\right) + \alpha^{-1} r e^{-\alpha r}\right)$$

$$= -2\alpha^{-3}\left(e^{-\alpha r} - 1\right) - 2\alpha^{-2} r e^{-\alpha r} - \alpha^{-1} r^2 e^{-\alpha r}$$

$$= \alpha^{-3}\left[-2\left(e^{-\alpha r} - 1\right) - 2\alpha r e^{-\alpha r} - (\alpha r)^2 e^{-\alpha r}\right]$$

$$Q_{enc} = e\,\frac{1}{2}\left[2\left(e^{-\alpha r} - 1\right) + \alpha r(\alpha r + 2) e^{-\alpha r}\right] + e = \frac{e}{2}\left[2 + \alpha r(\alpha r + 2)\right] e^{-\alpha r} = \frac{e}{2} e^{-\alpha r}\left((\alpha r)^2 + 2\alpha r + 2\right)$$

$$\boxed{E(r) = \frac{e}{8\pi\varepsilon_0 r^2}\left((\alpha r)^2 + 2\alpha r + 2\right) e^{-\alpha r}}$$

3) Si definimos $\psi(r)$ por: $\rho(r) = -e|\psi(r)|^2$

$$\psi(r) = \sqrt{\frac{\alpha^3}{8\pi}}\, e^{-\alpha r/2}$$

Podemos verificar que ψ es solución de la ecuación de Schrödinger para el átomo de hidrógeno:

$$\Delta\left(e^{-\alpha r/2}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\left(e^{-r\alpha/2}\right)\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{-r\alpha/2}\right)$$

$$= \frac{1}{r^2}\left[-\alpha r e^{-\alpha r/2} + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 r^2 e^{-\alpha r/2}\right]$$

$$= -\frac{\alpha}{r} e^{-\alpha r/2} + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 e^{-\alpha r/2}$$

Entonces

$$\Delta\psi(r) + \frac{\alpha}{r}\psi(r) = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \psi(r)$$

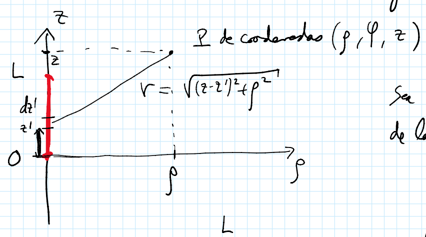
es efectivamente la forma de la ecuación de Schrödinger con potencial $1/r$.

En más detalle: $\psi(r)$ es la función de onda del estado fundamental $n=1$, $l=0$, $m=0$ que tiene simetría esférica.

Es un modelo realista en donde $\frac{2}{\alpha}$ es el radio de Bohr.

Campo y potencial de una barra

1) El campo es invariante por rotación alrededor de la barra. Por lo tanto es práctico usar coordenadas cilíndicas con el eje z sobre la barra.



Sea $\lambda(z)$ la densidad lineal de carga de la barra: $\lambda(z) = \lambda_0 z$

$$\psi(\rho,\varphi,z) = k\int_0^L \frac{\lambda(z')\,dz'}{r} = k\lambda_0\int_0^L \frac{z'\,dz'}{\sqrt{(z'-z)^2+\rho^2}} = k\lambda_0\left[\int_0^L \frac{(z'-z)\,dz'}{\sqrt{(z'-z)^2+\rho^2}} + z\int_0^L \frac{dz'}{\sqrt{(z'-z)^2+\rho^2}}\right]$$

Hay que calcular dos integrales:

$$I_1 = \int_0^L \frac{(z'-z)\,dz'}{\sqrt{(z'-z)^2+\rho^2}} \quad e \quad I_2 = \int_0^L \frac{dz'}{\sqrt{(z'-z)^2+\rho^2}}$$

$$I_1 = \Big[\big((z'-z)^2+\rho^2\big)^{1/2}\Big]_{z'=0}^{z'=L}$$

$$\boxed{I_1 = \sqrt{(L-z)^2+\rho^2} - \sqrt{z^2+\rho^2}}$$

$$I_2 = \int_0^L \frac{dz'}{\sqrt{(z'-z)^2+\rho^2}} = \frac{1}{2}\left[\ln\left(1+\frac{z'-z}{\sqrt{(z'-z)^2+\rho^2}}\right) - \ln\left(1-\frac{z'-z}{\sqrt{(z'-z)^2+\rho^2}}\right)\right]\Bigg|_{z'=0}^{z'=L}$$

$u = z'-z$

$$\frac{1+\frac{u}{\sqrt{u^2+\rho^2}}}{1-\frac{u}{\sqrt{u^2+\rho^2}}} = \frac{\left(1+\frac{u}{\sqrt{u^2+\rho^2}}\right)^2}{1-\frac{u^2}{u^2+\rho^2}} = \frac{\left(\sqrt{u^2+\rho^2}+u\right)^2}{\rho^2}$$

$$I_2 = \ln\left(\sqrt{u^2+\rho^2}+u\right)\Bigg|_{u=-z}^{u=L-z}$$

$$\boxed{I_2 = \ln\left(\sqrt{(L-z)^2+\rho^2}+L-z\right) - \ln\left(\sqrt{z^2+\rho^2}-z\right)}$$

$$\boxed{\psi(\rho,\varphi,z) = k\lambda_0\left(\left[\left(z^2+\rho^2\right)^{1/2} - \left((L-z)^2+\rho^2\right)^{1/2}\right] + z\,\ln\left(\frac{\sqrt{(L-z)^2+\rho^2}+L-z}{\sqrt{z^2+\rho^2}-z}\right)\right)}$$

2) $$\vec{E} = -\vec{\nabla}\psi = -\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\,\hat{e}_\rho - \frac{\partial\psi}{\partial z}\,\hat{e}_z = E_\rho\,\hat{e}_\rho + E_z\,\hat{e}_z$$

$$E_\rho = -\frac{\partial\psi}{\partial\rho} = -k\lambda_0\left(\frac{1}{2}2\rho\right)\left(\left(z^2+\rho^2\right)^{-1/2} - \left((L-z)^2+\rho^2\right)^{-1/2}\right) - k\lambda_0 z\rho\left(\frac{1}{\sqrt{(L-z)^2+\rho^2}\left(L-z+\sqrt{(L-z)^2+\rho^2}\right)} - \frac{1}{\sqrt{z^2+\rho^2}\left(-z+\sqrt{z^2+\rho^2}\right)}\right)$$

$$\boxed{E_\rho = -k\lambda_0\rho\left[\left(z^2+\rho^2\right)^{-1/2} - \left((L-z)^2+\rho^2\right)^{-1/2} + \frac{z}{\sqrt{(L-z)^2+\rho^2}\left(L-z+\sqrt{(L-z)^2+\rho^2}\right)} - \frac{z}{\sqrt{z^2+\rho^2}\left(-z+\sqrt{z^2+\rho^2}\right)}\right]}$$

$$\boxed{E_z = -\frac{\partial\psi}{\partial z} = -k\lambda_0\left[\left[z\left(z^2+\rho^2\right)^{-1/2} - (z-L)\left((z-L)^2+\rho^2\right)^{-1/2}\right] + z\left(\frac{1}{\sqrt{z^2+\rho^2}} - \frac{1}{\sqrt{(L-z)^2+\rho^2}}\right) + \ln\frac{L-z+\sqrt{(L-z)^2+\rho^2}}{-z+\sqrt{z^2+\rho^2}}\right.}$$

Conductor ideal

1) $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 0$ (1)

$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ (2)

$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{j}$ (3)

$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$ (4)

con $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ y $\vec{j} = \sigma\vec{E}$
$\vec{B} = \mu\vec{H}$

De $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ se deduce que existe un potencial vector $\vec{A}$ tal que $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$

Reemplazando en (3)

$$\frac{1}{\mu}\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \sigma\vec{E}$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \Delta\vec{A} = \sigma\mu\vec{E}$$

Se escoje $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$

$$-\Delta\vec{A} = \sigma\mu\vec{E} \qquad (5)$$

Usando (4) : $\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{A} = 0$

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right) = 0$$

Existe ψ tal que $\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\psi$

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} - \vec{\nabla}\psi$$

Volviendo a (5):

$$-\Delta\vec{A} = \left(-\frac{\partial A}{\partial t} - \vec{\nabla}\psi\right)\sigma\mu$$

$$\boxed{\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - D\,\Delta\vec{A} = -\vec{\nabla}\psi \qquad \text{con } D = \frac{1}{\sigma\mu}} \qquad (\text{dif})$$

Es una ecuación de difusión con una fuente $-\vec{\nabla}\psi$.

D es el coeficiente de difusión.

2) En transformada de Fourier, la ecuación (dif) es

$$\frac{\partial \vec{\tilde{A}}}{\partial t} + D\vec{k}^2 \vec{\tilde{A}} = 0$$

con solución

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\tilde{A}}(\vec{k},t) &= \vec{\tilde{A}}(\vec{k},0)\, e^{-D\vec{k}^2 t} \\ &= \vec{\tilde{A}}(\vec{k},0)\, G(\vec{k},t) \quad \text{con} \quad G(\vec{k},t) = e^{-D\vec{k}^2 t} \end{aligned}}$$

3) Pasando a espacio de posición:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = (\vec{A}_0 * G)(\vec{r},t)$$

en donde $\vec{A}_0(\vec{r}) = A(\vec{r},0)$ y la convolución es sobre la variable $\vec{r}$:

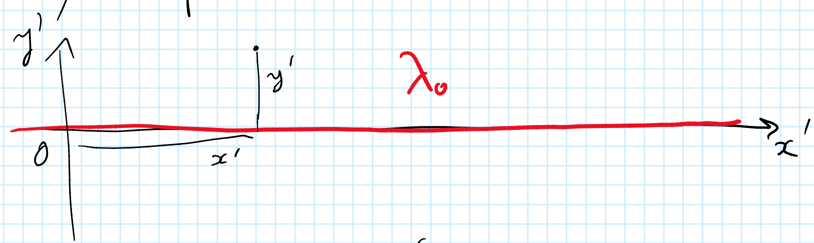
$$A(\vec{r},t) = \int A(\vec{r}\,',0)\, G(\vec{r}-\vec{r}\,',t)\, d\vec{r}\,'$$

4) $$G(\vec{r},t) = \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, e^{-\vec{k}^2 Dt} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} = \left(\frac{\pi}{Dt}\right)^{3/2} e^{(i\vec{r})^2/(4Dt)}$$ (Usando la integral gaussiana del apéndice)

$$\boxed{G(\vec{r},t) = \left(\frac{\pi}{Dt}\right)^{3/2} e^{-\frac{\vec{r}^2}{4Dt}}}$$

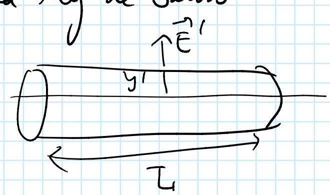
Campo de un hilo (unidades gaussianas)

1) En K', es un problema de electrostática:



El campo es invariante por rotación alrededor del eje x': calculemos en un punto $(x', y', 0)$

Usando la ley de Gauss



$$\oint \vec{E}' \cdot d\vec{S} = 4\pi\, Q_{enc}$$

$$2\pi y' L\, E'_y = 4\pi \lambda_0 L$$

$$\boxed{E'_y = \frac{2\lambda_0}{y'} \qquad E'_x = 0 \qquad E'_z = 0. \qquad \vec{B}' = 0}$$

K' se mueve con respecto a K con velocidad $v = v\hat{x}$. Sea $\beta = \frac{v}{c}$ y $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$

Tenemos:
$$E_x = E'_x = 0$$

$$E_y = \gamma(E'_y + \beta B'_z) = \gamma E'_y = \frac{\gamma 2\lambda_0}{y'}$$

$$E_z = \gamma(E'_z - \beta B'_y) = 0$$

$$B_x = B'_x = 0$$

$$B_y = \gamma(B'_y - \beta E'_z) = 0$$

$$B_z = \gamma(B'_z + \beta E'_y) = \frac{\gamma 2\lambda_0}{y'}$$

Además
$$ct = \gamma(ct' + \beta x')$$
$$x = \gamma(\beta t' + x')$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$

Finalmente :

En un punto de coordenadas $(x, y, 0)$

$$\boxed{\begin{array}{ll} E_x = 0 & B_x = 0 \\ E_y = \dfrac{2\gamma\lambda_0}{y} & B_y = 0 \\ E_z = 0 & B_z = \dfrac{2\lambda_0\gamma}{y} \end{array}}$$

2) En K':

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{j}\,'(\vec{r}\,', t') = 0 \\ \rho'(\vec{r}\,', t') = \lambda_0\,\delta(y')\delta(z') \end{array}}$$

$J = (\rho c, \vec{j})$ es un cuadrivector.

