Departamento de Física

Examen de Conocimientos - Semestre I 2021

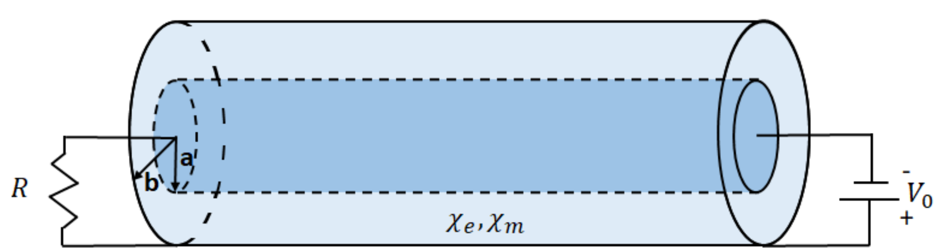
Electrodinámica

No se permite el uso de ningún documento, libro o apuntes, ni acceder a ninguna pagina de internet diferente a la correspondiente al examen. La última página del examen tiene una lista de ecuaciones que pueden ser de utilidad.

Duración total del examen : 3 horas

PROBLEMA 1: Cable coaxial

Un cable coaxial muy largo consiste de dos conductores cilíndricos concéntricos de radios a y b ($a < b$). El espacio entre los dos conductores es ocupado por un material aislante lineal con susceptibilidad eléctrica χ_e y susceptibilidad magnética χ_m. Se conecta una batería para proporcionar una diferencia de potencial constante V_0 entre los dos conductores cilíndricos y una resistencia eléctrica R para controlar el flujo de corriente eléctrica, como indica la figura.



Determinar en la región del aislante:

A) (6 puntos) El campo eléctrico.

B) (4 puntos) Las densidades de carga de polarización y su ubicación.

C) (6 puntos) El campo magnético.

D) (4 puntos) Las corrientes de magnetización y su ubicación.

Universidad de los Andes - Departamento de Física
Examen de Conocimientos - Semestre I 2021
Electrodinámica

PROBLEMA 2: Fuerza nula de esfera conductora sobre carga puntual

Considere una esfera conductora de radio R, la cual se encuentra aislada (no está conectada a tierra). A una distancia $2R$ del centro de la esfera se coloca una carga q y se observa que la fuerza que hace la esfera conductora sobre la carga q es nula.
A) (8 puntos) Hallar el valor de la carga imagen y su localización tal que el potencial eléctrico sobre la superficie de la esfera sea nulo.
B)(8 puntos) Usando el principio de superposición determine el valor y la ubicación de una segunda carga imagen que garantice que la fuerza neta sobre la carga q sea cero.
C) (4 puntos) Determine el potencial eléctrico $\Phi(r, \theta)$ para un punto en el espacio ubicado a una distancia $r > R$ del centro de la esfera y con el ángulo θ medido con respecto a la linea que conecta el centro de la esfera con la carga q.

Universidad de los Andes - Departamento de Física
Examen de Conocimientos - Semestre I 2021
Electrodinámica

PROBLEMA 3: Onda Electromagnética interactuando con un electrón
Considere una onda electromagnética plana propagándose en el vacío sobre el eje x, con frecuencia angular ω y con una magnitud de campo eléctrico E_0. La onda tiene una polarización lineal sobre el eje y.

A)(4 puntos) Escriba explícitamente los vectores de campo eléctrico y magnético de la onda como función del tiempo y las coordenadas espaciales, en términos de E_0, ω y la velocidad de la luz.
B) (6 puntos) Determine la potencia promedio por unidad de área transportada por esta onda a través de un plano perpendicular a la dirección de propagación.
C) (6 puntos) La onda incide sobre un electrón libre cuya posición promedio está en el origen de coordenadas, el electrón es acelerado por la onda electromagnética y luego emite radiación debido a su aceleración. Use la formula de Larmor ($P = \frac{2}{3}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2a^2}{c^3}$) para calcular la potencia promedio total radiada por el electrón.
D)(6 puntos) La sección eficaz total de dispersión, σ, se define como el cociente de la potencia promedio total radiada por el electrón sobre la potencia promedio total incidente por unidad de área. Determinar σ en términos del radio clásico r_e del electrón ($r_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{m_e c^2}$).
E) (8 puntos)La sección eficaz de dispersión por ángulo sólido para radiación dipolar está dada por:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = Asen^2\theta$$

Donde θ es el ángulo entre el vector de aceleración y el eje z. Determine la constante A en términos del radio clásico del electrón, realizando la integral apropiada y comparando con el resultado del ítem anterior.

Universidad de los Andes - Departamento de Física
Examen de Conocimientos - Semestre I 2021
Electrodinámica

PROBLEMA 4: Sistema inercial con campos paralelos

Un observador O_1 en un sistema de referencia inercial usa unidades de medida donde $c = 1$, c siendo la velocidad de la luz, y define el 4-vector potencial electromagnético como: $A^\mu = (\Phi, \vec{A})$, donde Φ, $\vec{A}$ son los potenciales eléctrico y magnético, respectivamente. El observador mide en su sistema en reposo el siguiente tensor de campo electromagnético:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = E_0 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Donde E_0 es la magnitud del campo eléctrico y $\partial^\mu = (\partial/\partial t, -\vec{\nabla})$.

A)(6 puntos) Escriba los vectores de campo eléctrico y magnético medidos por el observador en su sistema en reposo.

B) (6 puntos) Determine los vectores de campo eléctrico y magnético que mediría un observador que se mueve sobre el eje x con una rapidez v.

C) (6 puntos) Determine los vectores de campo eléctrico y magnético que mediría un observador que se mueve sobre el eje y con una rapidez v.

D) (6 puntos) Determine los vectores de campo eléctrico y magnético que mediría un observador que se mueve sobre el eje z con una rapidez v.

E) (6 puntos) Determine en que dirección y con que velocidad se debe mover un observador con respecto a O_1 para que su medición arroje que los campos eléctrico y magnético son paralelos.

Fórmulas útiles - Electrodinámica

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \quad ; \quad \vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{2}$$

$$\vec{D}=\varepsilon_o\vec{E}+\vec{P}=\varepsilon_o(1+\chi_e)\vec{E}=\varepsilon\vec{E} \quad ; \quad \vec{B}=\mu\vec{H}=\mu_0\left(\vec{H}+\vec{M}\right)=\mu_0\left(1+\chi_m\right)\vec{H} \tag{3}$$

$$\rho_p=-\vec{\nabla}\cdot\vec{P} \quad ; \quad \sigma_p=\vec{P}\cdot\hat{n} \quad ; \quad \vec{J}_M=\vec{\nabla}\times\vec{M} \quad ; \quad \vec{K}_M=\vec{M}\times\hat{n} \quad ; \quad \vec{S}=\vec{E}\times\vec{H} \tag{4}$$

$$V(b)-V(a)=-\int_a^b\vec{E}\cdot d\vec{\ell} \quad ; \quad \frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}=\frac{1}{r_>}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^{\ell}P_\ell(cos\theta) \tag{5}$$

$$\nabla'^2G\left(\vec{r},\vec{r}'\right)=-4\pi\delta\left(\vec{r}-\vec{r}'\right) \quad ; \quad G\left(\vec{r},\vec{r}'\right)=\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}+F\left(\vec{r},\vec{r}'\right) \tag{6}$$

$$\Phi\left(r,\theta\right)=\sum_\ell\left(A_\ell r^\ell+\frac{B_\ell}{r^{\ell+1}}\right)P_\ell\left(cos\theta\right) \tag{7}$$

$$\vec{E}'_\parallel=\vec{E}_\parallel \quad ; \quad \vec{E}'_\perp=\gamma\left(\vec{E}_\perp+c\vec{\beta}\times\vec{B}_\perp\right) \quad ; \quad \vec{B}'_\parallel=\vec{B}_\parallel \quad ; \quad \vec{B}'_\perp=\gamma\left(\vec{B}_\perp-\frac{1}{c}\vec{\beta}\times\vec{E}_\perp\right) \tag{8}$$

Coordenadas cilíndricas:

$$\vec{\nabla}\psi=\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\hat{e}_1+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\hat{e}_2+\frac{\partial\psi}{\partial z}\hat{e}_3 \quad ; \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\rho A_1\Big)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_2}{\partial\phi}+\frac{\partial A_3}{\partial z} \tag{9}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_3}{\partial\phi}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\hat{e}_1+\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial\rho}\right)\hat{e}_2+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\rho A_2\Big)-\frac{\partial A_1}{\partial\phi}\right)\hat{e}_3 \tag{10}$$

Coordenadas esféricas:

$$\vec{\nabla}\psi=\frac{\partial\psi}{\partial r}\hat{e}_1+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\hat{e}_2+\frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\hat{e}_3 \quad ; \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2A_1\Big)+\frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(sen\theta A_2\Big)+\frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial A_3}{\partial\phi} \tag{11}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\frac{1}{rsen\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(sen\theta A_3\Big)-\frac{\partial A_2}{\partial\phi}\right)\hat{e}_1+\left(\frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial A_1}{\partial\phi}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(rA_3\Big)\right)\hat{e}_2+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\Big(rA_2\Big)-\frac{\partial A_1}{\partial\theta}\right)\hat{e}_3 \tag{12}$$

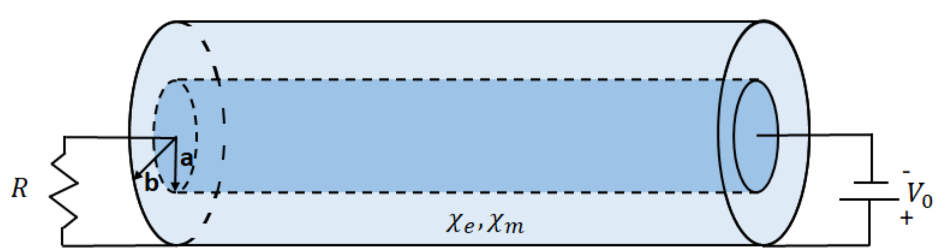
$$\int sen^2(ax)dx=\frac{x}{2}-\frac{sen(2ax)}{4a} \quad ; \quad \int_0^\pi sen^3(x)dx=\frac{4}{3} \quad ; \quad \int_0^\pi sen^5(x)dx=\frac{16}{15} \tag{13}$$

Departamento de Física
Examen de Conocimientos - Semestre I 2021
Electrodinámica

No se permite el uso de ningún documento, libro o apuntes, ni acceder a ninguna pagina de internet diferente a la correspondiente al examen. La última página del examen tiene una lista de ecuaciones que pueden ser de utilidad.

Duración total del examen : 3 horas

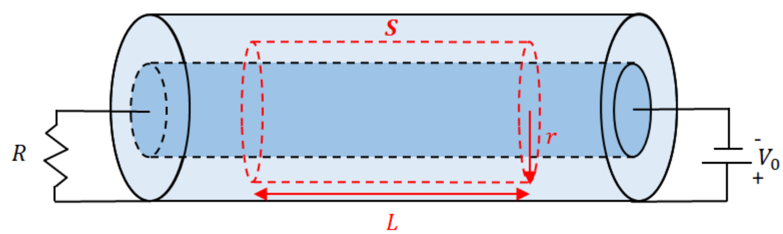
PROBLEMA 1: Cable coaxial
Un cable coaxial muy largo consiste de dos conductores cilíndricos concéntricos de radios a y b ($a < b$). El espacio entre los dos conductores es ocupado por un material aislante lineal con susceptibilidad eléctrica χ_e y susceptibilidad magnética χ_m. Se conecta una batería para proporcionar una diferencia de potencial constante V_0 entre los dos conductores cilíndricos y una resistencia eléctrica R para controlar el flujo de corriente eléctrica, como indica la figura.



Determinar en la región del aislante:
A) (6 puntos) El campo eléctrico.
B) (4 puntos) Las densidades de carga de polarización y su ubicación.
C) (6 puntos) El campo magnético.
D) (4 puntos) Las corrientes de magnetización y su ubicación.

SOLUCIÓN

A) Dada la polaridad de la batería, las lineas de campo eléctrico van dirigidas en la dirección radial negativa. Usamos la Ley de Gauss (sobre la superficie S mostrada en rojo en la figura) para calcular el campo eléctrico en términos de la densidad de carga superficial, la cual es negativa sobre el cilindro de radio a, dado que está conectada al borne de polaridad negativa de la batería.



$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{Q_{encerrado}}{\epsilon} \implies -2\pi r E L = \frac{-\sigma 2\pi a L}{\epsilon} \tag{1}$$

Donde $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e)$. El campo eléctrico queda:

$$\vec{E} = -\frac{\sigma a}{\epsilon r}\hat{r} \tag{2}$$

Nos falta calcular σ, para esto usamos el hecho que conocemos la diferencia de potencial eléctrico entre los cilindros concéntricos:

$$V_b - V_a = V_0 = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_a^b \left(-\frac{\sigma a}{\epsilon r}\hat{r}\right) \cdot d\vec{r} = \frac{\sigma a}{\epsilon} ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{3}$$

obteniendo σ de esta última ecuación y reemplazando, obtenemos que el campo eléctrico es:

$$\vec{E} = -\frac{V_0}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}\frac{\hat{r}}{r} \tag{4}$$

B) Dado que el material es lineal, el vector de polarización eléctrica viene dado por:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = -\frac{\epsilon_0 \chi_e V_0}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}\frac{\hat{r}}{r} \tag{5}$$

La densidad volumétrica de carga de polarización viene dada por la divergencia del vector Polarizacion, en coordenadas cilíndricas:

$$\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rP_r) = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{\epsilon_0 \chi_e V_0}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}\right) = 0 \tag{6}$$

La densidad superficial de carga de Polarización viene dada por $\sigma_P = \overrightarrow{P} \cdot \hat{n}$, donde el vector unitario $\hat{n}$ es perpendicular a la cara del dieléctrico, apuntando hacia afuera del dieléctrico, de acuerdo esto, debe existir densidad superficial de carga de polarización en las superficies $r = a$ y $r = b$:

$$\sigma_{Pa} = \overrightarrow{P} \cdot \hat{n}\Big|_{r=a} = -\frac{\epsilon_0 \chi_e V_0}{ln\left(\frac{b}{a}\right)} \frac{\hat{r}}{r} \cdot (-\hat{r})\Big|_{r=a} = \frac{\epsilon_0 \chi_e V_0}{aln\left(\frac{b}{a}\right)} \tag{7}$$

$$\sigma_{Pb} = \overrightarrow{P} \cdot \hat{n}\Big|_{r=b} = -\frac{\epsilon_0 \chi_e V_0}{ln\left(\frac{b}{a}\right)} \frac{\hat{r}}{r} \cdot \hat{r}\Big|_{r=b} = -\frac{\epsilon_0 \chi_e V_0}{bln\left(\frac{b}{a}\right)} \tag{8}$$

las cargas negativas del material dieléctrico son atraídas hacia el borne positivo de la batería y viceversa, eso es lo que se encuentra del resultado anterior.