Usando la transformación de Lorentz tenemos:

$$c\rho = \gamma(c\rho' + \beta j_x') = \gamma c\rho'$$
$$j_x = \gamma(\beta c\rho' + j_x') = \gamma\beta c\rho'$$
$$j_y = j_y' = 0$$
$$j_z = j_z' = 0$$

$$c\rho(\vec{r}, t) = \gamma c\,\rho'(\vec{r}\,', t') = \gamma c\lambda_0\,\delta(y')\delta(z')$$

y $j_x(\vec{r}, t) = \gamma v\,\rho'(\vec{r}\,', t') = \gamma v\lambda_0\delta(y')\delta(z')$

con $y' = y$, $z' = z$

$$\rho(\vec{r}, t) = \gamma\,\lambda_0\,\delta(y)\delta(z)$$

$$\boxed{\rho(\vec{r}, t) = \gamma\lambda_0\,\delta(y)\,\delta(z)}$$

$$\boxed{j_x(\vec{r},t)=\gamma\lambda_0 v\,\delta(y)\,\delta(z)}$$

3) La solución de las ecuaciones de Maxwell da

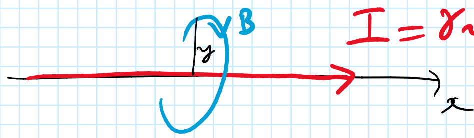
$$\psi(\vec{r},t)=\int d\vec{r}\,''\;\frac{\rho\left(\vec{r}\,'',\,t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,''|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,''|}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\int d\vec{r}\,''\;\frac{\vec{j}\left(\vec{r}\,'',\,t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,''|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,''|}$$

Pero en este problema ρ y $\vec{j}$ no dependen de t, por lo tanto las soluciones son las de la electroestática y magnetostática. Solo hay que multiplicar las densidades por γ.

El cálculo de $\vec{E}$ es igual al de $\vec{E}\,'$ (multiplicando por γ) y se obtiene con ley de Gauss $\boxed{E=\frac{2\lambda_0\gamma}{y}}$

El cálculo de $\vec{B}$ con ley de Ampère da:



$I=\gamma v\lambda_0$ corriente. $I=\int dy\,dz\,\vec{j}=\gamma v\lambda_0$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}=4\pi I$$

$$2\pi y B=4\pi\gamma v\lambda_0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{B=\frac{\gamma v\lambda_0}{y}}$$

Los resultados son coherentes con lo obtenido por las transformaciones de Lorentz.

Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias

Doctorado en Ciencias-Física.
Examen de Conocimientos
Mecánica Clásica.
Departamento de Física.
Universidad de los Andes 2022-I
Duracion: 3 horas.

El examen tiene una duración de 3:00 horas y se debe terminar a las 12:00 horas.
Usted debe responder todos los ejercicios a mano explicando claramente el procedimiento que sigue, de no ser así no se dará puntaje.
El examen se debe desarrollar manera individual. Usted no debe comunicarse con ninguno de sus compañeros ni utilizar ningún documento, libro o apuntes, diferente a las que se le están asignando en el enunciado. Al principio de este documento hay algunas fórmulas que pueden ser útiles para el desarrollo de este examen.
Firmando el examen usted admite que entiende que omitir las reglas estipuladas para este examen será considerado un abuso a la confianza que se ha puesto en usted y tendrá las consecuencias estipuladas en el reglamento general de estudiantes de doctorado de la Universidad.

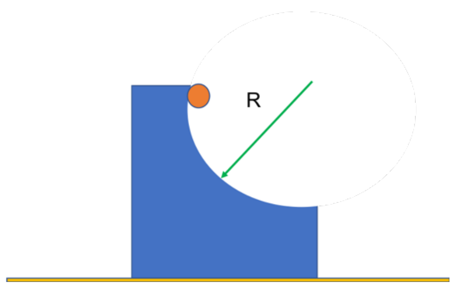
FORMULAS

Coordenadas Generalizadas	q, Q	
Velocidades generalizadas	$\dot{q}, \dot{Q}$	$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}$
Momentos generalizados	p, P	$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$; $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial q}$
Lagrangiano	L	$L(q, \dot{q}, t) = T(\dot{q}) - V(q, \dot{q}, t)$
Hamiltoniano	$H = T + V$	$H(q, p, t) = p.\dot{q} - L(q, \dot{q}, t)$
Acción, Hamiltoniano, Lagrangiano	$S = \int_{t_1}^{t_2} (p\dot{x} - H) dt =$ $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt =$	$S = \int_{t_1}^{t_2} (p\dot{x} - H) dt$ $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$

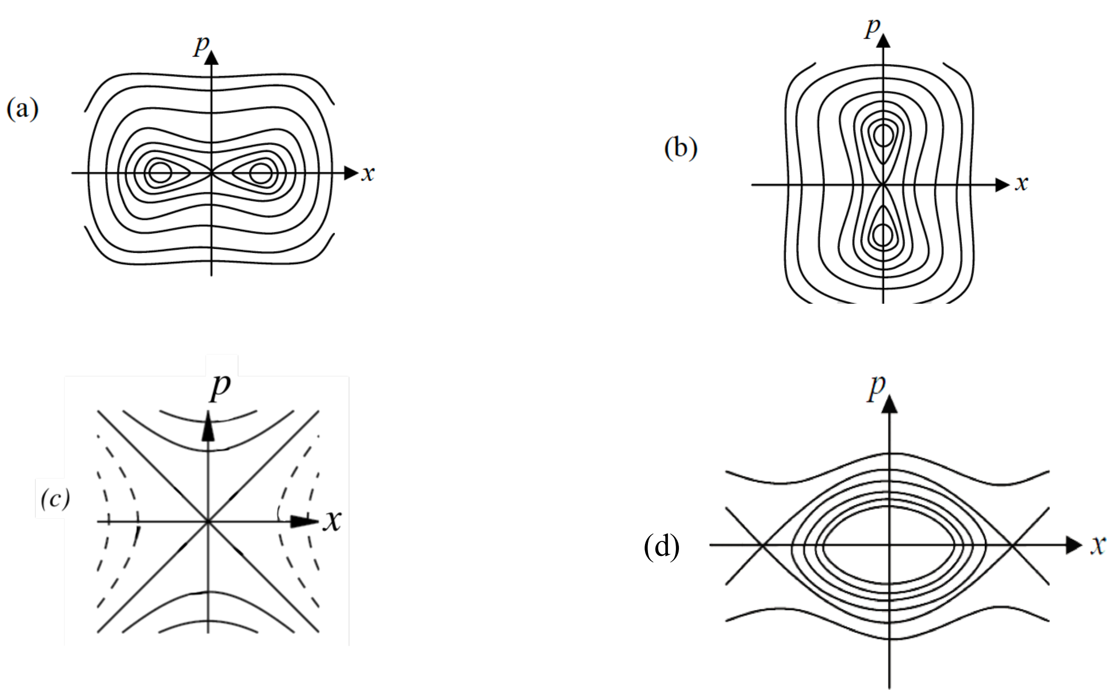
Departamento de Física
Cra. 1No. 18 A – 10, Bloque Ip, primer piso, Bogotá, Colombia | A.A. 4976 – 12340 | Tel.:(57-1) 3324500 | Conm: (57-1) 3394949/99 Ext. 2730 | Fax: (57-1) 3324516
http://física.uniandes.edu.co | e-mail:inffisic@uniandes.edu.co

Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias

1. ***(20 puntos).*** Una masa puntual m, se desliza sobre un objeto de masa M, que tiene una superficie circularmente curva, como se muestra en el diagrama de abajo. El bloque de masa M puede deslizarse libremente sobre una superficie sin fricción. Calcule las velocidades finales de las dos masas después de que m se separa de M. Resuelva este problema usando mecánica newtoniana.



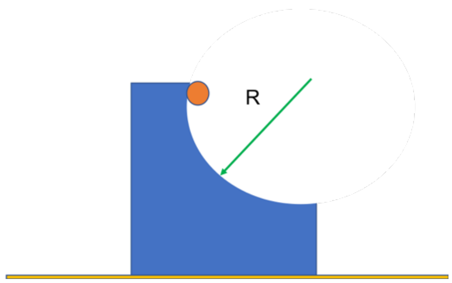
2. ***(20 puntos).*** Cuáles de las siguientes figuras es una representación esquemática de las trayectorias del espacio de fases de una partícula que se mueve en un potencial unidimensional $V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$.



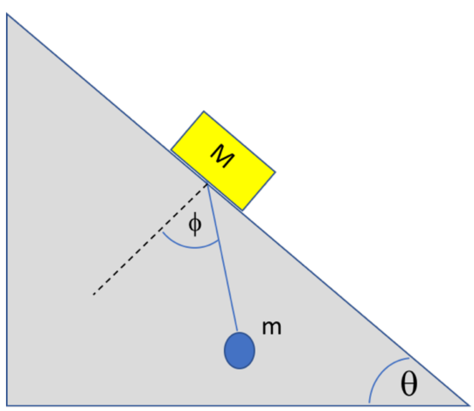
Departamento de Física
Cra. 1No. 18 A – 10, Bloque Ip, primer piso, Bogotá, Colombia | A.A. 4976 – 12340 | Tel.:(57-1) 3324500 | Conm: (57-1) 3394949/99 Ext. 2730 | Fax: (57-1) 3324516
http://fisica.uniandes.edu.co | e-mail:inffisic@uniandes.edu.co

Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias

3. ***(30 puntos).*** Una masa puntual m, se desliza sobre un objeto de masa M, que tiene una superficie circularmente curva, como se muestra en el diagrama de abajo. El bloque de masa M puede deslizarse libremente sobre una superficie sin fricción. Calcule las velocidades finales de las dos masas después de que m se separa de M. Resuelva este problema usando mecánica newtoniana. Resuelva este problema usando mecánica lagrangiana.



4. ***(30 puntos).*** Una masa M puede deslizarse libremente, sin fricción, sobre un plano que forma un ángulo θ con la horizontal. Un péndulo de longitud l y masa m cuelga de M (suponga que M se extiende un poco fuera del plano para que el péndulo pueda colgar).



(a) (11 PUNTOS) Calcule las ecuaciones de movimiento.
(b) (14 PUNTOS) Calcule los modos normales de vibración y la frecuencia para pequeñas oscilaciones. Explique el movimiento resultante
(c) (5 PUNTOS) Analice y explique el caso $M \gg m$ y $m \gg M$

Departamento de Física
Cra. 1No. 18 A – 10, Bloque Ip, primer piso, Bogotá, Colombia | A.A. 4976 – 12340 | Tel.:(57-1) 3324500 | Conm: (57-1) 3394949/99 Ext. 2730 | Fax: (57-1) 3324516
http://fisica.uniandes.edu.co | e-mail:inffisic@uniandes.edu.co

Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias

Doctorado en Ciencias-Física.
Examen de Conocimientos
Mecánica Clásica.
Departamento de Física.
Universidad de los Andes 2022-I
Duracion: 3 horas.

El examen tiene una duración de 3:00 horas y se debe terminar a las 12:00 horas.
Usted debe responder todos los ejercicios a mano explicando claramente el procedimiento que sigue, de no ser así no se dará puntaje.
El examen se debe desarrollar manera individual. Usted no debe comunicarse con ninguno de sus compañeros ni utilizar ningún documento, libro o apuntes, diferente a las que se le están asignando en el enunciado. Al principio de este documento hay algunas fórmulas que pueden ser útiles para el desarrollo de este examen.
Firmando el examen usted admite que entiende que omitir las reglas estipuladas para este examen será considerado un abuso a la confianza que se ha puesto en usted y tendrá las consecuencias estipuladas en el reglamento general de estudiantes de doctorado de la Universidad.

FORMULAS

Coordenadas Generalizadas	q, Q	
Velocidades generalizadas	$\dot{q}, \dot{Q}$	$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}$
Momentos generalizados	p, P	$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$; $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial q}$
Lagrangiano	L	$L(q, \dot{q}, t) = T(\dot{q}) - V(q, \dot{q}, t)$
Hamiltoniano	$H = T + V$	$H(q, p, t) = p.\dot{q} - L(q, \dot{q}, t)$
Acción, Hamiltoniano, Lagrangiano	$S = \int_{t_1}^{t_2} (p\dot{x} - H)dt =$ $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt =$	$S = \int_{t_1}^{t_2} (p\dot{x} - H)dt$ $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt$

1. ***(20 puntos).*** Una masa puntual m, se desliza sobre un objeto de masa M, que tiene una superficie circularmente curva, como se muestra en el diagrama de abajo. El bloque de masa M puede deslizarse libremente sobre una superficie sin fricción. Calcule las velocidades finales de las dos masas después de que m se separa de M. Resuelva este problema usando mecánica newtoniana.