C) Calculamos primero el vector intensidad magnética, usando la Ley de Ampere, sobre un camino que es un anillo de radio r, sobre el cilindro rojo mostrado en la figura anterior. Dado que la corriente va en dirección axial del cilindro, por regla de la mano derecha, el campo $\overrightarrow{H}$ va circulando alrededor de la corriente en dirección tangencial $\hat{\phi}$:

$$\oint \overrightarrow{H} \cdot d\overrightarrow{\ell} = I_{libre} \implies 2\pi r H = \frac{V_0}{R} \tag{9}$$

Por lo tanto, el vector intensidad magnética entre los dos cilindros concéntricos $(a < r < b)$ es:

$$\overrightarrow{H} = \frac{(V_0/R)}{2\pi r}\hat{\phi} \tag{10}$$

Como el material es lineal, el campo magnético entre los cilindros lo podemos encontrar como:

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 (1 + \chi_m)(V_0/R)}{2\pi r}\hat{\phi} \qquad a < r < b \tag{11}$$

D) Como el material es lineal, su magnetización la encontramos a partir de:

$$\overrightarrow{M} = \chi_m \overrightarrow{H} = \frac{\chi_m (V_0/R)}{2\pi r}\hat{\phi} \tag{12}$$

La densidad de corriente de magnetización viene dada por:

$$\overrightarrow{J}_M = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{M} \tag{13}$$

Evaluando el rotacional en coordenadas cilíndricas obtenemos: $\overrightarrow{J}_M = 0$.
La densidad superficial de corriente de magnetización viene dada por:

$$\overrightarrow{K}_M = \overrightarrow{M} \times \hat{n} \tag{14}$$

Donde el vector unitario $\hat{n}$ es normal saliendo de la superficie del material magnético. En la superficie $r = a$ tenemos:

$$\overrightarrow{K}_{Ma} = \overrightarrow{M} \times \hat{n}\Big|_{r=a} = \frac{\chi_m (V_0/R)}{2\pi r}\hat{\phi} \times (-\hat{r})\Big|_{r=a} = \frac{\chi_m (V_0/R)}{2\pi a}\hat{z} \tag{15}$$

Para la superficie $r = b$:

$$\vec{K}_{Mb} = \vec{M} \times \hat{n}\Big|_{r=b} = \frac{\chi_m (V_0/R)}{2\pi r}\hat{\phi} \times \hat{r}\Big|_{r=b} = -\frac{\chi_m (V_0/R)}{2\pi b}\hat{z} \tag{16}$$

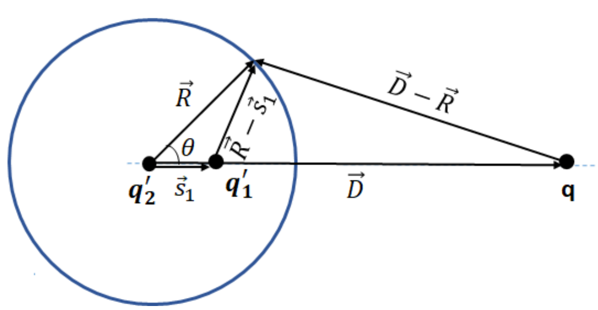
Universidad de los Andes - Departamento de Física
Examen de Conocimientos - Semestre I 2021
Electrodinámica

PROBLEMA 2: Fuerza nula de esfera conductora sobre carga puntual

Considere una esfera conductora de radio R, la cual se encuentra aislada (no está conectada a tierra). A una distancia $2R$ del centro de la esfera se coloca una carga q y se observa que la fuerza que hace la esfera conductora sobre la carga q es nula.
A) (8 puntos) Hallar el valor de la carga imagen y su localización tal que el potencial eléctrico sobre la superficie de la esfera sea nulo.
B)(8 puntos) Usando el principio de superposición determine el valor y la ubicación de una segunda carga imagen que garantice que la fuerza neta sobre la carga q sea cero.
C) (4 puntos) Determine el potencial eléctrico $\Phi(r, \theta)$ para un punto en el espacio ubicado a una distancia $r > R$ del centro de la esfera y con el ángulo θ medido con respecto a la linea que conecta el centro de la esfera con la carga q.

SOLUCIÓN

A) La figura de abajo muestra que las condiciones de frontera se pueden establecer con dos cargas imagen: q_1' y $q_2' = Q_0 - q_1'$. El efecto de la carga imagen q_1' es hacer que el potencial sobre la esfera producido por la carga original q y la carga imagen q_1' sea cero. El efecto de la carga imagen q_2' es tener una carga neta Q_0 sobre la esfera aislada.



Primero exigimos que el potencial eléctrico sobre la esfera producido por las cargas q y q_1' sea cero:

$$\Phi(r=R,\theta)=0=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{q}{D\left[1+(R/D)^2-2(R/D)cos\theta\right]^{1/2}}+\frac{q_1'}{R\left[1+(s_1/R)^2-2(s_1/R)cos\theta\right]^{1/2}}\right\} \tag{17}$$

Para que se cumpla esta última ecuación se requiere:

$$q_1'=-\frac{R}{D}q \quad ; \quad s_1=\frac{R^2}{D} \tag{18}$$

Inicialmente la carga q fue colocada a una distancia $D=2R$, por lo que las condiciones para la carga imagen q_1' son:

$$q_1'=-\frac{q}{2} \quad ; \quad s_1=\frac{R}{2} \tag{19}$$

B) La esfera aislada puede tener una carga neta Q_0 sobre su superficie. Para que la carga total encerrada por la esfera sea Q_0 (que debemos hallar), la carga q_2' debe tomar el valor:

$$q_2'=Q_0-q_1'=Q_0+\frac{q}{2} \tag{20}$$

Esta segunda carga imagen es ubicada en el centro de la esfera. Para hallar el valor de Q_0, usamos la condición de que la fuerza que siente la carga original es nula:

$$0=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{-(q/2)}{(2R-R/2)^2}+\frac{Q_0+q/2}{(2R)^2}\right\}\hat{r} \tag{21}$$

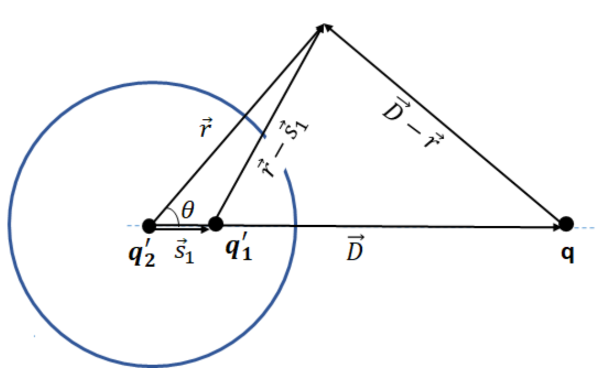
De esta ultima ecuación podemos hallar la carga que hay sobre la superficie de la esfera:

$$Q_0=\frac{7q}{18} \tag{22}$$

De acuerdo a esto, la segunda carga imagen (ubicada en el centro de la esfera) debe tener el valor:

$$q_2'=\frac{7q}{18}+\frac{q}{2}=\frac{8q}{9} \tag{23}$$

C) De acuerdo a la siguiente figura:



El potencial producido en un punto con coordenadas (r, θ), se calcula a partir de las dos cargas imagen y la carga real:

$$\Phi(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{(8q/9)}{r} + \frac{q}{(r^2 + 4R^2 - 4Rrcos\theta)^{1/2}} - \frac{(q/2)}{(r^2 + R^2/4 - Rrcos\theta)^{1/2}}\right\} \tag{24}$$

Universidad de los Andes - Departamento de Física
Examen de Conocimientos - Semestre I 2021
Electrodinámica

PROBLEMA 3: Onda Electromagnética interactuando con un electrón
Considere una onda electromagnética plana propagándose en el vacío sobre el eje x, con frecuencia angular ω y con una magnitud de campo eléctrico E_0. La onda tiene una polarización lineal sobre el eje y.

A)(4 puntos) Escriba explícitamente los vectores de campo eléctrico y magnético de la onda como función del tiempo y las coordenadas espaciales, en términos de E_0, ω y la velocidad de la luz.
B) (6 puntos) Determine la potencia promedio por unidad de área transportada por esta onda a través de un plano perpendicular a la dirección de propagación.
C) (6 puntos) La onda incide sobre un electrón libre cuya posición promedio está en el origen de coordenadas, el electrón es acelerado por la onda electromagnética y luego emite radiación debido a su aceleración. Use la formula de Larmor ($P = \frac{2}{3}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2a^2}{c^3}$) para calcular la potencia promedio total radiada por el electrón.
D)(6 puntos) La sección eficaz total de dispersión, σ, se define como el cociente de la potencia promedio total radiada por el electrón sobre la potencia promedio total incidente por unidad de área. Determinar σ en términos del radio clásico r_e del electrón ($r_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{m_ec^2}$).
E) (8 puntos)La sección eficaz de dispersión por ángulo sólido para radiación dipolar está dada por:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = Asen^2\theta$$

Donde θ es el ángulo entre el vector de aceleración y el eje z. Determine la constante A en términos del radio clásico del electrón, realizando la integral apropiada y comparando con el resultado del ítem anterior.

SOLUCIÓN

A) La polarización da la dirección del campo eléctrico. La dirección de propagación de la onda viene dada por $\vec{E} \times \vec{B}$. El número de onda está relacionado con la frecuencia angular de la onda como $k = \omega/c$. Para una onda plana la magnitud del campo magnético es $\|\vec{B}\| = \|\vec{E}\|/c$. Lo anterior implica:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 cos\Big(\omega\,(x/c - t)\Big)\hat{y} \tag{25}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \Big(E_0/c\Big)cos\Big(\omega\,(x/c - t)\Big)\hat{z} \tag{26}$$

B) El promedio temporal del vector Poyinting es:

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{\mu_0}\Big\langle\vec{E} \times \vec{B}\Big\rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\Big\langle cos^2\Big(\omega\,(x/c - t)\Big)\Big\rangle\hat{x} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\hat{x} \tag{27}$$

La potencia promedio por unidad de área transportada a través de una superficie perpendicular a la dirección de propagación es:

$$P_{in} = \langle\vec{S}\rangle \cdot \hat{x} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \tag{28}$$

Si multiplicamos y dividimos esta ultima expresión pro ϵ_0 y usando el hecho que $c^2 = 1/(\mu_{00}$, esta última expresión también la podemos escribir como:

$$P_{in} = \frac{1}{2}\epsilon_0 c E_0^2 \tag{29}$$

C) La aceleración del electrón se debe al campo eléctrico de la onda:

$$\vec{a} = \frac{-e\vec{E}}{m} = -\frac{eE_0}{m}cos\Big(\omega\,(x/c - t)\Big)\hat{y} \tag{30}$$

De acuerdo a la formula de Larmor:

$$P = \frac{2}{3}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2a^2}{c^3} = \frac{2}{3}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{c^3}\frac{e^2E_0^2}{m^2}cos^2\Big(\omega\,(x/c - t)\Big) \tag{31}$$

El promedio temporal de esta potencia radiada por el electrón es:

$$P_e = \frac{1}{3}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^4E_0^2}{m^2c^3} \tag{32}$$

D) La sección eficaz total de dispersión es:

$$\sigma = \frac{P_e}{P_{in}} = \frac{\frac{1}{3}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^4E_0^2}{m^2c^3}}{\frac{1}{2}\epsilon_0 c E_0^2} = \frac{2}{3}\frac{e^4}{4\pi\epsilon_0^2 m^2 c^4} \tag{33}$$

Esta última expresión la podemos escribir en términos del radio clásico del electrón:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}r_e^2 \tag{34}$$

E) Para hallar la sección eficaz total, necesitamos integrar, sobre todo el ángulo sólido, la sección eficaz diferencial de emisión dipolar:

$$\sigma = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)d\Omega = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Asen^2\theta sen\theta d\theta d\phi = 2\pi A\int_0^{\pi} sen^3\theta d\theta = \frac{8\pi}{3}A \tag{35}$$

De acuerdo a esto:

$$A = r_e^2 \tag{36}$$

Universidad de los Andes - Departamento de Física
Examen de Conocimientos - Semestre I 2021
Electrodinámica

PROBLEMA 4: Sistema inercial con campos paralelos

Un observador O_1 en un sistema de referencia inercial usa unidades de medida donde $c = 1$, c siendo la velocidad de la luz, y define el 4-vector potencial electromagnético como: $A^\mu = (\Phi, \vec{A})$, donde Φ, $\vec{A}$ son los potenciales eléctrico y magnético, respectivamente. El observador mide en su sistema en reposo el siguiente tensor de campo electromagnético:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = E_0 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{37}$$

Donde E_0 es la magnitud del campo eléctrico y $\partial^\mu = (\partial/\partial t, -\vec{\nabla})$.

A)(6 puntos) Escriba los vectores de campo eléctrico y magnético medidos por el observador en su sistema en reposo.

B) (6 puntos) Determine los vectores de campo eléctrico y magnético que mediría un observador que se mueve sobre el eje x con una rapidez v.

C) (6 puntos) Determine los vectores de campo eléctrico y magnético que mediría un observador que se mueve sobre el eje y con una rapidez v.

D) (6 puntos) Determine los vectores de campo eléctrico y magnético que mediría un observador que se mueve sobre el eje z con una rapidez v.

E) (6 puntos) Determine en que dirección y con que velocidad se debe mover un observador con respecto a O_1 para que su medición arroje que los campos eléctrico y magnético son paralelos.