SOLUCION

Cuando la partícula de masa *m* sale, supondremos que su velocidad es v_m y la de la superficie curva es v_M. Por lo tanto:

$$Mv_M = mv_m \quad v_M = \frac{m}{M}v_m$$

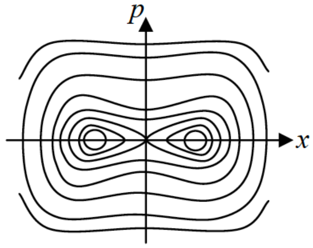
$$mgR = \frac{1}{2}Mv_M^2 + \frac{1}{2}mv_m^2 = \frac{1}{2}M\left(\frac{m}{M}v_m\right)^2 + \frac{1}{2}mv_m^2 = \frac{1}{2}mv_m^2\left(1+\frac{m}{M}\right)$$

$$v_m = \sqrt{\frac{2gR}{1+\frac{m}{M}}}$$

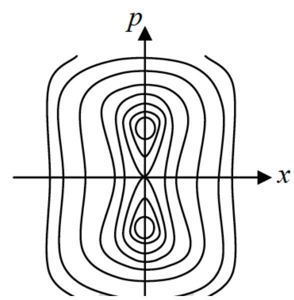
$$v_M = \frac{m}{M}\sqrt{\frac{2gR}{1+\frac{m}{M}}}$$

2. ***(20 puntos).*** Cuales de las siguientes figuras es una representación esquemática de las trayectorias del espacio de fases de una partícula que se mueve en un potencial unidimensional $V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$.

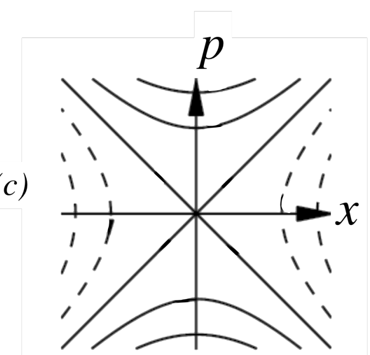
(a)



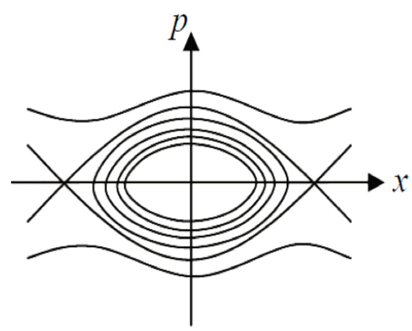
(b)



(c)



(d)



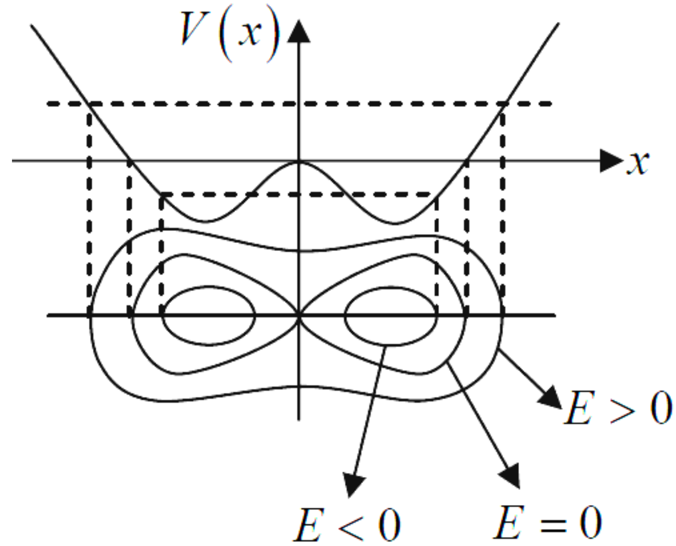
SOLUCION

$$V(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -x + x^3 = -x(1 - x^2) = -x(1 - x)(1 + x) = 0 \rightarrow x = 0, x = \pm 1$$

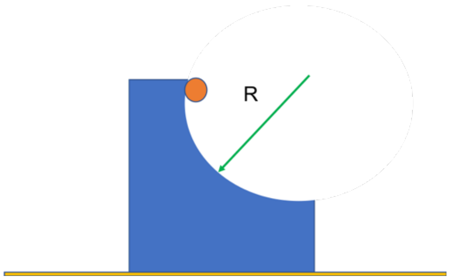
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -1 + 3x^2 = \begin{cases} -1 & si\ x = 0 \quad (inestable) \\ 2 & si\ x = \pm 1 \quad (estable) \end{cases}$$

Departamento de Física
Cra. 1No. 18 A – 10, Bloque Ip, primer piso, Bogotá, Colombia | A.A. 4976 – 12340 | Tel.:(57-1) 3324500 | Conm: (57-1) 3394949/99 Ext. 2730 | Fax: (57-1) 3324516
http://física.uniandes.edu.co | e-mail:inffisic@uniandes.edu.co

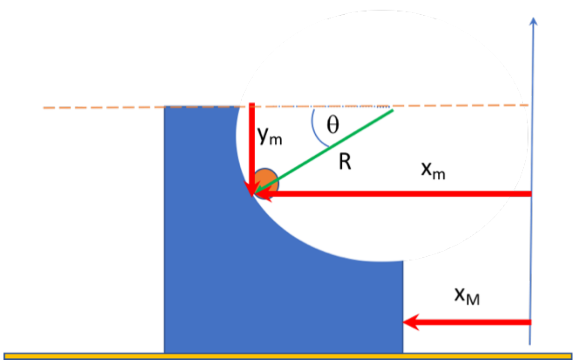


Respuesta (a)

3. ***(30 puntos).*** Una masa puntual m, se desliza sobre un objeto de masa M, que tiene una superficie circularmente curva, como se muestra en el diagrama de abajo. El bloque de masa M puede deslizarse libremente sobre una superficie sin fricción. Calcule las velocidades finales de las dos masas después de que m se separa de M. Resuelva este problema usando mecánica newtoniana. Resuelva este problema usando mecánica lagrangiana.



SOLUCION



$$x_m = x_M + Rcos\theta.\ ;$$
$$\dot{x}_m = \dot{x}_M - Rsen\theta\dot{\theta}$$
$$y_m = -Rsen\theta$$
$$\dot{y}_m = -Rcos\theta\ \dot{\theta}$$

$$\dot{x}_m^2 = \left(\dot{x}_M + Rsen\theta\dot{\theta}\right)^2 = \dot{x}_M^2 + 2\,\dot{x}_m R\dot{\theta}sen\theta + R^2 sen^2\theta\dot{\theta}^2$$

$$\dot{y}_m^2 = R^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}Mx_M^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2) - mgy_m$$
$$= \frac{1}{2}\big(M\dot{x}_M^2 + m\dot{x}_M^2 + 2m\,\dot{x}_M R\dot{\theta}sen\theta + mR^2 sen^2\theta\dot{\theta}^2 + mR^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2$$
$$+ mgRsen\theta\big)$$
$$= \frac{1}{2}\big(Mx_M^2 + m\dot{x}_M^2 + 2m\,\dot{x}_M R\dot{\theta}sen\theta + mR^2\dot{\theta}^2 + mgRsen\theta\big)$$

Departamento de Física
Cra. 1No. 18 A – 10, Bloque Ip, primer piso, Bogotá, Colombia | A.A. 4976 – 12340 | Tel.:(57-1) 3324500 | Conm: (57-1) 3394949/99 Ext. 2730 | Fax: (57-1) 3324516
http://fisica.uniandes.edu.co | e-mail:inffisic@uniandes.edu.co

Para sistemas conservativos sabemos que:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_M} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_M} = (M+m)\dot{x}_M + mR\dot{\theta}sen\theta = constante$$

Lo que físicamente significa la ley de conservación de momentum horizontal y como $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, el Hamiltoniano del sistema puede ser escrito como:

$$H = \dot{x}_M \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_M} + \dot{\theta}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_M} - L = T + V$$
$$= \frac{1}{2}\left(M\dot{x}_M^2 + m\dot{x}_M^2 + 2m\,\dot{x}_m R\dot{\theta}sen\theta + mR^2\dot{\theta}^2\right) - mgRsen\theta = constante$$

$$\frac{1}{2}\left(M\dot{x}_M^2 + m\dot{x}_M^2 + 2m\,\dot{x}_m R\dot{\theta}sen\theta + mR^2\dot{\theta}^2 - mgRsen\theta\right) = 0$$

Cuando la partícula sale, θ=π/2,

$$(M+m)\dot{x}_M + mR\dot{\theta} = M\dot{x}_M + m\left(\dot{x}_M + R\dot{\theta}\right) = 0$$

$$\tfrac{1}{2}M\dot{x}_M^2 + \tfrac{1}{2}\left(m\dot{x}_M^2 + 2m\,\dot{x}_m R\dot{\theta} + mR^2\dot{\theta}^2\right) - mgR = \tfrac{1}{2}Mx_M^2 + \tfrac{1}{2}m\left(\dot{x}_m + R\dot{\theta}\right)^2 - mgR = 0$$

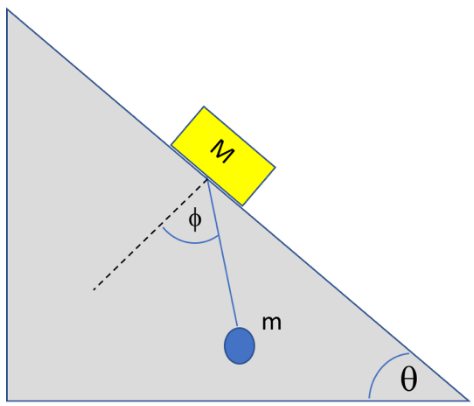
$$M\dot{x}_M^2 + m\left(\frac{M}{m}\dot{x}_M\right)^2 = M\dot{x}_M^2\left(1 + \frac{M}{m}\right) = 2mgR$$

$$\dot{x}_M^2 = \frac{m}{M}\frac{2gR}{1+\frac{M}{m}} \rightarrow v_M = |\dot{x}_M| = \sqrt{\frac{m}{M}}\sqrt{\frac{2gr}{1+\frac{M}{m}}} = \frac{m}{M}\sqrt{\frac{2gr}{1+\frac{m}{M}}}$$

$$v_m = \left|\dot{x}_M + R\dot{\theta}\right| = \frac{M}{m}|\dot{x}_M| = \frac{M}{m}\frac{m}{M}\sqrt{\frac{2gr}{1+\frac{m}{M}}} = \sqrt{\frac{2gr}{1+\frac{m}{M}}}$$

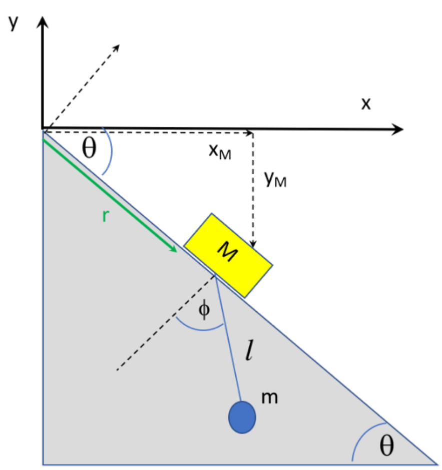
Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias

4. ***(30 puntos).*** Una masa M puede deslizarse libremente, sin fricción, sobre un plano que forma un ángulo θ con la horizontal. Un péndulo de longitud l y masa m cuelga de M (suponga que M se extiende un poco fuera del plano para que el péndulo pueda colgar).



(a) ***(11 PUNTOS)*** Calcule las ecuaciones de movimiento.
(b) ***(14 PUNTOS)*** Calcule los modos normales de vibración y la frecuencia para pequeñas oscilaciones. Explique el movimiento resultante
(c) ***(5 PUNTOS)*** Analice y explique el caso $M \gg m$ y $m \gg M$

SOLUCION



(a) Las coordenadas para la posición de m y M son:

$$(x,y)_M = (rcos\theta, -rsen\theta) \quad ; \quad (\dot{x},\dot{y})_M = (\dot{r}cos\theta, -\dot{r}sen\theta)$$
$$(x,y)_m = (rcos\theta + lsen\phi, -rsen\theta - lcos\phi) \, ;$$
$$(\dot{x},\dot{y})_m = \left(\dot{r}cos\theta + l\dot{\phi}cos\phi, -\dot{r}sen\theta + l\dot{\phi}sen\phi\right)$$

$$v_M^2 = \dot{r}^2$$

$$v_m^2 = \dot{r}^2\cos^2\theta + l^2\dot{\phi}^2\cos^2\phi + 2\dot{r}l\dot{\phi}cos\theta cos\phi + \dot{r}^2sen^2\theta + l^2\dot{\phi}^2sen^2\phi - 2\dot{r}l\dot{\phi}sen\theta sen\phi$$

$$v_m^2 = \dot{r}^2 + l^2\dot{\phi}^2 + 2\dot{r}l\dot{\phi}(cos\theta cos\phi - sen\theta sen\phi)$$
$$L = T - V = \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + l^2\dot{\phi}^2 + 2\dot{r}l\dot{\phi}\cos(\theta+\phi)\right) + Mgrsin\theta + mg(rsen\theta + lcos\phi)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = (M+m)\dot{r} + ml\dot{\phi}\cos(\theta+\phi) \quad ; \frac{\partial L}{\partial r} = (M+m)gsin\theta$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m(l^2\dot{\phi} + \dot{r}l\cos(\theta+\phi)) \quad ; \frac{\partial L}{\partial \phi} = m(-\dot{r}l\dot{\phi}\,\mathrm{sen}(\theta+\phi) - glsen\phi)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = (M+m)\ddot{r} + ml\ddot{\phi}\cos(\theta+\phi) - ml\dot{\phi}^2\sin(\theta+\phi)$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m(l^2\ddot{\phi} + l\ddot{r}\cos(\theta+\phi) - \dot{r}l\dot{\phi}sen(\theta+\phi))$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = (M+m)(\ddot{r} - gsin\theta) + ml(\ddot{\phi}\cos(\theta+\phi) - \dot{\phi}^2\sin(\theta+\phi)) = 0$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = ml(l\ddot{\phi} + \ddot{r}\cos(\theta+\phi) - \dot{r}\dot{\phi}sen(\theta+\phi) + \dot{r}\dot{\phi}\,\mathrm{sen}(\theta+\phi) + gsen\phi)$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = ml(l\ddot{\phi} + \ddot{r}\cos(\theta+\phi) + gsen\phi) = 0$$

$$(M+m)\ddot{r} + ml(\ddot{\phi}\cos(\theta+\phi) - \dot{\phi}^2\sin(\theta+\phi)) = (M+m)gsin\theta$$
$$l\ddot{\phi} + \ddot{r}\cos(\theta+\phi) = -gsen\phi$$