SOLUCIÓN

A) Los elementos de la primera columna del tensor de campo son:

$$F^{10} = E_0 = \partial^1 A^0 - \partial^0 A^1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} \implies E_x = E_0 \tag{38}$$

$$F^{20} = 0 = \partial^2 A^0 - \partial^0 A^2 = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t} \implies E_y = 0 \tag{39}$$

$$F^{30} = 0 = \partial^3 A^0 - \partial^0 A^3 = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} \implies E_z = 0 \tag{40}$$

Los elementos diferente de cero de la última columna del tensor de campo corresponden a:

$$F^{13} = E_0 = \partial^1 A^3 - \partial^3 A^1 = -\frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial z} = \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)_y \implies B_y = E_0 \tag{41}$$

$$F^{23} = -E_0 = \partial^2 A^3 - \partial^3 A^2 = -\frac{\partial A_z}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial z} = -\left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)_x \implies B_x = E_0 \tag{42}$$

Nos falta mirar un elemento que implique derivadas sobre las coordenadas x, y:

$$F^{12} = 0 = \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 = -\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} = -\left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)_z \implies B_z = 0 \tag{43}$$

En conclusión, los campos medidos por el observador O_1 son:

$$\vec{E} = E_0 \hat{x}; \quad \vec{B} = E_0 \hat{x} + E_0 \hat{y} \tag{44}$$

Sabemos que las componentes de los campos paralelas a la dirección de movimiento se mantienen invariantes, mientras que las componentes perpendiculares a la dirección de movimiento se transforman como:

$$\vec{E}'_\perp = \gamma\left(\vec{E}_\perp + c\vec{\beta} \times \vec{B}\right) \tag{45}$$

$$\vec{B}'_\perp = \gamma\left(\vec{B}_\perp - \frac{1}{c}\vec{\beta} \times \vec{E}\right) \tag{46}$$

B) Movimiento relativo sobre el eje x: $\vec{\beta} = \beta \hat{x}$

$$\vec{\beta} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \beta & 0 & 0 \\ E_0 & E_0 & 0 \end{vmatrix} = \beta E_0 \hat{z} \tag{47}$$

Mientras que $\vec{\beta} \times \vec{E} = 0$. Las coordenadas de los campos en el sistema de referencia inercial que se mueve sobre el eje x, con respecto al sistema original son:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_0 \\ E'_y &= 0 \\ E'_z &= \gamma\beta E_0 \end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned} B'_x &= E_0 \\ B'_y &= \gamma E_0 \\ B'_z &= 0 \end{aligned} \tag{49}$$

C) Movimiento relativo sobre el eje y: $\vec{\beta} = \beta\hat{y}$

$$\vec{\beta} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & \beta & 0 \\ E_0 & E_0 & 0 \end{vmatrix} = -\beta E_0 \hat{z} \tag{50}$$

Mientras que $\vec{\beta} \times \vec{E} = \beta\hat{y} \times E_0\hat{x} = -\beta E_0\hat{z}$. Las coordenadas de los campos en el sistema de referencia inercial que se mueve sobre el eje y, con respecto al sistema original son:

$$\begin{aligned} E'_x &= \gamma E_0 \\ E'_y &= 0 \\ E'_z &= -\gamma\beta E_0 \end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned} B'_x &= \gamma E_0 \\ B'_y &= E_0 \\ B'_z &= \gamma\beta E_0 \end{aligned} \tag{52}$$

C) Movimiento relativo sobre el eje z: $\vec{\beta} = \beta\hat{z}$

$$\vec{\beta} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & \beta \\ E_0 & E_0 & 0 \end{vmatrix} = -\beta E_0 \hat{x} + \beta E_0 \hat{y} \tag{53}$$

Mientras que $\vec{\beta} \times \vec{E} = \beta\hat{z} \times E_0\hat{x} = \beta E_0\hat{y}$. Las coordenadas de los campos en el sistema de referencia inercial que se mueve sobre el eje z, con respecto al sistema original son:

$$\begin{aligned} E'_x &= \gamma E_0 - \gamma\beta E_0 \\ E'_y &= \gamma\beta E_0 \\ E'_z &= 0 \end{aligned} \tag{54}$$

$$\begin{aligned} B'_x &= \gamma E_0 \\ B'_y &= \gamma E_0 - \gamma\beta E_0 \\ B'_z &= 0 \end{aligned} \tag{55}$$

D) Solo el movimiento relativo sobre el eje z produce componentes diferentes de cero para ambos campos sobre los mismos ejes (eje x y eje y). Si ambos campos son paralelos su producto cruz es cero:

$$\vec{E}' \times \vec{B}' = 0 = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \\ E'_x & E'_y & 0 \\ \\ B'_x & B'_y & 0 \end{vmatrix} = \left(E'_x B'_y - E'_y B'_x \right) \hat{z} \tag{56}$$

Usando las componentes que encontramos en el caso C):

$$\left(\gamma E_0 - \gamma \beta E_0 \right) \left(\gamma E_0 - \gamma \beta E_0 \right) = \gamma^2 \beta E_0^2 \tag{57}$$

Esta ecuación se simplifica a:

$$\left(1 - \beta \right)^2 = \beta \tag{58}$$

Lo cual se puede re-escribir como:

$$\beta^2 - 3\beta + 1 = 0 \tag{59}$$

La solución a esta ecuación cuadrática es:

$$\beta = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \tag{60}$$

Dado que $\beta \leq 1$, la solución física corresponde a:

$$\beta = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \tag{61}$$

Fórmulas útiles - Electrodinámica

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \quad ; \quad \vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{62}$$

$$\vec{D}=\varepsilon_o\vec{E}+\vec{P}=\varepsilon_o(1+\chi_e)\vec{E}=\varepsilon\vec{E} \quad ; \quad \vec{B}=\mu\vec{H}=\mu_0\left(\vec{H}+\vec{M}\right)=\mu_0\left(1+\chi_m\right)\vec{H} \tag{63}$$

$$\rho_p=-\vec{\nabla}\cdot\vec{P} \quad ; \quad \sigma_p=\vec{P}\cdot\hat{n} \quad ; \quad \vec{J}_M=\vec{\nabla}\times\vec{M} \quad ; \quad \vec{K}_M=\vec{M}\times\hat{n} \quad ; \quad \vec{S}=\vec{E}\times\vec{H} \tag{64}$$

$$V(b)-V(a)=-\int_a^b\vec{E}\cdot d\vec{\ell} \quad ; \quad \frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}=\frac{1}{r_>}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^{\ell}P_\ell(cos\theta) \tag{65}$$

$$\nabla'^2G\left(\vec{r},\vec{r}'\right)=-4\pi\delta\left(\vec{r}-\vec{r}'\right) \quad ; \quad G\left(\vec{r},\vec{r}'\right)=\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}+F\left(\vec{r},\vec{r}'\right) \tag{66}$$

$$\Phi\left(r,\theta\right)=\sum_\ell\left(A_\ell r^\ell+\frac{B_\ell}{r^{\ell+1}}\right)P_\ell\left(cos\theta\right) \tag{67}$$

$$\vec{E}'_\parallel=\vec{E}_\parallel \quad ; \quad \vec{E}'_\perp=\gamma\left(\vec{E}_\perp+c\vec{\beta}\times\vec{B}_\perp\right) \quad ; \quad \vec{B}'_\parallel=\vec{B}_\parallel \quad ; \quad \vec{B}'_\perp=\gamma\left(\vec{B}_\perp-\frac{1}{c}\vec{\beta}\times\vec{E}_\perp\right) \tag{68}$$

Coordenadas cilíndricas:

$$\vec{\nabla}\psi=\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\hat{e}_1+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\hat{e}_2+\frac{\partial\psi}{\partial z}\hat{e}_3 \quad ; \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho A_1\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_2}{\partial\phi}+\frac{\partial A_3}{\partial z} \tag{69}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_3}{\partial\phi}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\hat{e}_1+\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial\rho}\right)\hat{e}_2+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho A_2\right)-\frac{\partial A_1}{\partial\phi}\right)\hat{e}_3 \tag{70}$$

Coordenadas esféricas:

$$\vec{\nabla}\psi=\frac{\partial\psi}{\partial r}\hat{e}_1+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\hat{e}_2+\frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\hat{e}_3 \quad ; \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2A_1\right)+\frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\theta A_2\right)+\frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial A_3}{\partial\phi} \tag{71}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\frac{1}{rsen\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\theta A_3\right)-\frac{\partial A_2}{\partial\phi}\right)\hat{e}_1+\left(\frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial A_1}{\partial\phi}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_3\right)\right)\hat{e}_2+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_2\right)-\frac{\partial A_1}{\partial\theta}\right)\hat{e}_3 \tag{72}$$

$$\int sen^2(ax)dx=\frac{x}{2}-\frac{sen(2ax)}{4a} \quad ; \quad \int_0^\pi sen^3(x)dx=\frac{4}{3} \quad ; \quad \int_0^\pi sen^5(x)dx=\frac{16}{15} \tag{73}$$

Examen de Conocimientos - Mecánica
Departamento de Física, Universidad de los Andes
2021-II

El examen tiene una duración de 3:00 horas y se debe terminar a las 12:00 horas. Se da un tiempo adicional de 20 minutos para que se firme la solución, se escanee, se genere un único archivo pdf y se suba al curso Actividades de posgrado de física en la plataforma Bloque neón.

Usted debe responder todos los ejercicios a mano explicando claramente el procedimiento que sigue, de no ser así no se dará puntaje.

El examen se debe desarrollar manera individual y con su cámara encendida de tal manera que todos compartamos nuestra imagen. Usted no debe comunicarse con ninguno de sus compañeros ni utilizar ningún documento, libro o apuntes, diferente a las que se le están asignando en el enunciado. Al principio de este documento hay algunas fórmulas que pueden ser útiles para el desarrollo de este examen.

Firmando el examen usted admite que entiende que omitir las reglas estipuladas para este examen será considerado un abuso a la confianza que se ha puesto en usted y tendrá las consecuencias estipuladas en el reglamento general de estudiantes de doctorado de la Universidad.

ECUACIONES

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + 2m\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{\Omega} + m(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{\Omega}, \quad \dot{x} = \sum_\sigma \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma}\dot{q_\sigma}, U_{ef} = U_r + U_{cf}$$

$$p_\sigma = \frac{\partial L}{\partial \dot{q_\sigma}}, \quad \{u_k, v_k\} = \sum_i \left(\frac{\partial u_k}{\partial q_i}\frac{\partial v_k}{\partial p_i} - \frac{\partial u_k}{\partial p_i}\frac{\partial v_k}{\partial q_i} \right), \frac{df}{dt} = \{f, H\}$$

$$[q_i, q_j] = 0, \quad [p_i, p_j] = 0, \quad [q_i, p_j] = \delta_{i,j}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

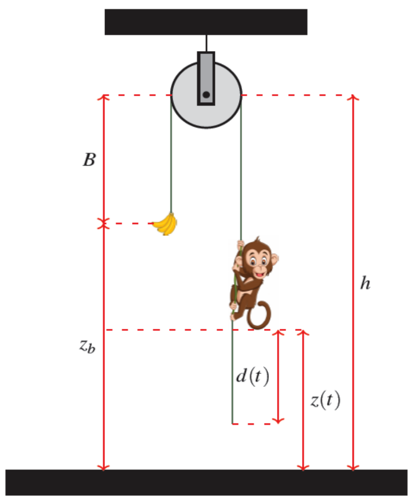
1. Problema 1 - 20 Puntos (PREGRADO)

Una cuerda inextensible de masa despreciable (cuerda ideal) pasa por una polea que está fija a una distancia h sobre el piso (polea ideal). Un racimo de bananos está atado al extremo izquierdo de la cuerda., las cuales se encuentran a una altura $z_b(t)$ del piso. Un mico de masa M está inicialmente en el otro extremo de la cuerda (A). El mono trepa por la cuerda y su desplazamiento $d(t)$ con respecto a A está dado en función del tiempo. El sistema está inicialmente en reposo, tal que las condiciones iniciales son $d(t=0) = \dot{d}(t=0)$ =0.

(a) (10 puntos) Introduzca el sistema apropiado de coordenadas generalizadas y calcule el Lagrangiano del sistema en términos de esas coordenadas.

(b) (5 puntos) Usando la ecuación de Euler-Lagrange, halle la ecuación que describe el movimiento del mico con respecto al piso.

(c) (5 puntos) Integre la ecuación en b con respecto al tiempo y halle la expresión que describe la posición del mono, como función del tiempo.



2. Problema 2 - 20 Puntos (PREGRADO)

Una partícula se mueve en un círculo bajo la influencia de una fuerza proporcional al inverso del cubo ($F \propto 1/r^3$).

(a) (10 puntos) Muestre que la partícula también se puede mover con velocidad radial uniforme, hacia dentro o hacia afuera.

(b) (10 puntos) Encuentre θ como función de r para un movimiento con velocidad radial uniforme v.

3. Problema 3 - 30 Puntos (POSGRADO)

Considere una partícula en orbita bajo la acción de un potencial de la forma $U(r) = -\frac{\gamma}{r}$, donde γ es una constante positiva. Ahora, el vector $\vec{A}$, vector de Laplace-Runge-Lenz, define la forma de la orbita:

$$\vec{A} = \frac{1}{m}\vec{p} \times \vec{L} - \frac{\gamma \vec{r}}{r}.$$

(a) (18 puntos) Use los corchetes de Poisson para mostrar que A es una cantidad conservada, en esta situación (use el tensor asimétrico de Levi-Cevita). En sus propias palabras, explique otras aplicaciones del vector Laplace-Runge-Lenz.

(b) (12 puntos) Muestre que se satisface la siguiente identidad.

$$\{A_i, A_j\} = -\frac{2H}{m}\epsilon_{ijk}L_k$$

donde ϵ_{ijk} es el tensor asimétrico de Levi-Civita y L_k es una de las componentes del momento angular, definido como $L_k = \epsilon_{kmn}x_m p_n$.

4. Problema 4 - 30 Puntos (POSGRADO)

Una partícula de masa m se mueve bajo la acción de un campo de fuerza central, $\vec{F} = -c\hat{\mathbf{r}}$, donde c es una constante positiva.

(a) (10 puntos) Muestre que la partícula se encuentra atrapada en dicho campo. Haga un diagrama cualitativo del potencial como función de la distancia y muestre en él porqué la partícula está atrapada.

(b) (10 puntos) Asumimos que la partícula se encuentra en una orbita circular de radio r_0. Ahora, la partícula sufre una pequeña perturbación radial α, que la hace oscilar en su distancia entre el centro de atracción y su posición. Determine el periodo de estas pequeñas oscilaciones.

(c) (10 puntos) Asuma ahora que la partícula se encontraba en su trayectoria radial y sufrió un impulso radial, contrario a la dirección de la fuerza de atracción, tal que la distancia al centro de atracción pasó de r_0 a $2r_0$. Calcule el cambio en la energía mecánica.

Examen de Conocimientos - Mecánica
Departamento de Física, Universidad de los Andes
2021-II

El examen tiene una duración de 3:00 horas y se debe terminar a las 12:00 horas. Se da un tiempo adicional de 20 minutos para que se firme la solución, se escanee, se genere un único archivo pdf y se suba al curso Actividades de posgrado de física en la plataforma Bloque neón.

Usted debe responder todos los ejercicios a mano explicando claramente el procedimiento que sigue, de no ser así no se dará puntaje.

El examen se debe desarrollar manera individual y con su cámara encendida de tal manera que todos compartamos nuestra imagen. Usted no debe comunicarse con ninguno de sus compañeros ni utilizar ningún documento, libro o apuntes, diferente a las que se le están asignando en el enunciado. Al principio de este documento hay algunas fórmulas que pueden ser útiles para el desarrollo de este examen.

Firmando el examen usted admite que entiende que omitir las reglas estipuladas para este examen será considerado un abuso a la confianza que se ha puesto en usted y tendrá las consecuencias estipuladas en el reglamento general de estudiantes de doctorado de la Universidad.