(b) Primero vamos a determinar los puntos de equilibrio en done $\ddot{\phi} = \dot{\phi} = 0$

$$(M+m)\ddot{r} + ml(\ddot{\phi}\cos(\theta+\phi) - \dot{\phi}^2\sin(\theta+\phi)) = (M+m)gsin\theta$$
$$\ddot{r} = gsin\theta$$
$$l\ddot{\phi} + \ddot{r}\cos(\theta+\phi) = -gsen\phi$$

$$\ddot{r}\cos(\theta+\phi) = -gsen\phi$$

$$gsin\theta\cos(\theta+\phi) = -gsen\phi$$
$$sin\theta\, cos\theta \cos\phi - \sin^2\theta\, sen\phi = \; sin\theta\, cos\theta\cos\phi - sen\phi + \cos^2\theta\, sen\phi = \; -sen\phi$$

$$sin\theta\, cos\theta\cos\phi = -\cos^2\theta\, sen\phi$$
$$Tg\theta = -Tg\phi$$

Lo cual tiene dos soluciones $\phi = -\theta$ ó $\phi = \pi - \theta$(claramente, inestable). Por lo tanto, supondremos que $\phi = -\theta + \delta$:

$$l\ddot{\phi} + \ddot{r}\cos(\theta+\phi) = -gsen\phi$$
$$l\left(-\ddot{\theta} + \ddot{\delta}\right) + \ddot{r}\cos\delta = l\ddot{\delta} + \ddot{r} \; = -gsen(\delta-\theta) = -g(sen\delta cos\theta - cos\delta sen\theta)$$
$$= -g(\delta cos\theta - sen\theta)$$
$$l\ddot{\delta} + \ddot{r} = -g\delta cos\theta + gsen\theta$$

definiendo $\ddot{z} = \ddot{r} - gsen\theta$

$$\ddot{z} + l\ddot{\delta} + g\delta cos\theta = 0$$

Ahora bien

$$(M+m)\ddot{r} + ml(\ddot{\phi}\cos(\theta+\phi) - \dot{\phi}^2\sin(\theta+\phi)) = (M+m)gsin\theta$$
$$(M+m)\ddot{r} + ml(\ddot{\delta}\cos\delta - \dot{\delta}^2\sin\delta) = (M+m)gsin\theta$$

$$(M+m)\ddot{r} + ml\ddot{\delta} = (M+m)gsin\theta$$

$$(M+m)\ddot{z} + ml\ddot{\delta} = 0$$

Por lo tanto, ya tenemos las dos ecuaciones que darán los modos normales de vibración

$$\ddot{z} + l\ddot{\delta} + g\delta cos\theta = 0$$
$$(M+m)\ddot{z} + ml\ddot{\delta} = 0$$

$$(M+m)\left(l\ddot{\delta} + g\delta cos\theta\right) - ml\ddot{\delta} = 0$$
$$Ml\ddot{\delta} + (M+m)gcos\theta\delta = 0$$

$$\ddot{\delta} + \frac{(M+m)gcos\theta}{Ml}\delta = 0$$

$$\delta(t) = C\cos(\Omega t + \phi)$$

Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias

$$\phi(t) = C\cos(\Omega t + \phi) - \theta$$

Que corresponde a la ecuación de un oscilador armónico de frecuencia

$$\Omega = \sqrt{\frac{(M+m)gcos\theta}{Ml}} = \sqrt{1+\frac{m}{M}}\sqrt{\frac{gcos\theta}{l}}$$

La ecuación

$$(M+m)\ddot{z} + ml\ddot{\delta} = 0$$

Puede ser fácilmente integrada dos veces:

$$z(t) = -\frac{ml}{M+m}\delta(t) + At + B$$

$$r(t) = -\frac{ml}{M+m}\delta(t) + \frac{gsen\theta}{2}t^2 + At + B$$

Supondré, B=0. Por lo tanto, los modos normales son:

1. C=0. En este caso

$$z(t) = At$$

   Lo cual quiere decir que el péndulo cuelga de manera vertical, con ambas masas moviéndose sobre el plano con la misma velocidad y la frecuencia de oscilaciones es cero en este modo. Desde el punto de vista de r(t), es un movimiento unifórmenle acelerado.

2. A=0. En este caso

$$z(t) = -\frac{ml}{M+m}\delta(t)$$

   Ambas masas oscilarán con frecuencia Ω, y moviendose en direcciones opuestas. Desde el punto de vista de R, estaría bajando adicionalmente de manera acelerada.

(c) Si $M \gg m$ entonces,

$$\Omega = \sqrt{1+\frac{m}{M}}\sqrt{\frac{gcos\theta}{l}} = \sqrt{\frac{gcos\theta}{l}}$$

El bloque de masa M bajaría muy rápido.
Si M<<m, tendríamos un sistema en el cual la tensión en la cuerda es muy grande.

Examen de Conocimientos - Mecánica Cuántica
Departamento de Física, Universidad de los Andes
2021-II

El examen tiene una duración de 3:00 horas y se debe terminar a las 12:00 horas.

Usted debe responder todos los ejercicios a mano explicando claramente el procedimiento que sigue, de no ser así no se dará puntaje.

El examen se debe desarrollar manera individual. Usted no debe comunicarse con ninguno de sus compañeros ni utilizar ningún documento, libro o apuntes, diferente a las que se le están asignando en el enunciado. Al principio de este documento hay algunas fórmulas que pueden ser útiles para el desarrollo de este examen.

Firmando el examen usted admite que entiende que omitir las reglas estipuladas para este examen será considerado un abuso a la confianza que se ha puesto en usted y tendrá las consecuencias estipuladas en el reglamento general de estudiantes de doctorado de la Universidad.

ECUACIONES

Momento angular:

$$\hat{J}^2 |j,m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j,m\rangle,$$
$$\hat{J}_z |j,m\rangle = \hbar m |j,m\rangle,$$
$$\hat{\vec{J}}_\pm |j,m\rangle = \sqrt{(j \mp 1)(j \pm m + 1)}\hbar |j,m \pm 1\rangle,$$
$$\hat{J}_x = \frac{1}{2}(\hat{J}_+ + \hat{J}_-),$$
$$\hat{J}_y = \frac{1}{2i}(\hat{J}_+ - \hat{J}_-).$$

Evolución temporal:

$$\frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = \frac{-i}{\hbar}\hat{H}|\psi\rangle,$$
$$\frac{d}{dt}\langle\hat{Q}\rangle = \frac{i}{\hbar}\left\langle\left[\hat{H},\hat{Q}\right]\right\rangle + \left\langle\frac{\partial\hat{Q}}{\partial t}\right\rangle.$$

Átomo de Hidrógeno:

$$E_n = -\frac{13{,}6}{n^2}\ \text{eV},$$

$$R_{n\ell}(r) = N_{nl}\left(\frac{2r}{na_0}\right)^\ell e^{-r/na_0} L^{2\ell+1}_{n+\ell}\left(\frac{2r}{na_0}\right).$$

$$Y_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}, \quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} cos\theta, \quad Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} sen\theta e^{i\phi}, \quad Y_{2,0} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\big(3cos^2\theta - 1\big)$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_{ij}^{*} Y_{kq} d\Omega = \delta_{ik}\delta_{jq}, \quad \psi_{n\ell m} = R_{n\ell} Y_{\ell m}$$

$$R_{10} = 2\Big(\frac{1}{a_0}\Big)^{3/2} e^{-r/a_0}, \quad R_{21} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\frac{1}{2a_0}\Big)^{3/2}\Big(\frac{r}{a_0}\Big) e^{-r/2a_0}, \quad R_{20} = 2\Big(\frac{1}{2a_0}\Big)^{3/2}\Big(1 - \frac{r}{2a_0}\Big) e^{-r/2a_0}$$

$$\int_0^{\infty} r^n e^{-\alpha r} dr = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

Teoría de Perturbaciones:

$$H\psi >= i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\psi>, \quad H = H^0 + H^{'}, \quad H|n>= E_n|n>, \quad E_n = E_n^{(0)} + E_n^{(1)} + E_n^{(2)} + ...$$

$$|n>= |n^{(0)}> + |n^{(1)}> + |n^{(2)}> + ..., \quad E_n^{(1)} =< n|H^{'}|n>, \quad |n^{(1)}>= \sum_{m\neq n} |m^{(0)}> \frac{< m^{(0)}|H^{'}|n^{(0)}>}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}$$

$$\Delta E_n^{(2)} = \sum_{m\neq n} \frac{\Big|\Big\langle m|H^{'}|n\Big\rangle\Big|^2}{E_n - E_m}$$

$$H = H^0 + H^{'}(t), \quad c_{i\to f}(t) = \delta_{if} - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} < f^0|H^{'}(t^{'})|i^0> e^{iw_{fi}t^{'}} dt^{'}$$

$$\oint p dx = \hbar\pi(n + \frac{1}{2}) \quad , \quad [L_+, L_-] = 2\hbar L_z$$

1. Problema 1 - 20 Puntos

Considere dos partículas de espín 1/2, donde se tienen cuatro posibles combinaciones de la forma $|s_1, s_2; m_1, m_2\rangle$:

$$\begin{aligned}
|\uparrow\uparrow\rangle &= \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle, \quad m = 1,\\
|\uparrow\downarrow\rangle &= \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle, \quad m = 0,\\
|\downarrow\uparrow\rangle &= \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2};-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle, \quad m = 0,\\
|\downarrow\downarrow\rangle &= \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2};-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle, \quad m = -1.
\end{aligned}$$

(a) (3 puntos) ¿Qué posibles valores de $s = s_1 + s_2$ pueden tomar los estados de spin compuestos por estas dos partículas?

(b) (7 puntos) Defina los siguientes estados $|s, m\rangle$:

$$\begin{aligned}
|1,1\rangle &= |\uparrow\uparrow\rangle,\\
|1,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle),\\
|1,-1\rangle &= |\downarrow\downarrow\rangle,\\
|0,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle).
\end{aligned}$$

Aplique el operador $S_- = S_-^{(1)} + S_-^{(2)}$ a los estados $|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle$ y $|0,0\rangle$. Comente los resultados que obtiene ¿tienen sentido?

(c) (10 puntos) Muestre que $|1,0\rangle$ y $|0,0\rangle$ son estados propios de $S^2 = (\vec{S}^{(1)} + \vec{S}^{(2)}) \cdot (\vec{S}^{(1)} + \vec{S}^{(2)})$, con los valores propios apropiados.

2. Problema 2 - 20 Puntos

Considere un átomo de hidrógeno , el cual se somete a una perturbación debida a un campo magnético externo pequeño por un muy breve tiempo.

(a) (10 puntos) Calcule la corrección energética a primer orden debido al acoplamiento entre el campo externo y el momento magnético orbita del electrón. Recuerde que la energía potencial asociada está dada por $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = B\frac{e}{2m_e}L_z$, donde $\vec{\mu}$ es el momento dipolar magnético. No es necesario que incluya el campo magnético interno resultante del movimiento relativo del protón con respecto al electrón.

(b) (10 puntos) Realice un diagrama sobre el cambio en los niveles de energía sin perturbación y con perturbación y explique las implicaciones.

3. Problema 3 - 30 Puntos

Una partícula se mueve sobre una circunferencia vertical de radio R. Despreciando los efectos de fricción, pero tomando en cuenta la fuerza de gravedad, el Hamiltoniano del sistema es:

$$\hat{H} = \frac{\hat{L}_z^2}{2m_0R^2} + m_0gR\sin\varphi.$$

(a) (15 puntos) Determine las soluciones no perturbadas, así como las correcciones a la energía a primer orden.

(b) (15 puntos) Determine la corrección de la energía a segundo orden.

Trate el término gravitatorio como una perturbación.