ECUACIONES

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + 2m\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{\Omega} + m(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{\Omega}, \quad \dot{x} = \sum_\sigma \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma};U_{ef} = U_r + U_{cf}$$

$$p_\sigma = \frac{\partial L}{\partial \dot{q_\sigma}}, \quad \{u_k, v_k\} = \sum_i \left(\frac{\partial u_k}{\partial q_i}\frac{\partial v_k}{\partial p_i} - \frac{\partial u_k}{\partial p_i}\frac{\partial v_k}{\partial q_i} \right), \frac{df}{dt} = \{f, H\}$$

$$[q_i, q_j] = 0, \quad [p_i, p_j] = 0, \quad [q_i, p_j] = \delta_{i,j}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

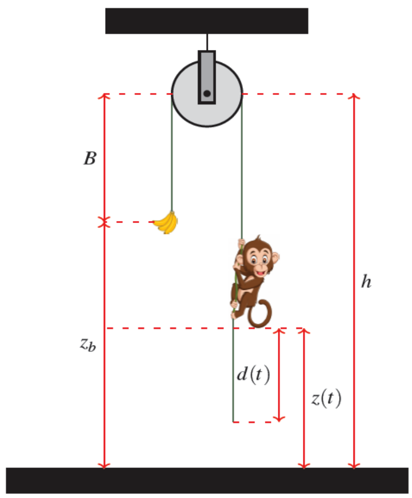
1. Problema 1 - 20 Puntos (PREGRADO)

Una cuerda inextensible de masa despreciable (cuerda ideal) pasa por una polea que está fija a una distancia h sobre el piso (polea ideal). Un racimo de bananos está atado al extremo izquierdo de la cuerda., las cuales se encuentran a una altura $z_b(t)$ del piso. Un mico de masa M está inicialmente en el otro extremo de la cuerda (A). El mono trepa por la cuerda y su desplazamiento $d(t)$ con respecto a A está dado en función del tiempo. El sistema está inicialmente en reposo, tal que las condiciones iniciales son $d(t=0) = \dot{d}(t=0) = 0$.

(a) (10 puntos) Introduzca el sistema apropiado de coordenadas generalizadas y calcule el Lagrangiano del sistema en términos de esas coordenadas.

(b) (5 puntos) Usando la ecuación de Euler-Lagrange, halle la ecuación que describe el movimiento del mico con respecto al piso.

(c) (5 puntos) Integre la ecuación en b con respecto al tiempo y halle la expresión que describe la posición del mono, como función del tiempo.



SOLUCIÓN:

Si l es la longitud de la cuerda, la cual se asume constante, entonces esta se puede expresar como:

$$l = B + (h - z) + d.$$

Así, de esta forma se obtiene la ligadura del sistema. Esto lleva a que

$$\dot{B} = \dot{z} - \dot{d}.$$

Ahora, la altura de las bananas z_b es $z_b = h - B$, de forma que

$$\dot{z}_b = -\dot{B} = -\left(\dot{z} - \dot{d}\right).$$

Entonces, la energía cinética del mono es:

$$T_M = \frac{1}{2}M\dot{z}^2,$$

mientras que la energía cinética de las bananas es:

$$T_b = \frac{1}{2}m\dot{z}_b^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{z} - \dot{d}\right)^2.$$

En el caso de las energías potenciales del sistema, las asociada al mono V_M y a las bananas V_b son, respectivamente

$$V_M = Mgz \quad \text{y} \quad V_b = mgz_b = mg(h - B) = mg(2h - l + d - z).$$

Con el fin de incluir la ligadura en las ecuaciones de movimiento, se define la función f_1 asociada al método de multiplicadores de Lagrange como:

$$f_1 = l - h + z - d - B = 0.$$

De esta forma, se define el Lagrangiano L del sistema como:

$$L = T_M + T_b - V_M - V_b = \frac{1}{2}M\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{z} - \dot{d})^2 - Mgz - mg(d - z) - mg(2h - l).$$

El término $mg(2h - l)$ es constante, por lo que no afectará las ecuaciones de movimiento. Dado que

$$\frac{\partial L}{\partial z} = g(m - M); \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) = \ddot{z}(M + m) - m\ddot{d} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{1} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial z} = \lambda_1$$

entonces se llega a que la ecuación de Euler-Lagrange asociada a la variable z es:

$$\ddot{z}(M + m) - m\ddot{d} - g(m - M) = \lambda_1. \tag{1}$$

Integrando dos veces respecto al tiempo, aplicando las condiciones ya establecidas para $d(t)$ y asumiendo λ_1 constante (λ_1 representa la tensión de la cuerda) se llega a que:

$$z(t) = z(0) + \dot{z}(0)t + \frac{m}{m + M}d(t) + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1}{m + M} + g\frac{m - M}{m + M}\right)t^2.$$

2. Problema 2 - 20 Puntos (PREGRADO)

Una partícula se mueve en un círculo bajo la influencia de una fuerza proporcional al inverso del cubo ($F \propto 1/r^3$).

(a) (10 puntos) Muestre que la partícula también se puede mover con velocidad radial uniforme, hacia dentro o hacia afuera.

(b) (10 puntos) Encuentre θ como función de r para un movimiento con velocidad radial uniforme v.

SOLUCIÓN:

Para poder obtener una solución con velocidad radial uniforme F debe ser atractiva. En tal caso,

$$F = -\frac{2k}{r^3},$$

donde k es una constante positiva. El factor de 2 se introduce por conveniencia. Entonces, podemos definir un potencial

$$U(r) = -\int_{\infty}^{r} -\frac{2k}{r'^3}\mathrm{d}r' = -\frac{k}{r^2}.$$

Contamos entonces con un potencial efectivo de la forma

$$U_{\text{ef}} = \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{k}{r^2} = \left(\frac{l^2}{2m} - k\right)\frac{1}{r^2}.$$

Note que no es posible tener un orbita circular a menos que $k = l^2/2m$. Concluimos entonces que $k = l^2/2m$ y en consecuencia $U_{\text{ef}} = 0$. Esto implica que sin importar el valor de r, $m\ddot{r} = 0$. Esto tiene por solución

$$r(t) = r_0 + vt.$$

Si $v = 0$ obtenemos una órbita circular, de lo contrario la partícula se mueve con velocidad radial uniforme.
Sabiendo que $l^2/2m = k$, podemos hallar $\dot{\theta}$:

$$l = mr^2\dot{\theta} = \sqrt{2mk} \quad \Rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{2k}{m}}\frac{1}{r^2}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\theta &= \int_0^t \sqrt{\frac{2k}{m}}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2k}{m}}\int_{r_0}^{r(t)} \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r \\ &= \sqrt{\frac{2k}{m}}\frac{1}{v}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)\end{aligned}$$

3. Problema 3 - 30 Puntos (POSGRADO)

Considere una partícula en orbita bajo la acción de un potencial de la forma $U(r) = -\frac{\gamma}{r}$, donde γ es una constante positiva. Ahora, el vector $\vec{A}$, define la forma de la orbita:

$$\vec{A} = \frac{1}{m}\vec{p} \times \vec{L} - \frac{\gamma \vec{r}}{r}.$$

(a) (18 puntos) Use los corchetes de Poisson para mostrar que A es una cantidad conservada, en esta situación (use el tensor asimétrico de Levi-Cevita). En sus propias palabras. En sus propias palabras, explique otras aplicaciones del vector Laplace-Runge-Lenz.

SOLUCIÓN:

Si decimos que un vector es una cantidad conservada, tanto su magnitud como su dirección permanecen constantes. Esto implica que sus componentes son iguales. En términos de los corchetes de Poisson, recordemos que para toda función de las coordenadas y momentos generalizados $f(q_i, p_i, t)$,

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \{f, H\}.$$

Entonces para verificar que el vector $\vec{A}$ es una cantidad conservada debemos calcular el corchete de Poisson de cada componente con el Hamiltoniano.
Es fácil ver que el Hamiltoniano es

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} - \frac{\gamma}{r}.$$

Ahora, procedemos a expresar la componente i del vector $\vec{A}$.

$$A_i = \frac{1}{m}\epsilon_{ijk} p_j L_k - \frac{\gamma x_i}{r} = \frac{1}{m}\epsilon_{ijk} p_j \epsilon_{klm} x_l p_m - \frac{\gamma x_i}{r}.$$

Consideremos el producto $\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}$. En este tensor tenemos 5 índices, cada uno de los cuales pueden tomar uno de 3 posibles valores. Entonces por lo menos tres índices son iguales. Al hallar las combinaciones que permiten que el tensor no se anule, se obtiene que

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}.$$

Entonces,

$$A_i = \frac{1}{m}(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) x_l p_j p_m - \frac{\gamma x_i}{r} = \frac{1}{m}[x_i p^2 - p_i(\vec{r} \cdot \vec{p})] - \frac{\gamma x_i}{r}.$$

Para calcular los corchetes de Poisson necesitamos las siguientes derivadas:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{m}(p^2\delta_{ij} - p_i p_j) - \frac{\gamma\delta_{ij}}{r} + \frac{\gamma x_i x_j}{r^3}, \\
\frac{\partial A_i}{\partial p_j} &= \frac{1}{m}[2x_i p_j - \delta_{ij}(\vec{r}\cdot\vec{p}) - p_i x_j], \\
\frac{\partial H}{\partial p_i} &= \frac{p_i}{m}, \\
\frac{\partial H}{\partial x_i} &= \frac{\gamma x_i}{r^3}.
\end{aligned}$$

El corchete de Poisson es

$$\begin{aligned}
\{A_i, H\} &= \sum_{j=1}^{3}\left\{\left[\frac{1}{m}(p^2\delta_{ij} - p_i p_j) - \frac{\gamma\delta_{ij}}{r} + \frac{\gamma x_i x_j}{r^3}\right]\frac{p_j}{m} - \left[\frac{1}{m}[2x_i p_j - \delta_{ij}(\vec{r}\cdot\vec{p}) - p_i x_j]\right]\frac{\gamma x_j}{r^3}\right\} \\
&= \frac{p_i}{m^2}\left(p^2 - \sum_{j=1}^{3} p_j^2\right) + \frac{\gamma}{m}\sum_{j=1}^{3}\left\{\delta_{ij}\left[\frac{(\vec{r}\cdot\vec{p})}{r^3}x_j - \frac{p_j}{r}\right] + \frac{1}{r^3}\left(p_i x_j^2 - x_i x_j p_j\right)\right\} \\
&= \frac{\gamma}{m}\left[\frac{(\vec{r}\cdot\vec{p})}{r^3}x_i - \frac{p_i}{r}\right] + \frac{\gamma}{m}\frac{1}{r^3}\left[p_i\sum_{j=1}^{3} x_j^2 - x_i\sum_{j=1}^{3} x_j p_j\right] = 0.
\end{aligned}$$

(b) (12 puntos) Muestre que se satisface la siguiente identidad.

$$\{A_i, A_j\} = -\frac{2H}{m}\epsilon_{ijk}L_k$$

SOLUCIÓN:

$$
\begin{aligned}
\{A_i, A_j\} &= \sum_k \left[\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\frac{\partial A_j}{\partial p_k} - \frac{\partial A_i}{\partial p_k}\frac{\partial A_j}{\partial x_k}\right] \\
&= \sum_k \left[\frac{1}{m}(p^2\delta_{ik} - p_i p_k) - \frac{\gamma\delta_{ik}}{r} + \frac{\gamma x_i x_k}{r^3}\right]\frac{1}{m}[2x_j p_k - \delta_{jk}(\vec{r}\cdot\vec{p}) - p_j x_k] - (i \leftrightarrow j) \\
&= \frac{1}{m}\left(\frac{p^2}{m} - \frac{\gamma}{r}\right)(2x_j p_i - \delta_{ij}(\vec{r}\cdot\vec{p}) - p_i x_j) \\
&\qquad + \sum_k \frac{1}{m}\left(-\frac{1}{m}p_i p_k + \frac{\gamma x_i x_k}{r^3}\right)(2x_j p_k - \delta_{jk}(\vec{r}\cdot\vec{p}) - p_j x_k) - (i \leftrightarrow j) \\
&= \frac{1}{m}\left(\frac{p^2}{m} - \frac{\gamma}{r}\right)(2x_j p_i - \delta_{ij}(\vec{r}\cdot\vec{p}) - p_i x_j) + \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}p_i p_j - \frac{\gamma x_i x_j}{r^3}\right)(\vec{r}\cdot\vec{p}) \\
&\qquad + \sum_k \frac{1}{m}\left(-\frac{1}{m}p_i p_k + \frac{\gamma x_i x_k}{r^3}\right)(2x_j p_k - p_j x_k) - (i \leftrightarrow j) \\
&= \frac{1}{m}\left(\frac{p^2}{m} - \frac{\gamma}{r}\right)(2x_j p_i - \delta_{ij}(\vec{r}\cdot\vec{p}) - p_i x_j) + \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}p_i p_j - \frac{\gamma x_i x_j}{r^3}\right)(\vec{r}\cdot\vec{p}) \\
&\qquad - \frac{1}{m}\left[\frac{2x_j p_i p^2}{m} - \left(\frac{p_i p_j}{m} + \frac{2\gamma x_i x_j}{r^3}\right)\sum_k x_k p_k + \frac{\gamma x_i p_j}{r}\right] - (i \leftrightarrow j)
\end{aligned}
$$

Note que el rol de i y j es simétrico en algunos de los términos de la expresión anterior, de modo que se cancelan con su contraparte en $(i \leftrightarrow j)$. Nos quedamos entonces con que

$$
\begin{aligned}
\{A_i, A_j\} &= \frac{1}{m}\left(\frac{p^2}{m} - \frac{\gamma}{r}\right)(2x_j p_i - p_i x_j) - \frac{1}{m}\left(\frac{p^2}{m}2x_j p_i + \frac{\gamma}{r}x_i p_j\right) - (i \leftrightarrow j) \\
&= -\frac{2}{m}\left(\frac{p^2}{m} - \frac{\gamma}{r}\right)(x_i p_j - x_j p_i) = -\frac{2\mathcal{H}}{m}\epsilon_{ijk}L_k.
\end{aligned}
$$

4. Problema 4 - 30 Puntos (POSGRADO)

Una partícula de masa m se mueve bajo la acción de un campo de fuerza central, $\vec{F} = -c\hat{\mathbf{r}}$, donde c es una constante positiva.

a) (10 puntos) Muestre que la partícula se encuentra atrapada en dicho campo. Haga un diagrama cualitativo del potencial como función de la distancia y muestre en él porqué la partícula está atrapada.

SOLUCIÓN:

En esta solución se usará coordenadas cilíndricas (con $z = 0$) para la posición de la partícula. La energía cinética de la partícula viene dada por:

$$
T = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2. \tag{2}
$$

Por otra parte, es posible definir una energía potencial

$$U(r) := -\int_{\mathbf{O}}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^r c ds = cr. \tag{3}$$

Así, el Lagrangiano está dado por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 - cr, \tag{4}$$

de modo que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = mr\dot{\phi}^2 - c$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

La ecuación de Euler-Lagrange para la coordenada generalizada ϕ implica que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} mr^2\dot{\phi} = 0 \tag{5}$$

y por lo tanto la cantidad $mr^2\dot{\phi}$ se conserva. Note que esa cantidad es el momento angular, L.
Por otro lado, para la coordenada r, obtenemos que

$$m\ddot{r} = mr\dot{\phi}^2 - c. \tag{6}$$

Sin embargo, $\dot{\phi} = L/mr^2$ por lo que esta última ecuación se convierte en

$$m\ddot{r} = \frac{L^2}{mr^3} - c \tag{7}$$

Esta es una ecuación diferencial de segundo orden no lineal, cuya solución es difícil de encontrar. Sin embargo, es posible predecir características de la solución a partir de la ecuación. Por ejemplo, cuando r es muy grande, el primer término se hace cero, de modo que la partícula experimentará una aceleración hacia el origen. Esto implica que si por algún motivo, la partícula se logra alejar del origen, el potencial atractivo es capaz de acelerar la partícula de vuelta al origen.

b) (10 puntos) Asumimos que la partícula se encuentra en una orbita circular de radio r_0. Ahora, la partícula sufre una pequeña perturbación radial α, que la hace oscilar en su distancia entre el centro de atracción y su posición. Determine el periodo de estas pequeñas oscilaciones.

SOLUCIÓN:

Si la partícula se encuentra en una órbita circular, $\ddot{r} = 0$, de modo que

$$\frac{L^2}{mr_0^3} - c = 0. \tag{8}$$

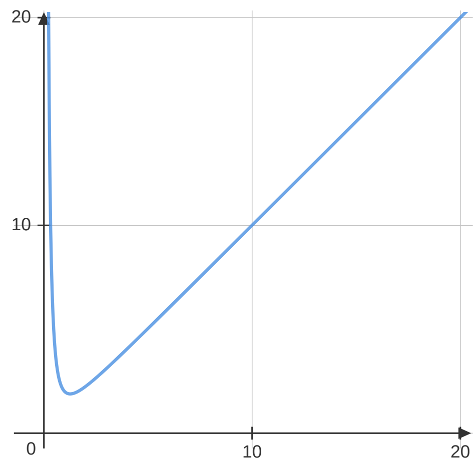


Figura 1: Potencial efectivo en función del radio de órbita

Para hallar el periodo de oscilación, considero el potencial efectivo y su expansión de Taylor de segundo orden al rededor de r_0.

$$U_{\text{ef}} = \frac{L^2}{2mr^2} + cr \tag{9}$$

$$U_{\text{ef}}(r) \approx U_{\text{ef}}(r_0) - \left(\frac{L^2}{mr_0^3} - c\right)(r - r_0) + \frac{1}{2}\frac{3L^2}{mr_0^4}(r - r_0)^2 \tag{10}$$

Note que el término lineal se hace cero gracias a la condición (8). Por lo tanto,

$$U_{\text{ef}}(r) \approx U_{\text{ef}}(r_0) + \frac{1}{2}\frac{3L^2}{mr_0^4}(r - r_0)^2.$$

De aquí obtenemos que la fuerza está dada por

$$F_{\text{r}} = -\frac{\mathrm{d}U_{\text{ef}}}{\mathrm{d}r} \approx -\frac{3L^2}{mr_0^4}(r - r_0)$$

y por ende

$$m\ddot{r} + \frac{3L^2}{mr_0^4}(r - r_0) = 0.$$

Esta ecuación diferencial caracteriza una oscilación armónica en torno a r_0 con frecuencia

$$\omega = \sqrt{\frac{3L^2}{m^2 r_0^4}} = \sqrt{3}\frac{L}{mr_0^2}.$$

De aquí, se obtiene finalmente que el periodo es:

$$\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\frac{mr_0^2}{L}.$$

c) (10 puntos) Asuma ahora que la partícula se encontraba en su trayectoria radial y sufrió un impulso radial, contrario a la dirección de la fuerza de atracción, tal que la distancia al centro de atracción pasó de r_0 a $2r_0$. Calcule el cambio en la energía mecánica.

SOLUCIÓN:

Al mencionar la energía mecánica total es inevitable traer a colación el Hamiltoniano. A continuación, se calcula el Hamiltoniano asociado a la función Lagrangiana en (4).

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \qquad p_\phi = L = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= p_r\dot{r} + p_\phi\dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 + cr \\ &= \frac{1}{2}p_r\dot{r} + \frac{1}{2}L\dot{\phi} + cr\end{aligned}$$

Como $\dot{\phi} = L/(mr^2)$ y $\dot{r} = p_r/m$, se obtiene que el hamiltoniano es:

$$\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L^2}{2mr^2} + cr \tag{12}$$

Cuando la partícula está en su órbita circular de radio r_0, $p_r = m\dot{r} = 0$ y por lo tanto,

$$\mathcal{H}_0 = \frac{L^2}{2mr_0^2} + cr_0. \tag{13}$$

Note que la energía mecánica del sistema es el potencial efectivo.

Una vez la partícula recibe el impulso, su hamiltoniano cambia. Sin embargo, dado que el impulso es radial, este no altera el momento angular, de modo que el potencial efectivo no cambia. Cuando la partícula alcanza su radio máximo, toda la energía se encuentra en el potencial efectivo. De lo contrario, la energía asociada al momento radial puede convertirse en energía potencial, aumentando el radio. El siguiente diagrama muestra un bosquejo de la trayectoria, junto con la gráfica del potencial y la energía mecánica total.

Así, el hamiltoniano después del impulso será

$$\mathcal{H}' = \frac{L^2}{8mr_0^2} + 2cr_0. \tag{14}$$

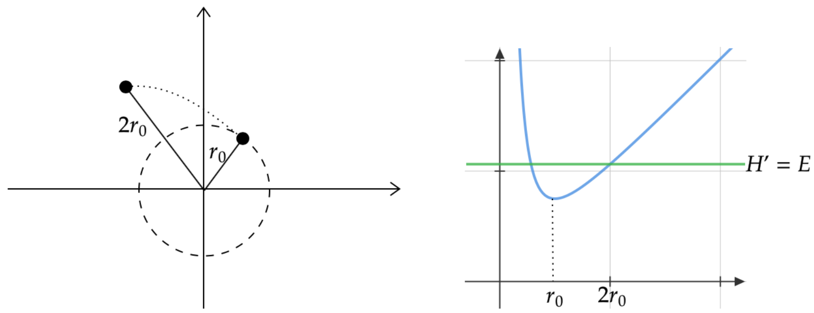


Figura 2: Diagrama y gráfica de energías

En consecuencia, el cambio de la energía mecánica será:

$$\Delta E = \mathcal{H}' - \mathcal{H}_0 = \frac{L^2}{8mr_0^2} + 2cr_0 - \frac{L^2}{2mr_0^2} - cr_0 = -\frac{3}{8}\frac{L^2}{mr_0^2} + cr_0.$$

Recordando que $L^2/(m{r_0}^3) = c$, obtenemos que

$$\Delta E = \frac{5}{8}cr_0.$$

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2021 - 1
Mecánica Cuántica

Este examen se debe entregar, antes de las **5:20 pm del martes 27 de julio / 2021**, subiéndolo al curso Actividades de posgrado de física en la plataforma **Bloque neón** como **un único archivo PDF**.

Usted debe responder todos los ejercicios a mano explicando claramente el procedimiento, de no ser así no se dará puntaje. Cuando termine de contestar el examen, cree un único archivo en PDF y súbalo en respuesta a la asignación correspondiente en Bloque neón.

Este examen es para ser realizado de manera **individual**. Usted no debe comunicarse con ninguno de sus compañeros ni utilizar ningún documento, libro o apuntes, diferente a las que se le están asignando en el enunciado. Al final de este documento, en el apéndice, hay algunas fórmulas que pueden ser útiles para el desarrollo de este examen.

Firmando el examen que sube a Bloque neón, usted admite que entiende que omitir las reglas estipuladas para este examen será considerado un abuso a la confianza que se ha puesto en usted y tendrá las consecuencias estipuladas en el reglamento general de estudiantes de doctorado de la Universidad.

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2021 - 1
Mecánica Cuántica

PROBLEMA 1. (20 puntos) Oscilador armónico cuántico

En este ejercicio se discutiran las caracteristicas del oscilador armónico cuántico.

(a) **(4 puntos)** Calcule el valor esperado de los operadores posición, $\hat{X}$, y momento, $\hat{P}$, del oscilador armónico en el estado propio $|n\rangle$. Discuta sobre la física detrás del resutado obtenido.

(b) **(4 puntos)** Calcule la desviación estandar de $\Delta x = (\langle \hat{X}^2 \rangle - \langle \hat{X} \rangle^2)^{1/2}$ y discuta sobre la física detrás del resutado obtenido.

(c) **(6 puntos)** El resultado del apartado anterior se puede tambien entender desde la perspectiva de la función de onda del oscilador, $\psi_n(x)$. Para entender esto, siga los siguientes pasos:

i. **(4 puntos)** A partir de

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \tag{1}$$

encuentre la formula de recurrencia entre $\psi_n(x) = \langle x|n\rangle$ y $\psi_{n+1}(x) = \langle x|n+1\rangle$,

$$\frac{\beta}{\sqrt{2(n+1)}} \left(x\psi_n(x) - \frac{1}{\beta^2}\frac{d}{dx}\psi_n(x) \right) = \psi_{n+1}(x). \tag{2}$$

ii. **(2 puntos)** Sabiendo que

$$\psi_0(x) = \left(\frac{\beta^2}{\pi}\right)^{1/4} e^{\frac{-\beta^2 x^2}{2}} \qquad \psi_1(x) = \left(\frac{\beta^2}{\pi}\right)^{1/4} \frac{\beta}{\sqrt{2}} 2xe^{\frac{-\beta^2 x^2}{2}}, \tag{3}$$

realice un bosquejo de la grafica de $|\psi_0(x)|^2$ y de $|\psi_1(x)|^2$.

(d) **(6 puntos)** Demuestre que los puntos de retorno, x_n, para una partícula clásica cuya energía total, E, está dada por el valor cuántico $E = E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$, están dados por

$$x_n = \pm\frac{1}{\beta}\sqrt{(2n+1)}. \tag{4}$$

Ubique estos puntos en los graficos del apartado anterior. ¿lo qué observa es consistente con el resultado del apartado b? Comente sobre el comportamiento de $\psi_0(x)$ y $\psi_1(x)$ en todo el espacio.

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2021 - 1
Mecánica Cuántica

PROBLEMA 2. (20 puntos) Formalismo

Considere un sistema físico cuyo espacio de estados es tridimensional y se expande en la base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$. En esta base, el hamiltoniado y dos operadores $\hat{A}$ y $\hat{B}$ pueden escribirse como

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \hat{A} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{B} = b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con ω_0, a y b constantes positivas y reales.

En el tiempo inicial, $t = 0$,

$$|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle. \tag{5}$$

(a) **(4 puntos)** Si a $t = 0$, se mide la energía del sistema ¿qué valores se pueden encontrar y con qué probabilidades?

(b) **(12 puntos)** En lugar de medir $\hat{H}$, en $t = 0$ se mide $\hat{A}$:

i. **(6 puntos)** ¿qué valores se pueden encontrar y con qué probabilidades?

ii. **(6 puntos)** ¿Cuál es el estado despues de medir $\hat{A}$?

(c) **(4 puntos)** Calcule el valor medio de $\hat{A}$ en función del tiempo y comente sobre la física detrás delresultado obtenido.

Universidad de los Andes — Departamento de Física

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2021 - 1
Mecánica Cuántica

PROBLEMA 3. (30 puntos) ESPINORES

Considere una partícula con espín 1/2 cuyo vector de estado se denota por $|\Psi\rangle$. Dos funciones de onda, asociadas a cada valor de espín, se pueden definir de la siguiente manera:

$$\psi_+(\vec{r}) = \langle \vec{r}; +1/2\rangle = R(r)\left[Y_0^0(\theta,\phi) + \frac{1}{\sqrt{3}}Y_1^0(\theta,\phi)\right] \tag{6}$$

$$\psi_-(\vec{r}) = \langle \vec{r}; -1/2\rangle = \frac{R(r)}{\sqrt{3}}\left[Y_1^1(\theta,\phi) - Y_1^0(\theta,\phi)\right], \tag{7}$$

donde (r,θ,ϕ) son las coordenadas de la partícula y $R(r)$ es una función dada que depende de la variable r.

(a) **(6 puntos)** ¿Qué condición debe satisfacer $R(r)$ para que $|\Psi\rangle$ esté normalizada?

(b) **(8 puntos)** Si $\hat{S}_z$ se mide con la partícula en el estado $|\Psi\rangle$

  i. **(4 puntos)** ¿Qué resultados pueden ser encontrados?

  ii. **(4 puntos)** ¿cuál es la probabilidad de obtener cada uno de los posibles valores?

(c) **(8 puntos)** Si $\hat{L}_z$ se mide con la partícula en el estado $|\Psi\rangle$

  i. **(4 puntos)** ¿Qué resultados pueden ser encontrados?

  ii. **(4 puntos)** ¿cuál es la probabilidad de obtener cada uno de los posibles valores?

(d) **(8 puntos)** Considere una medida de $\hat{L}^2$ con la partícula en el estado $|\Psi\rangle$.

  i. **(4 puntos)** Si el resultado obtenido es cero, ¿Cuál es el estado de la partícula después de la medida?

  ii. **(4 puntos)** Si el resultado obtenido es $2\hbar^2$, ¿Cuál es el estado de la partícula después de la medida?

Universidad de los Andes — Departamento de Física

Doctorado en Ciencias - Física

Examen de Conocimientos - 2021 - 1

Mecánica Cuántica

PROBLEMA 4. (30 puntos) SISTEMAS COMPUESTOS Y ROTACIONES

Considere un sistema compuesto por dos objetos denotados por i y j, cada uno cada uno correspondiente a un estado de dos niveles, $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Los estados

$$|\psi_\pm\rangle_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_i|1\rangle_j \pm |1\rangle_i|0\rangle_j\right) \tag{8}$$

$$|\phi_\pm\rangle_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_i|0\rangle_j \pm |1\rangle_i|1\rangle_j\right) \tag{9}$$

$$\tag{10}$$

se conocen como los estados de Bell y constituyen una base del espacio de Hilbert $H_i \otimes H_j$.

(a) **(10 puntos)** Suponga que dos observadores, llamados Alice y Bob, cada uno recibe uno de los subsistemas cuando el sistema compuesto está preparado en $|\Phi_+\rangle$. Por ejemplo, Alice recibe el subsistema i en su laboratorio y Bob recibe j en su laboratorio. Además suponga que Alice recibe un qubit en el estado arbitrario

$$|\Omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha|0\rangle_c + \beta|1\rangle_c\right), \tag{11}$$

con α y β constantes complejas tales que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Demuestre que el estado $|\Phi_+\rangle_{AB} \otimes |\Omega\rangle_C$ (en el espacio de Hilbert $H_A \otimes H_B \otimes H_c$) se puede escribir como

$$\begin{aligned}|\Phi_+\rangle_{AB} \otimes |\Omega\rangle_c = \frac{1}{2\sqrt{2}}[|\Phi_+\rangle_{Ac}(\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B) \quad &+ \quad |\Phi_-\rangle_{Ac}(\alpha|0\rangle_B - \beta|1\rangle_B) \\ +|\psi_+\rangle_{Ac}(\alpha|1\rangle_B + \beta|0\rangle_B) \quad &+ \quad |\psi_-\rangle_{Ac}(\beta|0\rangle_B - \alpha|1\rangle_B)],\end{aligned} \tag{12}$$

es decir como una expansión en termino de los estados de Bell $|\psi_\pm\rangle_{AC}$ y $|\Phi_\pm\rangle_{AC}$ para el sistema en el laboratorio de Alice.