Hints: $\psi_m^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}$, establezca la(s) condición(es) de frontera apropiada(s) y evalúe en $\phi = 0$ y $\phi = \frac{\pi}{2k}$.

4. Problema 4 - 30 Puntos

Considere un átomo con un electrón, el cual que se encuentra en un estado inicial $|a\rangle$. El electrón es sujeto a una perturbación senosoidal pequeña, cuyo Hamiltoniato está dado por $H^{'} = V(\vec{r})cos(\omega t)$. Encuentre la probabilidad de transición, a primer orden, de que el electrón se encuentre un estado $|b\rangle$. Asuma que la base de vectores de estado es completa y que los vectores satisfacen la condición de ortonormalidad. Asuma que la frecuencia perturbadora, ω, es cercana a la frecuencia de transición ω_0, tal que $\omega_0 + \omega \gg |\omega_0 - \omega|$.

Examen de Conocimientos - Mecánica Cuántica

Departamento de Física, Universidad de los Andes

2021-II

El examen tiene una duración de 3:00 horas y se debe terminar a las 12:00 horas.

Usted debe responder todos los ejercicios a mano explicando claramente el procedimiento que sigue, de no ser así no se dará puntaje.

El examen se debe desarrollar manera individual. Usted no debe comunicarse con ninguno de sus compañeros ni utilizar ningún documento, libro o apuntes, diferente a las que se le están asignando en el enunciado. Al principio de este documento hay algunas fórmulas que pueden ser útiles para el desarrollo de este examen.

Firmando el examen usted admite que entiende que omitir las reglas estipuladas para este examen será considerado un abuso a la confianza que se ha puesto en usted y tendrá las consecuencias estipuladas en el reglamento general de estudiantes de doctorado de la Universidad.

ECUACIONES

Momento angular:

$$\hat{J}^2 \left| j, m \right\rangle = \hbar^2 j(j+1) \left| j, m \right\rangle,$$

$$\hat{J}_z \left| j, m \right\rangle = \hbar m \left| j, m \right\rangle,$$

$$\hat{\vec{J}}_{\pm} \left| j, m \right\rangle = \sqrt{(j \mp 1)(j \pm m + 1)}\hbar \left| j, m \pm 1 \right\rangle,$$

$$\hat{J}_x = \frac{1}{2}(\hat{J}_+ + \hat{J}_-),$$

$$\hat{J}_y = \frac{1}{2i}(\hat{J}_+ - \hat{J}_-).$$

Evolución temporal:

$$\frac{\partial \left| \psi \right\rangle}{\partial t} = \frac{-i}{\hbar} \hat{H} \left| \psi \right\rangle,$$

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{Q} \rangle = \frac{i}{\hbar} \left\langle \left[\hat{H}, \hat{Q} \right] \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \right\rangle.$$

Átomo de Hidrógeno:

$$E_n = -\frac{13{,}6}{n^2} \text{ eV},$$

$$R_{n\ell}(r) = N_{nl} \left(\frac{2r}{na_0} \right)^{\ell} e^{-r/na_0} L_{n+\ell}^{2\ell+1} \left(\frac{2r}{na_0} \right).$$

$$Y_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}},\quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}cos\theta,\quad Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}sen\theta e^{i\phi},\quad Y_{2,0} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\big(3cos^2\theta - 1\big)$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_{ij}^{*} Y_{kq} d\Omega = \delta_{ik}\delta_{jq},\quad \psi_{n\ell m} = R_{n\ell}Y_{\ell m}$$

$$R_{10} = 2\Big(\frac{1}{a_0}\Big)^{3/2} e^{-r/a_0},\quad R_{21} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\frac{1}{2a_0}\Big)^{3/2}\Big(\frac{r}{a_0}\Big)e^{-r/2a_0},\quad R_{20} = 2\Big(\frac{1}{2a_0}\Big)^{3/2}\Big(1 - \frac{r}{2a_0}\Big)e^{-r/2a_0}$$

$$\int_0^{\infty} r^n e^{-\alpha r} dr = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

Teoría de Perturbaciones:

$$H\psi >= i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi >,\quad H = H^0 + H^{'},\quad H|n >= E_n|n >,\quad E_n = E_n^{(0)} + E_n^{(1)} + E_n^{(2)} + ...$$

$$|n >= |n^{(0)} > + |n^{(1)} > + |n^{(2)} > + ...,\quad E_n^{(1)} =< n|H^{'}|n >,\quad |n^{(1)} >= \sum_{m\neq n}|m^0 > \frac{< m^0|H^{'}|n^0 >}{E_n^0 - E_m^0}$$

$$\Delta E_n^{(2)} = \sum_{m\neq n}\frac{\Big|\Big\langle m|H^{'}|n\Big\rangle\Big|^2}{E_n - E_m}$$

$$H = H^0 + H^{'}(t),\quad c_{i\to f}(t) = \delta_{if} - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} < f^0|H^{'}(t^{'})|i^0 > e^{iw_{fi}t^{'}}dt^{'}$$

$$\oint p dx = \hbar\pi(n + \frac{1}{2})\quad ,\quad [L_+, L_-] = 2\hbar L_z$$

1. Problema 1 - 20 Puntos

Considere dos partículas de espín $1/2$, donde se tienen cuatro posibles combinaciones de la forma $|s_1, s_2; m_1, m_2\rangle$:

$$
\begin{aligned}
|\uparrow\uparrow\rangle &= \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle, \quad m = 1, \\
|\uparrow\downarrow\rangle &= \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle, \quad m = 0, \\
|\downarrow\uparrow\rangle &= \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle, \quad m = 0, \\
|\downarrow\downarrow\rangle &= \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle, \quad m = -1.
\end{aligned}
$$

(a) ¿Qué posibles valores de $s = s_1 + s_2$ pueden tomar los estados de spin compuestos por estas dos partículas?

(b) Defina los siguientes estados $|s, m\rangle$:

$$
\begin{aligned}
|1,1\rangle &= |\uparrow\uparrow\rangle, \\
|1,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle), \\
|1,-1\rangle &= |\downarrow\downarrow\rangle, \\
|0,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle).
\end{aligned}
$$

Aplique el operador $S_- = S_-^{(1)} + S_-^{(2)}$ a los estados $|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle$ y $|0,0\rangle$. Comente los resultados que obtiene ¿tienen sentido?

(c) Muestre que $|1,0\rangle$ y $|0,0\rangle$ son estados propios de $S^2 = (\vec{S}^{(1)} + \vec{S}^{(2)}) \cdot (\vec{S}^{(1)} + \vec{S}^{(2)})$, con los valores propios apropiados.

SOLUCIÓN:

Consideramos un sistema compuesto por dos partículas de spin-$1/2$, las cuales pueden estar en los estados $|1/2, 1/2\rangle = |\uparrow\rangle$ o $|1/2, -1/2\rangle = |\downarrow\rangle$.

(a) Sabemos que para un sistema compuesto por dos partículas con spin-$1/2$, los diferentes posibles valores del número cuántico s del sistema compuesto vienen dados por

$$s = \{s_1 + s_2, s_1 + s_2 - 1, ..., |s_1 - s_2|\},$$

donde s_1 y s_2 son el número cuántico s de las dos partículas que conforman el estado compuesto, es decir que en nuestro caso $s_1 = s_2 = 1/2$, entonces, tenemos que los valores que puede tomar s son

$$s = \{1, 0\}.$$

(b) Ahora, como estamos interesados en actuar con los operadores escalera $\hat{S}_\pm$, recordemos que estos actúan sobre los estados $|s, m\rangle$ de forma que

$$\hat{S}_\pm |s, m\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1) - m(m \pm 1)}\, |s, m \pm 1\rangle,$$

tal que naturalmente $\hat{S}_- |\downarrow\rangle = \hat{S}_+ |\uparrow\rangle = 0$. Ahora, apliquemos el operador $\hat{S}_- = \hat{S}_-^{(1)} + \hat{S}_-^{(2)}$ a los cuatro estados definidos:

- Para el estado $|1,1\rangle$:

$$\hat{S}_- |1,1\rangle = \hat{S}_-^{(1)} |\uparrow\uparrow\rangle + \hat{S}_-^{(2)} |\uparrow\uparrow\rangle = \hbar(|\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle).$$

- Para el estado $|1,0\rangle$:

$$\hat{S}_- |1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{S}_-^{(1)}(|\uparrow\downarrow\rangle + \cancel{|\downarrow\uparrow\rangle}) + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{S}_-^{(2)}(\cancel{|\uparrow\downarrow\rangle} + |\downarrow\uparrow\rangle) = \frac{2}{\sqrt{2}}|\downarrow\downarrow\rangle.$$

- Para el estado $|1,-1\rangle$:

$$\hat{S}_- |1,-1\rangle = \hat{S}_-^{(1)} |\downarrow\downarrow\rangle + \hat{S}_-^{(2)} |\downarrow\downarrow\rangle = 0.$$

- Para el estado $|0,0\rangle$:

$$\hat{S}_- |0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{S}_-^{(1)}(|\uparrow\downarrow\rangle - \cancel{|\downarrow\uparrow\rangle}) + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{S}_-^{(2)}(\cancel{|\uparrow\downarrow\rangle} - |\downarrow\uparrow\rangle) = 0.$$

De estos resultados es inmediato ver que $\hat{S}_- |1,1\rangle \sim |1,0\rangle$, $\hat{S}_- |1,0\rangle \sim |1,-1\rangle$ y $\hat{S}_- |1,-1\rangle = 0$. Vemos que estos resultados son justo como esperaríamos que actuara el operador $\hat{S}_-$ sobre una partícula de spin-1, de forma que m toma valores de $m = \{1,0,-1\}$, tal que $\hat{S}_-$ baja en uno el valor de m, hasta llegar al estado con $m = 0$, el cual al ser el estado con menor valor de m no puede bajar más, dando cero al actuar el operador $\hat{S}_-$ sobre este.

(c) Veamos como actúa el operador $\hat{S}^2$ sobre los estados $|1,0\rangle$ y $|0,0\rangle$. Para esto veamos la forma del operador:

$$\hat{S}^2 = (\hat{\vec{S}}^{(1)} + \hat{\vec{S}}^{(2)}) \cdot (\hat{\vec{S}}^{(1)} + \hat{\vec{S}}^{(2)}) = (\hat{S}^{(1)})^2 + (\hat{S}^{(2)})^2 + 2\hat{\vec{S}}^{(1)} \cdot \hat{\vec{S}}^{(2)},$$

donde sabemos que el operador $\hat{S}^2$ actúa de la forma $\hat{S}^2 |s,m\rangle = \hbar^2 s(s+1) |s,m\rangle$. Además para partículas de spin-1/2 sabemos que los operadores $\hat{S}_x, \hat{S}_y$ y $\hat{S}_z$ actúan sobre los estados $|\uparrow\rangle$ y $|\downarrow\rangle$ de la forma $\hat{S}_x |\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle, \hat{S}_x |\downarrow\rangle = \frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle, \hat{S}_y |\uparrow\rangle = i\frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle, \hat{S}_y |\downarrow\rangle = -i\frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle, \hat{S}_z |\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle$ y $\hat{S}_z |\downarrow\rangle = -\frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle$. Con todos estos resultados, veamos como actúa el operador $\hat{S}^2$ sobre ambos estados:

- Sobre el estado $|1,0\rangle$:

$$\hat{S}^2 |1,0\rangle = \left[(\hat{S}^{(1)})^2 + (\hat{S}^{(2)})^2 + 2\hat{S}_x^{(1)}\hat{S}_x^{(2)} + 2\hat{S}_y^{(1)}\hat{S}_y^{(2)} + 2\hat{S}_z^{(1)}\hat{S}_z^{(2)}\right]\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle).$$

Veamos a qué son iguales los diferentes términos:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{S}^{(1)})^2(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) = \frac{3\hbar^2}{4\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle),$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{S}^{(2)})^2(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) = \frac{3\hbar^2}{4\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle),$$
$$\frac{2}{\sqrt{2}}\hat{S}_x^{(1)}\hat{S}_x^{(2)}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) = \frac{2}{\sqrt{2}}(\hat{S}_x^{(1)}\hat{S}_x^{(2)}|\uparrow\downarrow\rangle + \hat{S}_x^{(1)}\hat{S}_x^{(2)}|\downarrow\uparrow\rangle) = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hbar^2}{4}|\downarrow\uparrow\rangle + \frac{\hbar^2}{4}|\uparrow\downarrow\rangle\right),$$
$$\frac{2}{\sqrt{2}}\hat{S}_y^{(1)}\hat{S}_y^{(2)}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) = \frac{2}{\sqrt{2}}(\hat{S}_y^{(1)}\hat{S}_y^{(2)}|\uparrow\downarrow\rangle + \hat{S}_y^{(1)}\hat{S}_y^{(2)}|\downarrow\uparrow\rangle) = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hbar^2}{4}|\downarrow\uparrow\rangle + \frac{\hbar^2}{4}|\uparrow\downarrow\rangle\right),$$
$$\frac{2}{\sqrt{2}}\hat{S}_z^{(1)}\hat{S}_z^{(2)}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) = \frac{2}{\sqrt{2}}(\hat{S}_z^{(1)}\hat{S}_z^{(2)}|\uparrow\downarrow\rangle + \hat{S}_z^{(1)}\hat{S}_z^{(2)}|\downarrow\uparrow\rangle) = -\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hbar^2}{4}|\downarrow\uparrow\rangle + \frac{\hbar^2}{4}|\uparrow\downarrow\rangle\right).$$

Juntando todos estos resultados tenemos que

$$\hat{S}^2 |1,0\rangle = \frac{2\hbar^2}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) = 2\hbar^2 |1,0\rangle.$$

Vemos que efectivamente este estado cumple que $\hat{S}^2 |s,m\rangle = \hbar^2 s(s+1) |s,m\rangle$, para $s = 1$ y $m = 0$.