(b) **(8 puntos)** Si Alice realiza una medición del estado del sistema en su laboratorio y determina el estado de Bell que ella tiene, ¿ Qué se puede decir del estado que tiene Bob en su laboratorio?

(c) **(12 puntos)** Alice puede comunicar a Bob (por medio de un canal clásico, por ejemplo un teléfono) que realice una de cuatro operaciones para que el sistema en el laboratorio de Bob quede en el mismo estado $|\Omega\rangle$ que tenia Alice. ¿cuáles son estas operaciones? Para contestar esta pregunta siga los siguientes pasos:

i. **(6 puntos)** Empiece demostrando que el operador rotación, por un angulo γ en el espacio de espín 1/2, alrededor de un eje u,

$$^{(1/2)}\hat{R}_u(\gamma) = e^{\frac{-i}{\hbar}\gamma\hat{\vec{S}}\cdot\vec{u}}, \tag{13}$$

con $\hat{\vec{S}} = \frac{\hbar}{2}\hat{\vec{\sigma}}$ y $\hat{\vec{\sigma}}$ un vector con las matrices de Pauli, se puede representar en la base $\{|1/2\rangle, |-1/2\rangle\}$ como

$$^{(1/2)}\hat{R}_u(\gamma) = \begin{pmatrix} cos(\frac{\gamma}{2}) - iu_z sin(\frac{\gamma}{2}) & (-iu_x - u_y)sin(\frac{\gamma}{2}) \\ (-iu_x + u_y)sin(\frac{\gamma}{2}) & cos(\frac{\gamma}{2}) + iu_z sin(\frac{\gamma}{2}) \end{pmatrix}, \tag{14}$$

con u_x, u_y, u_z las componentes cartesianas de $\hat{u}$.
Note que

$$\begin{aligned} (\hat{\vec{\sigma}}\cdot\hat{u})^n &= (\hat{\vec{\sigma}}\cdot\hat{u}) \qquad \text{para n impar} \\ (\hat{\vec{\sigma}}\cdot\hat{u})^n &= 1 \qquad \text{para n par} \end{aligned} \tag{15}$$

ii. **(6 puntos)** A partir del rsultado anterior, reconozca que operaciones debe realizar Bob para que el sistema en su laboratorio esté en el estado $|\Omega\rangle$. Para esto es útil escribir las matrices $^{(1/2)}\hat{R}_u(\gamma)$ para las rotaciones alrededor del eje x, del eje y y del eje z, es decir, $^{(1/2)}\hat{R}_x(\gamma)$, $^{(1/2)}\hat{R}_y(\gamma)$ y $^{(1/2)}\hat{R}_z(\gamma)$, respectivamente.

El fenómeno descrito anteriormente, de transportar un estado de un laboratorio a otro usando un e-bit (un estado de Bell), se llama teleportación cuántica.

Doctorado en Ciencias - Física

Examen de Conocimientos - 2021 - 1

Mecánica Cuántica

INFORMACIÓN ÚTIL

(a) Energía del átomo de hidrogeno en el modelo de Bohr:

$$E_n^{(0)} = -\frac{e^4 m_0}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2 2n^2}. \tag{16}$$

Radio de Bohr

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_0 e^2}. \tag{17}$$

Evolución del valor medio de un operador $\hat{O}$:

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{O}\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle[\hat{O}, \hat{H}]\rangle, \tag{18}$$

con $\hat{H}$ siendo el hamiltoniano.

(b) Oscilador armónico, operadores escalera

$$\hat{a}|n >= \sqrt{n}|n-1> \quad \text{y} \quad \hat{a}^\dagger|n >= \sqrt{n+1}|n+1> \quad [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \tag{19}$$

(c) Oscilador armónico,

$$\hat{X} = \frac{1}{\beta\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \qquad \hat{P} = \frac{\hbar\beta}{i\sqrt{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \tag{20}$$

$$\beta = \frac{m\omega}{\hbar} \tag{21}$$

(d)

$$Y_l^m(\theta,\varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} e^{im\varphi} P_l^m(\cos\theta)$$

$$Y_l^m(\pi-\theta,\varphi+\pi) = (-1)^l Y_l^m(\theta,\varphi)$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} Y_l^{m*}(\theta,\varphi) Y_{l'}^{m'}(\theta,\varphi) sin(\theta)\, d\theta = \delta_{l,l'}\ \delta_{m,m'}$$

(e) Para los operadores de momento ángular $\hat{J}$:

$\hat{J}_z|J,m_j>= j(j+1)\hbar|J,m_j>$

$\hat{J}_+|J,m_j>= \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m+1)}|J,m_j+1>$

$\hat{J}_-|J,m_j>= \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m-1)}|J,m_j-1>$

$[\hat{J}_+,\hat{J}_z] = -\hbar\hat{J}_+$

$[\hat{J}_-,\hat{J}_z] = +\hbar\hat{J}_-$

(f) Matrices de Pauli

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(g) Operador simetrizador

$$\hat{\mathcal{S}} = \frac{1}{N!}\Sigma_\alpha \hat{P}\alpha. \tag{22}$$

Operador antisimetrizador

$$\hat{\mathcal{A}} = \frac{1}{N!}\Sigma_\alpha \epsilon_\alpha \hat{P}_\alpha. \tag{23}$$

En las expresiones de $\hat{\mathcal{S}}$ y $\hat{\mathcal{A}}$, N es el número de partículas del sistema y $\hat{P}_\alpha$ es el operador de permutación. ϵ_α puede tomar los valores $+1$ o -1 dependiendo de si la permutación es par $(+1)$ o impar (-1).

(h) Teoría de perturbaciones independientes del tiempo para el caso no degenerado:
La corrección a la energía a primer orden es:

$$E_n^{(1)} = <\phi_n|\hat{H}_I|\phi_n> \tag{24}$$

en donde $|\phi_n>$ son los estados propios del hamiltoniano sin perturbar.

La corrección a la energía a segundo orden es:

$$E_n^{(2)} = \sum_{k\neq n} \frac{|<\phi_k|\hat{H}_I|\phi_n>|^2}{E_n^0 - E_k^0}. \tag{25}$$

La correción de primer orden al estado es:

$$|\varphi_n^{(1)}\rangle = \sum_{k\neq n} \frac{<\phi_k|\hat{H}_I|\phi_n>}{E_n^0 - E_k^0} |\varphi_k^{(0)}\rangle. \tag{26}$$

la corrección del estado a segundo orden es :

$$|\varphi_n^{(2)}\rangle = \sum_{k\neq n}\sum_{l\neq n} \frac{<\phi_k|\hat{H}_I|\phi_l><\phi_l|\hat{H}_I|\phi_n>}{(E_n^0 - E_k^0)(E_n^0 - E_l^0)} |\varphi_k^{(0)}\rangle. \tag{27}$$

(i) Expansiones matemáticas

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{28}$$

$$sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!} \tag{29}$$

$$cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{(2n)}}{(2n)!} \tag{30}$$

Ejercicio 1

ⓐ $\langle \hat{x} \rangle = \langle n | \hat{x} | n \rangle$ $\qquad \hat{x} = \frac{1}{\beta\sqrt{2}} (\hat{a} + \hat{a}^{+})$

$= \frac{1}{\beta\sqrt{2}} \langle n | \hat{a} + \hat{a}^{+} | n \rangle$

$= 0$ $\qquad \boxed{\langle \hat{x} \rangle = 0}$

- $\langle \hat{p} \rangle = \langle n | \hat{p} | n \rangle$ $\qquad \hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\beta}{\sqrt{2}} (\hat{a} - \hat{a}^{+})$

$= \frac{\hbar}{i} \frac{\beta}{\sqrt{2}} \langle n | \hat{a} - \hat{a}^{+} | n \rangle$

$= 0$ $\qquad \boxed{\langle \hat{p} \rangle = 0}$

- los resultados tienen sentido ya que la enegía potencial es simetrica respecto al origen.

(1.b) $\Delta x = \left(\langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2 \right)^{1/2}$

- $\langle \hat{x}^2 \rangle = \frac{1}{2\beta^2} \langle n | (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 | n \rangle$

$$= \frac{1}{2\beta^2} \left[\cancel{\langle n | \hat{a}^2 | n \rangle}^{\,0} + \langle n | \hat{a}\hat{a}^\dagger | n \rangle + \langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a} | n \rangle + \cancel{\langle n | \hat{a}^{\dagger 2} | n \rangle}^{\,0} \right]$$

Como $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$

$\Rightarrow \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} = 1 \quad \Rightarrow \hat{a}\hat{a}^\dagger = 1 + \hat{a}^\dagger \hat{a}$

$$\langle \hat{x}^2 \rangle = \frac{1}{2\beta^2} \left[1 + \langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a} | n \rangle + \langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a} | n \rangle \right]$$

$$= \frac{1}{2\beta^2} \left[1 + 2n \right]$$

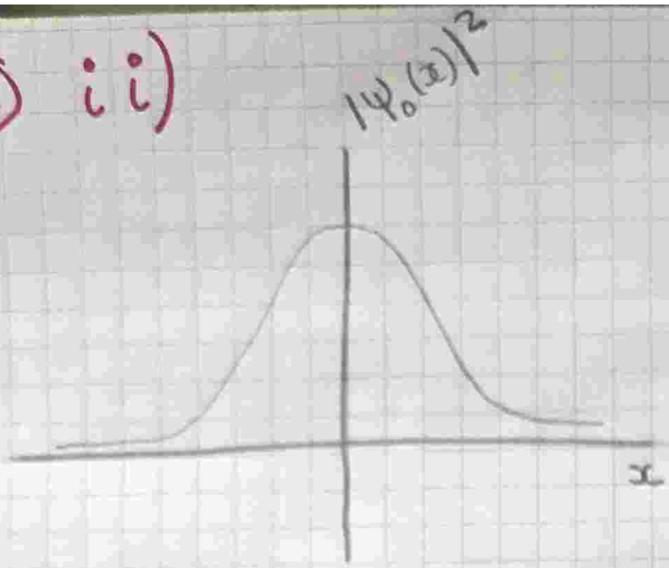
- $\langle x \rangle^2 = 0$ (Por resultado Parte (a))

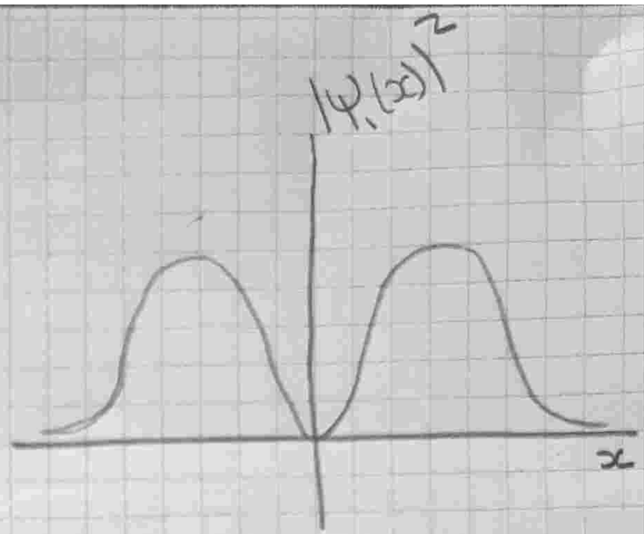
$$\Rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{1}{2\beta^2}[1+2n] - 0} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\beta} \sqrt{(1+2n)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}\left(n + \frac{1}{2}\right)}}$$

Se observa que cuando n aumenta, la incertidumbre en la posición aumenta.

1c ii)





1d Punto de retorno : $E = U(x_n)$

$$E_n = \frac{1}{2} k x_n^2$$

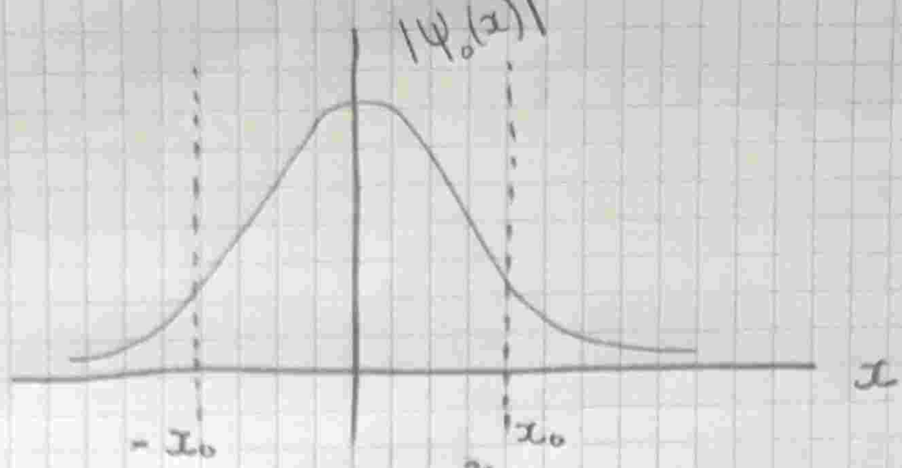
$$\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} k x_n^2 \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

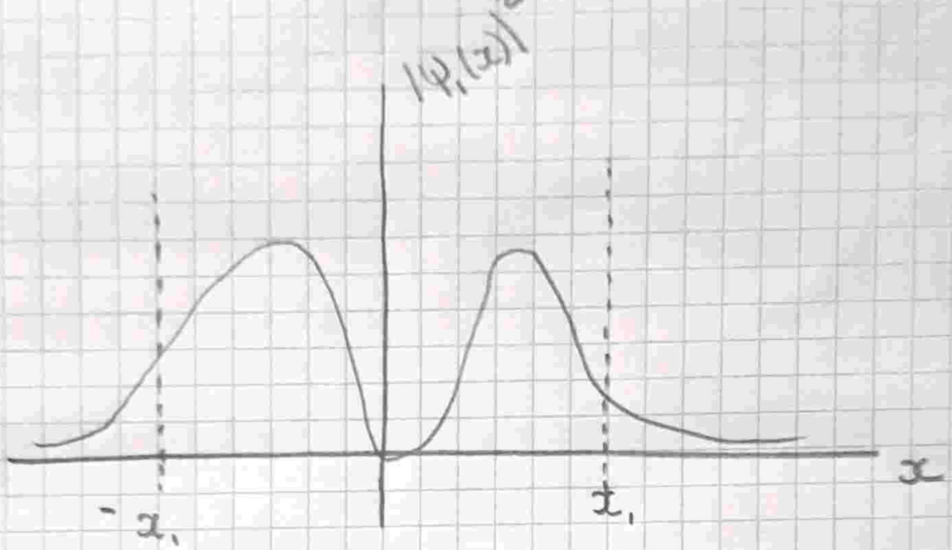
$$\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \omega^2 m x_n^2$$

$$x_n = \pm\sqrt{\frac{2\hbar}{\omega m}\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

$$\boxed{x_n = \pm \frac{1}{\beta}\sqrt{(2n+1)}}$$





los puntos de retorno clasicos se alejan al aumentar n de manera analoga al resultado del apartado b.