- Sobre el estado $|0,0\rangle$, es fácil ver mediante un procedimiento similar, que se cumple que

$$\hat{S}^2 |0,0\rangle = 0.$$

2. Problema 2 - 20 Puntos

Considere un átomo de hidrógeno , el cual se somete a una perturbación debida a un campo magnético externo pequeño por un muy breve tiempo.

(a) (10 puntos) Calcule la corrección energética a primer orden debido al acoplamiento entre el campo externo y el momento magnético orbita del electrón. Recuerde que la energía potencial asociada está dada por $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = B\frac{e}{2m_e}L_z$, donde $\vec{\mu}$ es el momento dipolar magnético. No es necesario que incluya el campo magnético interno resultante del movimiento relativo del protón con respecto al electrón.

(b) (5 puntos) Realice un diagrama sobre el cambio en los niveles de energía sin perturbación y con perturbación.

SOLUCIÓN:

(a) En virtud de la teoría cuántica no-relativista, debido a que tenemos una perturbación en un átomo de hidrógeno debido a un campo magnético débil, podemos considerar la corrección energética a través del **efecto Zeeman en un campo magnético débil** correspondiente un acople con el momento magnético orbital del electrón (despreciando el efecto del momento angular del spin), tal que, considerando que el campo magnético uniforme tiene dirección $\hat{z}$, el Hamiltoniano perturbativo es

$$H' = U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\left(\frac{-e}{2m_e}\right)\left(\vec{L} \cdot \vec{B}\right) = \frac{eB}{2m_e}L_z.$$

Así, en virtud de las funciones de onda para el átomo de hidrógeno, $\psi_{(n,l,m_l)}$, obtenemos que la corrección energética es dada por

$$\Delta E_{(n,l,m_l)} = \left\langle n\,l\,m_l|H'|n\,l\,m_l\right\rangle = \frac{eB}{2m_e}\left\langle n\,l\,m_l|L_z|n\,l\,m_l\right\rangle = \frac{eB}{2m_e}(m_l\hbar) = \mu_B m_l B,$$

donde $\mu_B = e\hbar/2m_e$ es el magnetón de Bohr. Sin incluir los efectos de la estructura fina dentro de nuestra corrección energética, tenemos que los niveles de energía del átomo de hidrógeno estarán cuantizados de la siguiente forma:

$$E_{(n,l,m_l)} = E^{(0)}_{(n,l,m_l)} + \Delta E_{(n,l,m_l)} = -\frac{13{,}6\,\text{eV}}{n^2} + \mu_B m_l B.$$

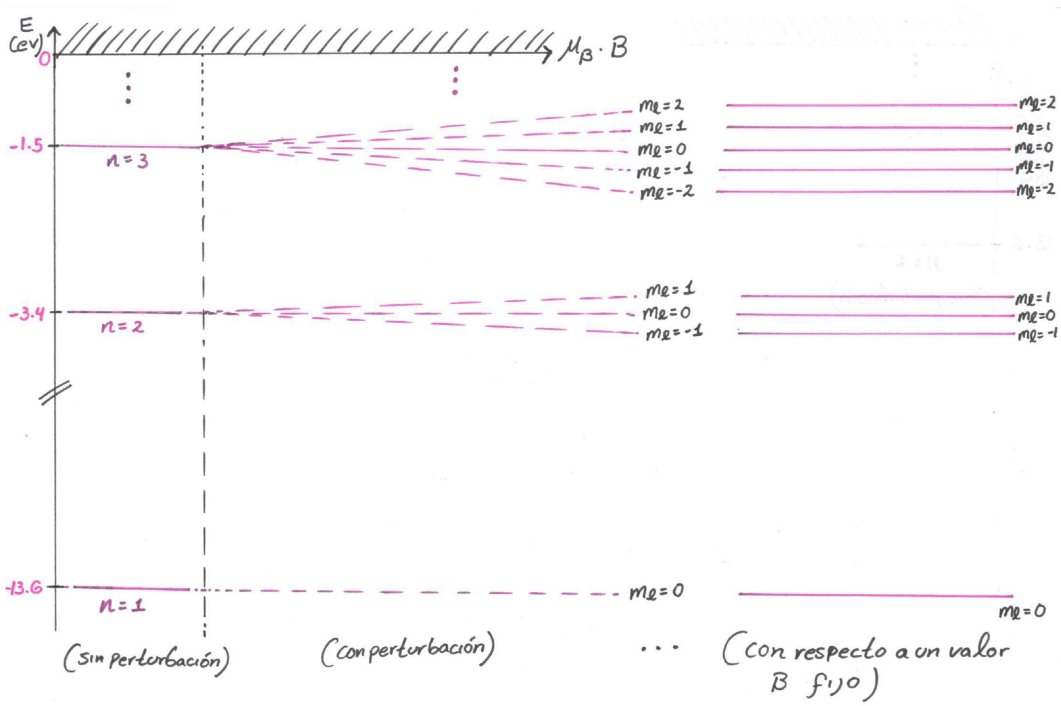
(b) Ver imagen:

3. Problema 3 - 30 Puntos

Una partícula se mueve sobre una circunferencia vertical de radio R. Despreciando los efectos de fricción, pero tomando en cuenta la fuerza de gravedad, el Hamiltoniano del sistema es:

$$\hat{H} = \frac{\hat{L}_z^2}{2m_0R^2} + m_0gR\sin\varphi.$$

(a) (15 puntos) Determine las soluciones no perturbadas, así como las correcciones a la energía a primer orden.



(b) (15 puntos) Determine la corrección de la energía a segundo orden.

Trate el término gravitatorio como una perturbación.

Hints: $\psi_m^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}$, establezca la(s) condición(es) de frontera apropiada(s) y evalúe en $\phi = 0$ y $\phi = \frac{\pi}{2k}$.

SOLUCIÓN:

(a) Sin considerar el potencial gravitatorio dentro de la solución no perturbada, nuestra partícula se mueve libremente sin fricción sobre la circunferencia de radio R debido a un ángulo de referencia φ, de manera que la condición de frontera nos dice que $\psi(\varphi) = \psi(\varphi + 2\pi)$. Los estados estacionarios se hallan por medio de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo con potencial nulo:

$$\hat{H}^{(0)}\psi = E\psi \implies \left(\frac{\hat{L}_z^2}{2m_0R^2}\right)\psi = E\psi \implies -\frac{\hbar^2}{2m_0R^2}\frac{d^2\psi}{d\varphi^2} = E\psi,$$

en tanto que, en coordenadas esféricas, $\hat{L}_z^2 = -\hbar^2 \frac{d^2}{d\varphi^2}$. La solución para esta ecuación diferencial es dada por

$$\psi(x) = Ae^{ik\varphi} + Be^{-ik\varphi}, \quad k = \sqrt{(2m_0R^2)E/\hbar^2}.$$

Luego, la condición de frontera nos asegura que, para todo φ,

$$Ae^{ik\varphi}e^{2\pi ik} + Be^{-ik\varphi}e^{-2\pi ik} = Ae^{ik\varphi} + Be^{-ik\varphi}.$$

En particular, para $\varphi = 0$ se tiene que

$$Ae^{2\pi ik} + Be^{-2\pi ik} = A + B,$$

y para $\varphi = \pi/2k$,

$$Ae^{i\pi/2}e^{2\pi ik} + Be^{-i\pi/2}e^{-2\pi ik} = Ae^{i\pi/2} + Be^{-i\pi/2} \implies Ae^{2\pi ik} + Be^{-i\pi}e^{-2\pi ik} = A + Be^{-i\pi}$$
$$\implies Ae^{2\pi ik} - Be^{-2\pi ik} = A - B,$$

de manera que se concluye por los dos resultados previos que

$$Ae^{2\pi ik} = A.$$

Para evitar soluciones triviales, consideramos que $A \neq 0$, de forma tal que $e^{2\pi ik} = 1$ implica que $2\pi k = 2\pi n \implies k = n$, donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ (considerando el caso en que $B \neq 0$, se llega al mismo resultado). Se concluye, entonces, que

$$\psi_n(\varphi) = Ae^{in\varphi}.$$

Luego, normalizando la función de onda, encontramos que

$$\int_0^{2\pi} |\psi_n(\varphi)|^2 \, d\varphi = 1 \implies A^2 \int_0^{2\pi} \left|e^{in\varphi}\right|^2 d\varphi = 1 \implies A^2 \int_0^{2\pi} (1) d\varphi = 1 \implies A^2(2\pi) = 1$$
$$\implies A^2 = \frac{1}{2\pi} \implies A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

y consecuentemente,

$$\psi_n(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\varphi}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots .$$

Las energías del sistema están cuantizadas de la siguiente forma:

$$E_n = \frac{\hbar^2 n^2}{2m_0 R^2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots .$$

Ahora, considerando el término $V(\varphi) = m_0 g R \sin\varphi$ como un potencial perturbativo, encontramos que, a primer orden, la corrección energética está dada por

$$\Delta E_n^{(1)} = \langle n|V(\varphi)|n\rangle = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi}\right) \left(e^{in\varphi}\right) \left(e^{-in\varphi}\right) (m_0 g R \sin\varphi) \, d\varphi = \frac{m_0 g R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin\varphi \; d\varphi = 0.$$

Así, la energía de cada función de onda es, a primer orden, bajo este potencial perturbativo,

$$E_n' = E_n + \Delta E_n^{(1)} = E_n + (0) = \frac{\hbar^2 n^2}{2m_0 R^2}.$$

(b) La corrección energética a segundo orden está dada por

$$\Delta E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle m|V(\varphi)|n\rangle|^2}{E_n - E_m}.$$

Por un lado, calculamos que

$$\langle m|V(\varphi)|n\rangle = \frac{m_0 g R}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\varphi} \sin\varphi \, d\varphi = \begin{cases} \pm i \left(\frac{m_0 g R}{2}\right), & (m-n) = \pm 1 \\ 0, & \text{de otra manera,} \end{cases}$$

de manera que se deduce que, para todo $m \neq n$,

$$|\langle m|V(\varphi)|n\rangle|^2 = \begin{cases} \left(\frac{m_0 g R}{2}\right)^2, & m = n \pm 1 \\ 0, & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

Por tanto, llegamos a que

$$\Delta E_n^{(2)} = \left(\frac{m_0 g R}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{E_n - E_{n-1}} + \frac{1}{E_n - E_{n+1}}\right) = \left(\frac{m_0 g R}{2}\right)^2 \left(\frac{2m_0 R^2}{\hbar^2}\right) \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$
$$= \left(\frac{m_0 g R}{2}\right)^2 \left(\frac{2m_0 R^2}{\hbar^2}\right) \left(\frac{2}{4n^2-1}\right) = \left(\frac{m_0 g R}{\hbar}\right)^2 \left(\frac{m_0 R^2}{4n^2-1}\right).$$

Así, la energía de cada función de onda es, a segundo orden, bajo este potencial perturbativo,

$$E_n' = E_n + \Delta E_n^{(1)} + \Delta E_n^{(2)} = \frac{\hbar^2 n^2}{2m_0 R^2} + (0) + \left(\frac{m_0 g R}{\hbar}\right)^2 \left(\frac{m_0 R^2}{4n^2-1}\right) = \frac{\hbar^2 n^2}{2m_0 R^2} + \left(\frac{m_0 g R}{\hbar}\right)^2 \left(\frac{m_0 R^2}{4n^2-1}\right).$$

4. Problema 4 - 30 Puntos

Considere un átomo con un electrón, el cual que se encuentra en un estado inicial $|a>$. El electrón es sujeto a una perturbación senosoidal pequeña, cuyo Hamiltoniato está dado por $H^{'} = V(\vec{r})cos(\omega t)$. Encuentre la probabilidad de transición, a primer orden, de que el electrón se encuentre un estado $|b>$. Asuma que la base de vectores de estado es completa y que los vectores satisfacen la condición de ortonormalidad. Asuma que la frecuencia perturbadora, ω, es cercana a la frecuencia de transición ω_0, tal que $\omega_0 + \omega \gg |\omega_0 - \omega|$.