En la región prohibida por el potencial, existe una probabilidad $\neq 0$ de encontrar al oscilador.

Ejercicio 2

a) Los posibles valores que se pueden encontrar corresponden a los valores propios de $\hat{H}$.
Como la matriz que representa a $\hat{H}$ es diagonal:

un posible valor es $\hbar\omega_0$,
Con probabilidad $\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$

El otro posible valor es $2\hbar\omega_0$
Con probabilidad $\left|\frac{1}{2}\right|^2 + \left|\frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}$.

b) i) $\text{Det}\begin{bmatrix} a-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & a \\ 0 & a & -\lambda \end{bmatrix} = 0$

$(a-\lambda)\left[(-\lambda)(-\lambda) - a^2\right] = 0$

$(a-\lambda)\left[\lambda^2 - a^2\right] = 0$

$(a-\lambda)(\lambda+a)(\lambda-a) = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_1 &= a \\ \lambda_2 &= a \\ \lambda_3 &= -a \end{aligned}} \Rightarrow \text{Se pueden encontrar estos valores.}$$

- $P_{\lambda_i} = \left|\langle v_i | \psi(t=0)\rangle\right|^2$

Encontrando los vectores Propios:

$\rightsquigarrow \lambda_1 = a$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & a \\ 0 & a & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$0 = 0$

$-a\beta + a\gamma = 0 \qquad \beta = \gamma \qquad V_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$a\beta - a\gamma = 0 \qquad \beta = \gamma$

$\rightsquigarrow \lambda_2 = a$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & a \\ 0 & a & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$0 = 0$

$-a\beta' + a\gamma' = 0 \qquad \beta' = \gamma'$

$a\beta' - a\gamma' = 0 \qquad \beta' = \gamma'$

además: $\langle V_1 | V_2 \rangle = 0$

$\alpha^* \alpha' + \beta^* \beta' + \gamma^* \gamma' = 0$

$\alpha^* \alpha' + \beta^* \gamma' + \gamma^* \gamma' = 0$

$\alpha^* \alpha' + (\beta^* + \gamma^*)\gamma' = 0$

$\alpha = \beta = \gamma = 1$

$\Downarrow$

$\alpha^* = \beta^* = \gamma^* = 1$

$\alpha' + 2\gamma' = 0 \qquad \gamma' = -\frac{\alpha'}{2}$

$$V_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow \lambda_3 = -a$

$$\begin{pmatrix} 2a & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha'' \\ \beta'' \\ \gamma'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2a\alpha'' = 0 \qquad \alpha'' = 0$$

$$a\beta'' + a\gamma'' = 0 \qquad \beta'' = -\gamma''$$

$$a\beta'' + a\gamma'' = 0 \qquad \beta'' = -\gamma''$$

$$V_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Para calcular las Probabilidades:

$\rightsquigarrow P_a = P_{\lambda_1} + P_{\lambda_2}$

$$P_{\lambda_1} = \left| \langle V_1 | \psi(t=0) \rangle \right|^2$$

$$= \left| \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\langle u_1| + \langle u_2| + \langle u_3| \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |u_1\rangle + \frac{1}{2} |u_2\rangle + \frac{1}{2} |u_3\rangle \right) \right|^2$$

$$= \left| \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right|^2$$

$$P_{\lambda_2} = \left| \langle V_2 | \psi(t=0) \rangle \right|^2$$

$$= \left| \left(-\frac{2}{\sqrt{6}} \langle u_1| + \frac{1}{\sqrt{6}} \langle u_2| + \frac{1}{\sqrt{6}} \langle u_3| \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |u_1\rangle + \frac{1}{2} |u_2\rangle + \frac{1}{2} |u_3\rangle \right) \right|^2$$

$$= \left| -\frac{2}{\sqrt{12}} + \frac{1}{2\sqrt{6}} + \frac{1}{2\sqrt{6}} \right|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{(4)(3)}} \right|^2$$

$$P_{\lambda_2} = \left| \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right|^2$$

$$\Rightarrow P_a = P_{\lambda_1} + P_{\lambda_2}$$

$$= \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{\sqrt{6}\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{\sqrt{6}\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \right)$$

$$= \frac{2}{6} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1.$$

$\boxed{\text{Probabilidad en encontrar el resultado } a \text{ es } 1}$

- $\boxed{P_{\lambda_3} = P_{-a} = 0}$ ya que $P_a = 1$ y $P_a + P_{-a} = 1$.

Comprobando este resultado se tiene:

$$P_{\lambda_3} = \left| \langle V_3 | \psi(t=0) \rangle \right|^2$$

$$= \left| \left(0 \langle u_1 | + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle u_2 | - \frac{1}{\sqrt{2}} \langle u_3 | \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |u_1\rangle + \frac{1}{2} |u_2\rangle + \frac{1}{2} |u_3\rangle \right) \right|^2$$

$$= \left| 0 + \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right|^2 = 0 \quad //$$

ii) El estado despues de medir $\hat{A}$ es una combinacion lineal de $|V_1\rangle$ y $|V_2\rangle$

2C $$\frac{d}{dt}\langle\hat{A}\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle[\hat{A},\hat{H}]\rangle$$

$$= \frac{1}{i\hbar}\langle \hat{A}H - \hat{H}\hat{A}\rangle$$

$$= \frac{1}{i\hbar}\left\langle \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hbar\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\hbar\omega_0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\hbar\omega_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hbar\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\hbar\omega_0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\hbar\omega_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix}\right\rangle$$

$$= \frac{1}{i\hbar}\left\langle \begin{bmatrix} a\hbar\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a\hbar\omega_0 \\ 0 & 2\hbar\omega_0 a & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hbar\omega_0 a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a\hbar\omega_0 \\ 0 & 2a\hbar\omega_0 & 0 \end{bmatrix}\right\rangle$$

$$= \frac{1}{i\hbar}\left\langle \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\rangle$$

$\Rightarrow$ $\hat{A}$ es una constante de movimiento.

Ejercicio 3

ⓐ Dandose cuenta que $\psi_\pm(\bar{r})$ contiene información espacial y de espín, se tiene el espinor

$$\Psi(\bar{r}) = \begin{pmatrix} \psi_+(\bar{r}) \\ \psi_-(\bar{r}) \end{pmatrix}.$$

Entonces, que $|\psi\rangle$ esté normalizado implica:

$$\int |\psi_+(\bar{r})|^2 d\bar{r} + \int |\psi_-(\bar{r})|^2 d\bar{r} = 1$$

$$\left[\int |R(r)|^2 \left| Y_0^0(\theta,\varphi) + Y_1^0(\theta,\varphi)\frac{1}{\sqrt{3}}\right|^2 r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi \right.$$

$$\left. + \int \frac{|R(r)|^2}{3} \left| Y_1^1(\theta,\varphi) - Y_1^0(\theta,\varphi)\right|^2 r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi \right] = 1$$

Usando propiedades de los armónicos esféricos:

$$\left[\int_0^\infty |R(r)|^2 r^2 dr \left[1 + 0 + 0 + \frac{1}{3}\right]\right.$$

$$\left. + \int_0^\infty \frac{|R(r)|^2 r^2 dr}{3}\left[1 - 0 - 0 + 1\right]\right] = 1$$

$$\int_0^\infty |R(r)|^2 r^2 dr \left[\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\right] = 1 \Rightarrow \boxed{\text{Condición: } \int |R(r)|^2 r^2 dr = \frac{1}{2}}$$

(3b) i) los valores propios de $\hat{S}_z$ para una particula con espin $\hbar/2$ corresponden a los posibles valores de la medición

$\Rightarrow$ $\boxed{\begin{aligned} S_z &= +\frac{\hbar}{2} \\ S_z &= -\frac{\hbar}{2} \end{aligned}}$ posibles resultados de la medición.

ii) • $P_{\hbar/2} = \int \left| \langle \bar{r}; \frac{\hbar}{2} | \psi \rangle \right|^2 d^3\bar{r}$

$$= \int |\psi_+(\bar{r})|^2 d^3\bar{r}$$

$$= \int |R(r)|^2 \left| Y_0^0(\theta,\varphi) + \frac{1}{\sqrt{3}} Y_1^0(\theta,\varphi) \right|^2 r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\varphi$$

$$= \int_0^\infty |R(r)|^2 r^2 dr \cdot \left[\left(1 + 0 + 0 + \frac{1}{3} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{4}{3} \right] = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{P_{\hbar/2} = \frac{2}{3}}$$

Como $P_{\hbar/2} + P_{-\hbar/2} = 1 \Rightarrow \boxed{P_{-\hbar/2} = \frac{1}{3}}$

(3c) i) Dadas $\psi_+(\bar{r})$ y $\psi_-(\bar{r})$, al medir $\hat{L}_z$ los posibles resultados de la medicion son

$$\boxed{m_\ell = \begin{cases} 1\hbar \\ 0 \\ -1\hbar \end{cases}}$$

$\hat{L}_z |\ell, m_\ell\rangle = m_\ell \hbar |\ell, m_\ell\rangle$

ii) $$P_{m_\ell=0} = \int \Big(|\langle r, \ell=1, m_\ell=0; + | \psi\rangle|^2 + |\langle r, \ell=1, m_\ell=0; - | \psi\rangle|^2 + |\langle r, \ell=0, m_\ell=0; + | \psi\rangle|^2 + |\langle r, \ell=0, m_\ell=0; - | \psi\rangle|^2 \Big) d^3\bar{r}$$

Usando las propiedades de los armónicos esfericos:

$$P_{m_\ell=0} = \int |R(r)|^2 r^2 dr \left(\tfrac{1}{3}\right) + \int |R(r)|^2 r^2 dr \left(\tfrac{1}{3}\right) + \int |R(r)|^2 r^2 dr \,(1) + \int |R(r)|^2 r^2 dr \,(0)$$

$$= \int |R(r)|^2 r^2 dr \left[\tfrac{5}{3}\right] = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{5}{3}\right) = \tfrac{5}{6}$$

$$\boxed{P_{m_\ell=0} = \frac{5}{6}}$$

$$P_{m_\ell = 1} = \int | \langle r, \ell = 1, m_\ell = 1 ; + | \psi \rangle |^2$$

$$+ | \langle r, \ell = 1, m_\ell = 1 ; - | \psi \rangle |^2 \, d^3\bar{r}$$

$$= \int |R(r)|^2 r^2 dr \, [0] + \int |R(r)|^2 r^2 dr \left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6} \qquad \boxed{P_{m_\ell = 1} = \frac{1}{6}}$$

$$\boxed{P_{m_\ell = -1} = 0}$$

3d) $\hat{L}^2 |\ell, m\rangle = \hbar^2 \ell(\ell+1) |\ell, m\rangle$

i) Si al medir se encuentra el valor cero $\Rightarrow$ $\ell = 0$ $\Rightarrow$ la partícula queda en un estado propio $Y_{\ell=0}^{m_\ell = 0}(\theta, \varphi)$. Dado el estado $\psi_+(\bar{r})$ $\Rightarrow$ el estado después de la medición es:

$$\tilde{\psi}(\bar{r}) = \begin{pmatrix} N R(r) Y_0^0(\theta, \varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para determinar $N \Rightarrow$

$$1 = \int N^2 |R(r)|^2 \, |Y_0^0(\theta,\varphi)|^2 \, r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$= N^2 \int_0^\infty |R(r)|^2 r^2 dr \int d\Omega \, |Y_0^0(\theta,\varphi)|^2$$

$$= N^2 \left(\tfrac{1}{2}\right)(1)$$

$$\Rightarrow \quad N = \sqrt{2}.$$

$$\boxed{\tilde{\Psi}(\bar{r}) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\, R(r)\, Y_0^0(\theta,\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}}$$

3 d ii) si el resultado es $2\hbar^2 \Rightarrow l = 1.$

$$\boxed{\tilde{\Psi}(\bar{r}) = \begin{pmatrix} \tilde{N} \, \frac{R(r)}{\sqrt{3}} \, Y_1^1(\theta,\varphi) \\ \tilde{N} \, \frac{R(r)}{\sqrt{3}} \left[Y_1^1(\theta,\varphi) - Y_1^0(\theta,\varphi) \right] \end{pmatrix}}$$

Para determinar $\tilde{N} \Rightarrow$

$$1 = \frac{\tilde{N}^2}{3} \int |R(r)|^2 r^2 dr \int \left[|Y_1^1(\theta,\varphi)|^2 + |Y_1^1(\theta,\varphi)|^2 + |Y_1^0(\theta,\varphi)|^2 \right] d\Omega$$

$$= \frac{\tilde{N}^2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)(1+1+1) \Rightarrow \boxed{\tilde{N} = \sqrt{2}}$$

Ejercicio 4

(a) $|\phi_+\rangle_{AB} \otimes |\Omega\rangle_C =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B \right) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\alpha |0\rangle_C + \beta |1\rangle_C \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\alpha |0\rangle_A |0\rangle_B |0\rangle_C + \beta |0\rangle_A |0\rangle_B |1\rangle_C + \alpha |1\rangle_A |1\rangle_B |0\rangle_C + \beta |1\rangle_A |1\rangle_B |1\rangle_C \right)$$

Noto que:

- $|\psi_+\rangle_{AC} + |\psi_-\rangle_{AC}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|0\rangle_A |1\rangle_C + \cancel{|1\rangle_A |0\rangle_C} + |0\rangle_A |1\rangle_C - \cancel{|1\rangle_A |0\rangle_C} \right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \left[|0\rangle_A |1\rangle_C \right]$$

- $|\psi_+\rangle_{AC} - |\psi_-\rangle_{AC} = \frac{2}{\sqrt{2}} |1\rangle_A |0\rangle_C$

- $|\phi_+\rangle_{AC} - |\phi_-\rangle_{AC} = \frac{2}{\sqrt{2}} |1\rangle_A |1\rangle_C$

- $|\phi_+\rangle_{AC} + |\phi_-\rangle_{AC} = \frac{2}{\sqrt{2}} |0\rangle_A |0\rangle_C$

$$\Longrightarrow |\phi_+\rangle_{AB} \otimes |\Omega\rangle_C = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\alpha |0\rangle_B \left(|\phi_+\rangle_{AC} + |\phi_-\rangle_{AC} \right) \right)$$

$$+ \frac{\beta}{\sqrt{2}} |0\rangle_B \left(|\psi_+\rangle_{AC} + |\psi_-\rangle_{AC} \right) + \alpha |1\rangle_B \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\psi_+\rangle_{AC} - |\psi_-\rangle_{AC} \right)$$

$$+ \beta|1\rangle_B \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\phi_+\rangle_{AC} - |\phi_-\rangle_{AC}\right)$$

$$\boxed{|\phi_+\rangle_{AC} \otimes |\Omega\rangle_C = \left[|\phi_+\rangle_{AC}\left(\frac{\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B}{\sqrt{2}}\right) + |\phi_-\rangle_{AC}\left(\frac{\alpha|0\rangle_B - \beta|1\rangle_B}{\sqrt{2}}\right) + |\psi_+\rangle_{AC}\left(\frac{\alpha|1\rangle_B + \beta|0\rangle_B}{\sqrt{2}}\right) + |\psi_-\rangle_{AC}\left(\frac{\beta|0\rangle_B - \alpha|1\rangle_B}{\sqrt{2}}\right)\right]}$$