SOLUCIÓN:

La amplitud de transición, a primer orden, entre un estado inicial $|\psi_i\rangle$ y un estado final $|\psi_f\rangle$ está dada por

$$C_{i\to f} = \delta_{if} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t} \langle \psi_f | H'(t') | \psi_i \rangle e^{i\omega_0 t'} \, dt',$$

donde ω_0 es la frecuencia angular de transición. Por tanto, la amplitud de transición, a primer orden, entre el estado inicial $|a\rangle$ y el estado final $|b\rangle$ es

$$C_{a\to b}^{(1)} = \frac{-i}{\hbar} \int_0^t \left\langle b \left| V(\vec{r}) \cos\big(\omega t'\big) \right| a \right\rangle e^{i\omega_0 t'} \, dt' = \frac{-i}{\hbar} \int_0^t \left\langle b \left| V(\vec{r}) \right| a \right\rangle \left(e^{i\omega_0 t'} \cos\big(\omega t'\big)\right) \, dt'$$

$$= \frac{-i}{\hbar} \int_0^t V_{ab} \left(e^{i\omega_0 t'} \left[\frac{1}{2} \left(e^{i\omega t'} + e^{-i\omega t'} \right) \right] \right) dt' = \frac{-iV_{ab}}{2\hbar} \int_0^t \left(e^{i(\omega_0+\omega)t'} + e^{i(\omega_0-\omega)t'} \right) dt'$$

$$= \frac{-iV_{ab}}{2\hbar} \left[\left(\frac{-ie^{i(\omega_0+\omega)t'}}{\omega_0+\omega} \right) + \left(\frac{-ie^{i(\omega_0-\omega)t'}}{\omega_0-\omega} \right) \right]_0^t .$$

No obstante, como $\omega_0 + \omega \gg |\omega_0 - \omega|$, resulta posible despreciar el primer término de la integral, de manera que

$$C^{(1)}_{a\to b} \approx \frac{-iV_{ab}}{2\hbar} \left[\frac{-ie^{i(\omega_0-\omega)t'}}{\omega_0-\omega} \right]_0^t = \frac{-V_{ab}}{2\hbar\left(\omega_0-\omega\right)} \left(e^{i(\omega_0-\omega)t} - 1 \right).$$

Por tanto, la probabilidad de transición, a primer orden, entre los estados $|a\rangle$ y $|b\rangle$ es

$$P^{(1)}_{a\to b} = \left| C^{(1)}_{a\to b} \right|^2 = \left| \frac{-V_{ab}}{2\hbar\left(\omega_0-\omega\right)} \right|^2 \left| \left(e^{i(\omega_0-\omega)t} - 1 \right) \right|^2$$

$$= \left(\frac{V_{ab}}{2\hbar\left(\omega_0-\omega\right)} \right)^2 \left| e^{i(\omega_0-\omega)t/2} \left(e^{i(\omega_0-\omega)t/2} - e^{-i(\omega_0-\omega)t/2} \right) \right|^2$$

$$= \left(\frac{V_{ab}}{2\hbar\left(\omega_0-\omega\right)} \right)^2 \left| e^{i(\omega_0-\omega)t/2} \left[2i \sin\left\{ (\omega_0-\omega)\frac{t}{2} \right\} \right] \right|^2$$

$$= \left(\frac{V_{ab}}{2\hbar\left(\omega_0-\omega\right)} \right)^2 \left(2 \sin\left\{ (\omega_0-\omega)\frac{t}{2} \right\} \right)^2$$

$$= \left(\frac{V_{ab}}{\hbar\left(\omega_0-\omega\right)} \right)^2 \sin^2\left\{ (\omega_0-\omega)\frac{t}{2} \right\}.$$

Instrucciones:

- El examen tiene una duración de 3:00 horas y se debe terminar a las 12:00 horas.
- Usted debe responder todos los ejercicios a mano explicando claramente el procedimiento que sigue, de no ser así no se dará puntaje.
- El examen se debe desarrollar manera individual. Usted no debe comunicarse con ninguno de sus compañeros ni utilizar ningún documento, libro o apuntes, diferente a las que se le están asignando en el enunciado. Al final de este documento hay algunas fórmulas que pueden ser útiles para el desarrollo de este examen.
- Firmando el examen usted admite que entiende que omitir las reglas estipuladas para este examen será considerado un abuso a la confianza que se ha puesto en usted y tendrá las consecuencias estipuladas en el reglamento general de estudiantes de doctorado de la Universidad.

1. (20 puntos) ENERGÍA LIBRE DE HELMHOLTZ

Un sistema uniforme tiene *N* partículas en un volumen V. La energía libre de Helmholtz F está dada por $F = E - TS$, donde E es la energía interna, T es la temperatura absoluta, y S es la entropía. Use la primera y segunda ley de la termodinámica para demostrar:

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N}, \quad p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N}, \quad \mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V}$$

2. (20 puntos) PROBABILIDAD QUE UNA MOLÉCULA ESCAPE DE LA TIERRA

Las moléculas en atmósferas planetarias están continuamente filtrándose en el espacio interestelar. La trayectoria de cada molécula es un paseo aleatorio, con un tamaño de paso que crece con la altura a medida que el aire se vuelve más diluido. Consideremos un modelo crudo de un gas ideal para esta fuga, sin colisiones excepto con el suelo. Consideremos la fuga de moléculas de oxígeno, que las simplificaremos como si fueran monoatómicas con masa $m_{O2}=2m_O$ (es decir, ignoramos sus movimientos vibracionales y rotacionales, lo cual no es problemático ya que solo consideraremos la trayectoria de su centro de masa). Asumiendo que la distribución de probabilidad de su momento en *z* está dada por la distribución de Maxwell-Boltzmann,

$$\rho(p_z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi m k_B T}} e^{-p_z^2/2mk_BT}$$

a. Calcule la velocidad RMS vertical, $\sqrt{\langle v_z^2 \rangle}$ a partir de la distribución de probabilidad de momento. Calcule el valor numérico a T=300 K (orden de magnitud).

b. Si una molécula comenzara a moverse en la superficie de la tierra con esta velocidad, hacia arriba, qué altura máxima alcanzaría? Calcule el valor numérico (orden de magnitud).

c. Calcule la probabilidad que la molécula tenga una velocidad vertical mayor que la velocidad de escape de la tierra (v_{esc}~10 km/s).

3. (30 puntos) PROPIEDADES TÉRMICAS DE AISLANTES PARAMAGNÉTICOS

Los aislante paramagnéticos permiten realizar un tipo de enfriamiento llamado "enfriamiento adiabático con campo", el cual consiste en reducir la temperatura del sólido, no a partir de extraer calor a través de reducir la energía cinética de la red cristalina (fonones), sino a partir de un aumento del campo magnético aplicado (afectando la energía de los momentos magnéticos directamente). Este tipo de enfriamiento es posible ya que la contribución paramagnética de la entropía de los sólidos depende exclusivamente del la cantidad H/T, donde H es el campo externo y T la temperatura. Ya que un enfriamiento adiabático implica una entropía constante, H/T debe ser también constante, y por ende aumentar el campo en cierta fracción implica reducir la temperatura en la misma fracción. Este tipo de técnicas son ampliamente utilizadas para enfriar sólidos en regímenes de temperaturas bajas (muy por debajo de la temperatura de Debye del sólido), generalmente para enfriar desde un orden de un par de Kelvin hasta mili-Kelvin. En este problema ustedes van a demostrar todas estas afirmaciones, para comprobar que esta técnica, que suena mágica, es real!

Para un conjunto de iones magnéticos no interactuantes y con un momento magnético neto J, el Hamiltoniano que contribuye cada uno de esos iones (parte magnética), está dado por $\mathcal{H} = \mu_B\mu_0\tilde{g}\vec{J}\cdot\vec{H}$, donde $\tilde{g} = \tilde{g}(JLS)$ es el factor-g efectivo, $\vec{J}$ es el momento magnético total, y $\vec{H}$ es el campo externo (asuma que $\vec{H} = H\hat{z}$).

a. Demuestre que la energía libre por ion paramagnético, $F = -\frac{1}{\beta}\ln(Z)$, donde Z es la función de partición de un ion, tiene la forma $F = \frac{1}{\beta}\Psi(\beta H)$, donde $\beta = 1/k_BT$ y $\Psi(\beta H)$ se refiere a una función del producto βH, ó H/T. (J_z puede tomar valores de *-J, -J+1,..., J-1, +J*, sin embargo, no necesita desarrollar la suma explícita sobre J_z que trae consigo Z para hacer la demostración de este punto).

b. Demuestre que la entropía por ion tiene la forma $S = k_B\left[-\Psi(\beta H) + \beta H\frac{d\Psi(\beta H)}{d(\beta H)}\right]$ (recuerde la expresión para la entropía del punto 1).

c. Muestre que el calor específico a campo constante, $c_H = \frac{1}{V}T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_H$, está dado por $c_H = \frac{H^2\mu_0\chi}{T}$, donde χ es la susceptibilidad de Curie que contribuye un ion paramagnético, y que está relacionada con la energía libre por ion como $\chi = -\frac{1}{V\mu_0}\frac{\partial^2 F}{\partial H^2}$.

d. La susceptibilidad de Curie para un sistema de N iones paramagnéticos no interactuantes está dada por $\chi = \frac{1}{3}\frac{N}{V}\mu_0(\tilde{g}\mu_B)^2\frac{J(J+1)}{k_BT}$. Demuestre que el calor específico a campo constante para este sistema de N iones está dado por $c_H = \frac{1}{3}\frac{N}{V}k_BJ(J+1)\left(\frac{\tilde{g}\mu_B\mu_0H}{k_BT}\right)^2$

e. Estimando la contribución vibracional de la red cristalina al calor específico según el modelo de Debye, $c_v = 234\frac{N}{V}k_B\left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3$ donde Θ_D es la temperatura de Debye, demuestre que la contribución de la red cristalina al calor específico es menor que la contribución de los momentos magnéticos de la red por debajo de una temperatura $T_0 = \left(\frac{J(J+1)}{702}\right)^{1/5}\left(\frac{\tilde{g}\mu_B\mu_0H}{k_B\Theta_D}\right)^{2/5}\Theta_D$. Esto quiere decir, que para el régimen de bajas temperaturas es más efectivo para reducir la temperatura el reducir la energía asociada al magnetismo de los iones paramagnéticos, que el reducir la asociada a las vibraciones de la red cristalina ☺.

4. (30 puntos) LA ESTADÍSTICA DE LOS FONONES

La energía potencial de cohesión entre iones de una red cristalina monoatómica 3D tiene una forma aproximadamente cuadrática en los desplazamientos con respecto a las posiciones de equilibrio de cada uno de los iones de la red. Es decir, la energía potencial tiene una forma armónica, y el modelo que describe a la red de iones vibrantes es el de N osciladores armónicos acoplados, donde N es el número total de iones de la red, con 3N soluciones independientes, o modos normales de vibración. En la descripción cuántica de este problema, el Hamiltoniano será el de 3N osciladores armónicos independientes, es decir,

$$H = H_0 + \sum_{i=1}^{3N} \left(a_i^{\dagger} a_i + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_i$$

Donde $a_i^{\dagger}$ y a_i son los operadores creación y aniquilación, respectivamente, de un cuanto de excitación del modo de vibración normal i-ésimo, o un *fonón* del modo i-ésimo, y ω_i es la frecuencia de dicho modo. Los eigenvalores del Hamiltoniano serán entonces:

$$\varepsilon_i = \left(n_i + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_i$$

Donde n_i es el número de fonones en el modo i-ésimo.

a. Escriba la función de partición correspondiente al modo i-ésimo de este sistema. Simplifique su expresión desarrollando la sumatoria, y encontrando una expresión analítica para la misma (recuerde la expresión para la serie geométrica)

b. A partir de esta función de partición, calcule la energía promedio de cada modo i-ésimo de vibración, a una temperatura T.

c. De acuerdo a la expresión para la energía, determine el número promedio de fonones del modo i-ésimo a una temperatura T.

d. De acuerdo a la expresión del punto c, qué tipo de estadística siguen los fonones?

e. Calcule la contribución al calor específico del modo i-ésimo.

f. En el régimen de altas temperaturas, el calor específico del modo i-ésimo es el esperado? Tenga en cuenta la Ley de Dulong-Petit (clásica), que predice un calor específico de $3Nk_B$ para un sólido con N átomos.

FÓRMULAS DE UTILIDAD

$$dE = \delta Q - \delta W \quad : \text{ Primera ley de la termodinámica}$$

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \quad : \text{ Segunda ley de la termodinámica}$$

$$Z = \sum_i e^{-\varepsilon_i/k_B T} = \sum_i e^{-\beta\varepsilon_i} \quad : \text{ Función de partición}$$

$$\langle \varepsilon \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \quad : \text{ Energía promedio}$$

$$c_V = \left(\frac{\partial \langle \varepsilon \rangle}{\partial T}\right)_V \quad : \text{ Calor específico a V cte}$$

$$\langle n_i \rangle = \begin{cases} \left[e^{(\varepsilon_i - \mu)/k_B T} - 1\right]^{-1} & : \text{Estadística de Bose-Einstein} \\ \left[e^{(\varepsilon_i - \mu)/k_B T} + 1\right]^{-1} & : \text{Estadística de Fermi-Dirac} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+b)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{\kappa}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{e^{-\kappa^2}}{2\kappa}$$

$$\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{(2n-1)!!}{a^n 2^{n+1}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad : \text{ Serie geométrica}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

(1) ENERGÍA LIBRE DE HELMHOLTZ.

$F = E - TS$.

1ra Ley $\rightarrow$ $dE = -\delta W + \delta Q$.

donde. $\delta W = p dV - \mu dN$.

2da Ley $\rightarrow$ $\delta Q = T ds$.

entonces: $dE = T ds - p dV + \mu dN$.

de modo que E es una función natural de las variables s, V, N.

Ahora: $F = E - TS$.

de modo que $dF = dE - T ds - s dT$.

$$dF = (\cancel{T ds} - p dV + \mu dN) - \cancel{T ds} - s dT.$$

$$dF = - s dT - p dV + \mu dN.$$

de modo que:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N} = - S. \rightarrow \boxed{S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N}}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N} = - p \rightarrow \boxed{p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N}}$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V} = \mu}$$

y F es función natural de las variables T, V, N.

2) PROB. QUE MOLÉCULA ESCAPE DE LA TIERRA.

$$\rho(P_z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi m K_B T}}\exp\{-P_z^2/2mK_BT\}.$$

a). $$\langle v_z^2\rangle=\frac{1}{m_{O_2}^2}\langle P_z^2\rangle=\frac{1}{m_{O_2}}\frac{\int_{-\infty}^{\infty}P_z^2\rho(P_z)dP_z}{\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\rho(P_z)\,dP_z}_{1}}$$

$$\langle v_z^2\rangle=\frac{1}{m_{O_2}^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi m_{O_2}K_BT}}\int_{-\infty}^{\infty}P_z^2\exp\{-P_z^2/2m_{O_2}K_BT\}dP_z.$$

$$\langle v_z^2\rangle=\frac{1}{m_{O_2}^2}\frac{\sqrt{2\pi(m_{O_2}K_BT)^3}}{\sqrt{2\pi m_{O_2}K_BT}}=\frac{K_BT}{m_{O_2}}$$

$$v_{RMS}=\sqrt{\langle v_z^2\rangle}=\sqrt{\frac{K_BT}{m_{O_2}}}\sim 3\cdot 10^4\,cm/s.\quad a\ T=300K$$

b) $$\frac{1}{2}\cancel{m_{O_2}}v_{RMS}^2=\cancel{m_{O_2}}gH\ \rightarrow\ H=\frac{\langle v_z^2\rangle}{2g}\sim 4\cdot 10^5\,cm\ \sim 4\,Km.$$

c) $$P=\int_{mv_{esc}}^{\infty}\rho(P_z)dP_z=\int_{mv_{esc}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi m_{O_2}K_BT}}Exp\left\{-\frac{P_z^2}{2mK_BT}\right\}dP_z.$$

$$x^2=\frac{P_z^2}{2mK_BT}\rightarrow x=\frac{P_z}{\sqrt{2mK_BT}}$$
$$dx=\frac{dP_z}{\sqrt{2mK_BT}}$$

$$P=\int_{\frac{mv_e}{\sqrt{2mK_BT}}}^{\infty}\frac{\sqrt{2mK_BT}}{\sqrt{2\pi mK_BT}}e^{-x^2}dx.$$

pero $$\int_t^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{e^{-t^2}}{2t}.$$

$$P=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{Exp\{-mv_{esc}^2/(2mK_BT)\}}{2\frac{mv_{esc}}{\sqrt{2mK_BT}}}=\sqrt{\frac{K_BT}{2\pi m v_{esc}^2}}Exp\left\{\frac{-mv_{esc}^2}{2K_BT}\right\}.$$

$P\cong(0.01)Exp\{-774\}.\sim 6\cdot 10^{-339}.$ $\Big\}$ no hay mucho peligro de que nuestro O_2 escape!

(3) PROPIEDADES TÉRMICAS DE AISLANTES PARAMAGNÉTICOS.

$$\mathcal{H} = \mu_B \mu_0 \tilde{g} \vec{J} \cdot \vec{H} \quad , \quad \vec{H} = H\hat{z} \rightarrow \mathcal{H} = \mu_B \mu_0 \tilde{g} J_z H.$$

a) $F = -\frac{1}{\beta} \ln Z$

$$Z = \sum_{J_z=-J}^{J} \exp\{-\beta \mu_B \mu_0 \tilde{g} J_z H\}.$$

$$Z = \sum_{J_z=-J}^{J} \exp\{-\mu_B \mu_0 \tilde{g} J_z (\beta H)\}.$$

$$\ln Z = \ln \left\{ \sum_{J_z=-J}^{J} \exp\{-\underbrace{\mu_B \mu_0 \tilde{g}}_{\text{ctes.}} J_z \underbrace{(\beta H)}_{\text{variable}}\} \right\} = -\Psi(\beta H).$$

$$\boxed{F = +\frac{1}{\beta} \Psi(\beta H).}$$

b) $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N} = -\frac{\partial F}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial T}$, $\beta = \frac{1}{K_B T} \rightarrow \frac{\partial \beta}{\partial T} = -\frac{1}{K_B T^2} \cdot \frac{K_B}{K_B}$
$= -K_B \beta^2.$

$$S = K_B \beta^2 \left(\frac{\partial F}{\partial \beta}\right).$$

$$S = K_B \beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{+\frac{1}{\beta} \Psi(\beta H)\right\} = K_B \beta^2 \left\{-\frac{\Psi(\beta H)}{\beta^2} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial \Psi(\beta H)}{\partial \beta}\right\}.$$

$$\boxed{S = K_B \left\{-\Psi(\beta H) + \beta H \frac{\partial \Psi(\beta H)}{\partial (\beta H)}\right\}}$$

c) $C_H = \frac{1}{V} T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_H = \frac{1}{V} T \left(\frac{\partial S}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial T}\right)_H = -K_B \beta^2 \frac{T}{V} \left(\frac{\partial S}{\partial \beta}\right)_H.$

$$C_H = -K_B \beta^2 \frac{T}{V} \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ K_B \left[-\Psi(\beta H) + \beta H \frac{\partial \Psi(\beta H)}{\partial (\beta H)}\right]\right\}.$$

$$C_H = -K_B^2\beta^2\frac{T}{V}\left\{-\frac{\partial\varphi(\beta H)}{\partial\beta} + H\frac{\partial\varphi(\beta H)}{\partial(\beta H)} + \beta H\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{\partial\varphi(\beta H)}{\partial(\beta H)}\right\}.$$

$$C_H = -K_B^2\beta^2\frac{T}{V}\left\{\cancel{-H\frac{\partial\varphi(\beta H)}{\partial(\beta H)}} + \cancel{H\frac{\partial\varphi(\beta H)}{\partial(\beta H)}} + \beta H\frac{\partial}{\partial(\beta H)}\cdot\frac{\partial\varphi(\beta H)}{\partial\beta}\right\}.$$

$$C_H = -K_B^2\beta^2\frac{T}{V}\cdot\beta H\cdot H\frac{\partial^2\varphi(\beta H)}{\partial(\beta H)^2} = -\frac{\cancel{K_B^2}\cancel{T}H^2}{\cancel{K_B^2}T^2V}\cdot\beta\frac{\partial^2\varphi(\beta H)}{\partial(\beta H)^2}$$

pero: $\frac{\partial F}{\partial H} = \frac{\partial}{\partial H}\left(\frac{1}{\beta}\varphi(\beta H)\right) = \frac{1}{\beta}\frac{\partial\varphi(\beta H)}{\partial H} = \frac{\cancel{\beta}}{\cancel{\beta}}\frac{\partial\varphi(\beta H)}{\partial(\beta H)}$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial H^2} = \frac{\partial}{\partial H}\left(\frac{\partial F}{\partial H}\right) = \frac{\partial}{\partial H}\left(\frac{\partial\varphi(\beta H)}{\partial(\beta H)}\right) = \frac{\partial}{\partial(\beta H)}\frac{\partial\varphi(\beta H)}{\partial H} = \beta\frac{\partial^2\varphi(\beta H)}{\partial(\beta H)^2}.$$

$C_H = -\frac{H^2}{TV}\frac{\partial^2 F}{\partial H^2}$, pero $\chi = -\frac{1}{V\mu_0}\frac{\partial^2 F}{\partial H^2} \rightarrow -\frac{1}{V}\frac{\partial^2 F}{\partial H^2} = \mu_0\chi$

$$\boxed{C_H = \frac{H^2}{T}\mu_0\chi}$$

d) $\chi = \frac{1}{3}\frac{N}{V}\mu_0(\tilde{g}\mu_B)^2\frac{J(J+1)}{K_BT}$.

$$C_H = \frac{H^2}{T}\mu_0\cdot\frac{1}{3}\frac{N}{V}\mu_0(\tilde{g}\mu_B)^2\frac{J(J+1)}{K_BT}.$$

$$\boxed{C_H = \frac{1}{3}\frac{N}{V}K_BJ(J+1)\left[\frac{g\mu_B\mu_0 H}{K_BT}\right]^2}$$

e) $C_{vibrac.} < C_H$

$$234\frac{\cancel{N}}{\cancel{V}}\cancel{K_B}\left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3 < \frac{1}{3}\frac{\cancel{N}}{\cancel{V}}\cancel{K_B}J(J+1)\left[\frac{\tilde{g}\mu_B\mu_0 H}{K_BT}\right]^2.$$

$$\left.\left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3\frac{T^2}{\Theta_D^2} < \frac{J(J+1)}{3*234}\left[\frac{\tilde{g}\mu_B\mu_0 H}{K_B\Theta_D}\right]^2\right\} \boxed{T^5 < \frac{J(J+1)}{702}\left[\frac{g\mu_B\mu_0 H}{K_B\Theta_D}\right]^2\Theta_D^5}$$

(4) ESTADÍSTICA DE FONONES.

a) $\varepsilon_i = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_i$

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\frac{1}{2})\hbar\omega_i/k_BT} = \sum_n e^{-\frac{1}{2}\hbar\omega_i/k_BT}\, e^{-n\hbar\omega_i/k_BT}$$

$$= e^{-\hbar\omega_i/2k_BT} \sum_n e^{-n\hbar\omega_i/k_BT} \qquad \beta = \frac{1}{k_BT}$$

$$= e^{-\hbar\omega_i\beta/2} \underbrace{\left[1 + e^{-\hbar\omega_i\beta} + e^{-2\hbar\omega_i\beta} + \dots\right]}_{\text{serie geométrica} \to \frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\dots}$$

con $x = e^{-\beta\hbar\omega_i}$

$$\boxed{Z = e^{-\frac{\beta}{2}\hbar\omega_i} \cdot \frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\omega_i}}}$$

b) $\langle \varepsilon_i \rangle = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z$

$$\ln Z = -\frac{\beta}{2}\hbar\omega_i - \ln\left[1-e^{-\beta\hbar\omega_i}\right]$$

$$\langle \varepsilon_i \rangle = \frac{\hbar\omega_i}{2} + \frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\omega_i}} \cdot \left(-e^{-\beta\hbar\omega_i}\right)\left(-\hbar\omega_i\right)$$

$$\langle \varepsilon_i \rangle = \hbar\omega_i\left[\frac{1}{2} + \frac{e^{-\beta\hbar\omega_i}}{1-e^{-\beta\hbar\omega_i}}\right]$$

$$\langle \varepsilon_i \rangle = \left[\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_i}-1} + \frac{1}{2}\right]\hbar\omega_i \rightarrow \langle \varepsilon_i \rangle = \left[\langle n_i \rangle + \frac{1}{2}\right]\hbar\omega_i$$

c) $\boxed{\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_i}-1}}$ $\longrightarrow$ Distribución de Bose-Einstein.

↳ Siguen estadística de Bose-Einstein

↳ SON BOSONES! (d)

e) $\mathcal{C}_{V_i} = \dfrac{\partial \langle \varepsilon_i \rangle}{\partial T} = k_B \left(\dfrac{\hbar\omega_i}{k_B T}\right)^2 \dfrac{e^{-\hbar\omega_i/k_B T}}{\left(1 - e^{-\hbar\omega_i/k_B T}\right)^2}$

f) A altas temperaturas: $e^{-\hbar\omega_i/k_B T} \approx 1 - \dfrac{\hbar\omega}{k_B T}$

$$\mathcal{C}_{V_i} \cong k_B \cancel{\left(\frac{\hbar\omega_i}{k_B T}\right)^2} \frac{1}{\cancel{\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)^2}} \approx k_B .$$

$\mathcal{C}_{V\,total} \simeq 3N k_B$ $\longrightarrow$ resoltado clásico.
(Ley Dulong-Petit).