4b

Si Alice mide:	Bob tiene:
$\|\phi_+\rangle_{AC}$	$\frac{\alpha\|0\rangle_B + \beta\|1\rangle_B}{\sqrt{2}}$ Este es el mismo estado que tenía Alice inicialmente.
$\|\phi_-\rangle_{AC}$	$\frac{\alpha\|0\rangle_B - \beta\|1\rangle_B}{\sqrt{2}}$
$\|\psi_+\rangle_{AC}$	$\frac{\alpha\|1\rangle_B + \beta\|0\rangle_B}{\sqrt{2}}$
$\|\psi_-\rangle_{AC}$	$\frac{\beta\|0\rangle_B - \alpha\|1\rangle_B}{\sqrt{2}}$

9c i) $^{(1/2)}\hat{R}_u(\delta) = e^{-\frac{i}{\hbar}\delta \hat{S}\cdot \bar{u}}$

$= e^{-\frac{i}{\cancel{\hbar}}\delta \frac{\cancel{\hbar}}{2}\hat{\sigma}\cdot\bar{u}}$

$= 1 + \left(-\frac{i}{2}\hat{\sigma}\cdot\bar{u}\,\delta\right) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{i}{2}\hat{\sigma}\cdot\bar{u}\,\delta\right)^2 + \dots$

$+ \frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{2}\hat{\sigma}\cdot\bar{u}\,\delta\right)^n$

$= 1 + \left(-\frac{i}{2}\delta\right)(\hat{\sigma}\cdot\bar{u}) + \dots \quad \frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{2}\delta\right)^n(\hat{\sigma}\cdot\bar{u})^n$

$(\hat{\sigma}\cdot\bar{u})^n = ?$

$(\hat{\sigma}\cdot\bar{u})^2 = (\hat{\sigma}\cdot\bar{u})(\hat{\sigma}\cdot\bar{u})$

$= \bar{u}\cdot\bar{u} + i\,\hat{\sigma}\cdot\cancelto{0}{(\bar{u}\times\bar{u})}$

$= |\bar{u}|^2$

$= 1$ ya que $\bar{u}$ es unitario.

$\Rightarrow (\hat{\sigma}\cdot\bar{u})^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ (\hat{\sigma}\cdot\bar{u}) & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

$$\Rightarrow {}^{(1/2)}R_u(\gamma) = \mathbb{1} + \left(-\frac{i}{2}\gamma\right)(\hat{\sigma}\cdot\bar{u})$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(-\frac{i}{2}\gamma\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(-\frac{i}{2}\gamma\right)^3(\hat{\sigma}\cdot\bar{u}) +$$

$$= \mathbb{1} + \frac{1}{2!}(-1)\left(\frac{1}{2}\gamma\right)^2 + \frac{1}{4!}(+1)\left(\frac{1}{2}\gamma\right)^4 +$$

$$\left(-\frac{i}{2}\right)\gamma(\hat{\sigma}\cdot\bar{u}) + \frac{1}{3!}(+i)\left(\frac{\gamma}{2}\right)^3(\hat{\sigma}\cdot\bar{u}) + \frac{1}{5!}\left(-\frac{i}{2}\gamma\right)^5(\hat{\sigma}\cdot\bar{u}) +$$

Reconociendo las series de $\cos x$

$${}^{(1/2)}R_u(\gamma) = \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)\mathbb{1} +$$

$$(-i)\left[\left(\frac{\gamma}{2}\right) - \frac{1}{3!}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^5 - \frac{1}{7!}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^7 + \dots\right](\hat{\sigma}\cdot\bar{u})$$

$${}^{(1/2)}R_u(\gamma) = \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)\mathbb{1} - i\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)(\hat{\sigma}\cdot\bar{u})$$

$$= \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)\mathbb{1} - i\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\left[\hat{\sigma}_x u_x + \hat{\sigma}_y u_y + \hat{\sigma}_z u_z\right]$$

$$= \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)\mathbb{1} - i\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\left[\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}u_x + \begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix}u_y + \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}u_z\right]$$

$$^{(1/2)}R_u(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{bmatrix} - i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\begin{bmatrix} u_z & u_x - iu_y \\ u_x + iu_y & -u_z \end{bmatrix}$$

$$\boxed{^{(1/2)}R_u(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - iu_z\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) & \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)[-iu_x - u_y] \\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)[-iu_x + u_y] & \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + iu_z\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{bmatrix}}$$

C ii)

- Cuando Bob tiene $\frac{\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B}{\sqrt{2}}$ ya tiene $|\Omega\rangle$. Corresponde a aplicar una rotacion de $\alpha = 0$ alrededor de cualquier eje, es decir, la matriz identidad.

Para reconocer las otras rotaciones que debe realizar Bob

- rotacion al rededor eje x $u_x = 1$ $u_y = 0$ $u_z = 0$

$$^{(\frac{1}{2})}\hat{R}_x(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) & -i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ -i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) & \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix}$$

- $^{(1/2)}\hat{R}_y(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) & \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) \end{pmatrix}$

$u_x = u_z = 0$
$u_y = 1$

- $^{(1/2)}\hat{R}_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \end{pmatrix}$

$u_x = u_y = 0 \quad u_z = 1$

Por lo tanto:

$$\frac{\beta|0\rangle_B - \alpha|1\rangle_B}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B}{\sqrt{2}}$$

$$^{(1/2)}\hat{R}_u(\gamma)\begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{^{(1/2)}\hat{R}_y(\pi)}\begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$\boxed{\bullet}$

$$\frac{\alpha|0\rangle_B - \beta|1\rangle_B}{\sqrt{2}} \longrightarrow \frac{\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B}{\sqrt{2}}$$

$$^{(1/2)}\hat{R}_u(\chi)\begin{pmatrix}\alpha\\-\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}}_{-i\,^{(1/2)}\hat{R}_z(\pi)}\begin{pmatrix}\alpha\\-\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$$

Como la fase global no se detecta, Bob debe hacer $^{(1/2)}R_z(\chi=\pi)$.

$\boxed{\bullet}$ $$\frac{\beta|0\rangle_B + \alpha|1\rangle_B}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \frac{\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{pmatrix}0 & -i\\-i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta\\\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$$

$$-i\,^{(1/2)}\hat{R}_x(\chi=\pi)\begin{pmatrix}\beta\\\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$$

Como la fase global no se detecta, Bob debe hacer $^{(1/2)}\hat{R}_x(\chi=\pi)$.

Universidad de los Andes

Departamento de Física

Doctorado en Ciencias-Física
Examen de conocimientos
Mecánica Estadística

Semestre 2021-1
Duración: 3 horas

No se permite el uso de ningún documento, libro o apuntes.
En el apéndice hay algunas fórmulas que pueden ser útiles para el desarrollo de este examen.

I. Fluctuaciones de partículas (20 puntos)

Un gas de N partículas no interactuantes ocupan un volumen V. Considerar un subvolumen v del volumen total V, y n el numero de partículas en ese subvolumen. Cada partícula puede ocupar cualquier lugar del volumen V con igual probabilidad, entonces la probabilidad que una partícula esté en el subvolumen es v/V. ¿Cuál es la probabilidad que exactamente n partículas estén en el subvolumen v y las demás $N-n$ se encuentren por fuera del subvolumen? Calcular el numero promedio de partículas $\langle n\rangle$ en el subvolumen y sus fluctuaciones $\langle(\Delta n)^2\rangle$, en donde $\Delta n = n - \langle n\rangle$.

II. Oscilador armónico (20 puntos)

Calcular la función de partición microcanónica clásica (no cuántica) de un oscilador armónico unidimensional con hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \,. \tag{2.1}$$

III. Fermiones y bosones independientes (30 puntos)

Un sistema cuántico de una partícula con hamiltoniano h tiene tres estados posibles de energías $\epsilon_0 = 0$ (no degenerado: estado $|0\rangle$) y $\epsilon > 0$ (degenerado dos veces: estados $|1\rangle$ y $|2\rangle$). Se considera ahora un sistema de N partículas idénticas, indistinguibles, con hamiltoniano $H = \sum_{i=1}^{N} h_i$, en donde h_i es el hamiltoniano h pero que actua sólo sobre la partícula número i:

$$h_i = \underbrace{1\otimes 1\otimes\cdots\otimes 1}_{i-1 \text{ veces}} \otimes h\otimes 1\otimes\cdots\otimes 1\,. \tag{3.1}$$

El sistema está en equilibrio térmico con un termostato a la temperatura T. Se define $\beta = 1/(k_B T)$. Se denotará por n_i el numero de ocupación del estado $|i\rangle$.

III.1. Preliminares

1. Expresar el número total de partículas N y la energía total de una configuración del sistema E en función de los números de ocupación n_i.

2. Expresar formalmente la función de partición canónica $Z_c(N,T)$ como una suma sobre los valores posibles de los numeros de ocupación. Por el momento no será necesario calcularla explicitamente. ¿Cuáles son los valores posibles de los números de ocupación, según si las partículas son bosones o fermiones?

3. Responder a la misma pregunta anterior pero para la función de partición gran canónica $Z_g(z,T)$ en donde $z = e^{\beta\mu}$ con μ el potencial químico, resaltando las diferencias entre la función de partición canónica y la gran canónica.

III.2. Fermiones

Considerar en esta parte que las partículas son fermiones.

1. Calcular la función de partición canónica para $N = 1, 2, 3, \ldots$ partículas. ¿Qué pasa cuando $N > 3$?

III.3. Bosones

Considerar en esta parte que las partículas son bosones.

1. Calcular la función de partición gran canónica del sistema a temperatura T y potencial químico μ.

2. En el ensamble gran canónico, determinar el número de ocupación promedio del estado de energía ϵ_0 y de los estados de energía ϵ.

3. Se desea ahora determinar la función de partición canónica $Z_c(N,T)$ del sistema a partir de la función de partición gran canónica $Z_g(z,T)$ en donde $z = e^{\beta\mu}$. Mostrar que

$$Z_g(z,T) = \sum_{N=0}^{\infty} z^N Z_c(N,T) \tag{3.2}$$

   y deducir que

$$Z_c(N,T) = \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{Z_g(z,T)}{z^{N+1}} \tag{3.3}$$

   en donde $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$ es el residuo de la función f en z_0.

4. Sea $f(z) = Z_g(z,T)/z^{N+1}$. Identificar cuales son los polos de f en el plano complejo de la variable z e indicar el orden de cada polo.

5. Sin evaluar directamente cada residuo, mostrar que la suma de todos los residuos de f es cero.

6. Usando los resultados anteriores, determinar finalmente la función de partición canónica $Z_c(N,T)$.

IV. Marcha aleatoria con deriva (30 puntos)

Una partícula vive en una red unidimensional. A cada instante de tiempo tiene una tasa de transición α de saltar hacia el sitio vecino adelante (del sitio n al $n+1$) y una tasa de transición β de saltar hacia el sitio vecino atrás (del sitio n al $n-1$). Sea $P_n(t)$ la probabilidad que la partícula se encuentre en el sitio número $n \in \{-\infty, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, +\infty\}$ en el instante t.

1. Escribir la ecuación maestra para $P_n(t)$.
2. Se define la función generatriz $F(z,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_n(t) z^n$. ¿Cuánto vale $F(1,t)$?
3. Si en el instante $t=0$ la partícula está en $n=0$, ¿cuánto vale $F(z,0)$?
4. Demostrar que $F(z,t)$ satisface la ecuación
$$\frac{\partial F}{\partial t} = \left(\alpha z + \beta z^{-1} - \alpha - \beta\right) F \,. \tag{4.1}$$
5. Resolver esta ecuación y encontrar F.
6. Deducir $P_n(t)$.
7. Expresar la posición promedio $\langle n \rangle$ en términos de la función generatriz, y luego calcular $\langle n \rangle$ explícitamente. Interpretar el resultado.
8. Expresar $\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$ en términos de la función generatriz, y luego calcular $\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$ explícitamente. Interpretar el resultado.

Apéndice

- Integral gaussiana:
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \,.$$
- Función de partición microcanónica (clásica)
$$\begin{aligned} Z_c(N,V,E) &= \int_{E \le H(\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_N,\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N) \le E+\Delta E} \frac{\prod_{k=1}^{N} d\mathbf{p}_k d\mathbf{r}_k}{N! h^{3N}} \\ &= \text{Número de microestados con energía entre } E \text{ y } E+\Delta E. \end{aligned} \tag{4.2}$$
- Función de partición canónica (cuántica) $Z_c(N,T) = \sum_{\text{todos estados de } N \text{ particulas}} e^{-\beta E}$.
- Función de partición canónica (clásica)
$$Z_c(N,V,T) = \int e^{-\beta H(\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_N,\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N)} \frac{\prod_{k=1}^{N} d\mathbf{p}_k d\mathbf{r}_k}{N! h^{3N}} \,.$$
- Función de partición gran canónica (cuántica) $Z_g(z,T) = \sum_{\text{todos los estados}} e^{\beta(\mu N - E)}$ con $z = e^{\beta\mu}$.
- Función de partición gran canónica (clásica)
$$Z_g(\mu,V,T) = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta\mu N} \int e^{-\beta H(\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_N,\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N)} \frac{\prod_{k=1}^{N} d\mathbf{p}_k d\mathbf{r}_k}{N! h^{3N}} \,.$$

- Gran potencial Ω, presión p y número de partículas promedio $\langle N \rangle$ en gran canónico:

$$\Omega(\mu, V, T) = -k_B T \ln Z_g \,, \quad p = -\frac{\partial \Omega}{\partial V} \,, \quad \langle N \rangle = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \,.$$

- Funciones de variable compleja y residuos:
  - Definición de residuo: $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \dfrac{1}{2i\pi} \oint f(z)\, dz$ en donde la integral es sobre un circulo que rodea en el sentido positivo al polo z_0 (y únicamente a ese polo).
  - Si $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, entonces $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1}$.
  - Si z_0 es un polo de orden m de f entonces

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z) \right] \,.$$

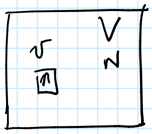
- Una serie de Taylor:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \text{para } |x| < 1.$$

- Una serie geométrica:

$$\sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x} \,.$$

- El área de una elipse de semiejes a y b es πab.



1 partícula tiene probabilidad $p=\frac{v}{V}$ de estar en v.

La probabilidad de tener exactamente n partículas en v y las demás por fuera es:

$$\frac{N!}{n!(N-n)!}\, p^n (1-p)^{N-n}$$

Usando $(p+q)^N = \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n}$ se obtiene:

$$p\frac{\partial}{\partial p}(p+q)^N = \sum_{n=0}^{N} n \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n}$$

$$p\frac{\partial}{\partial p}\left(p\frac{\partial}{\partial p}(p+q)^N\right) = \sum_{n=0}^{N} n^2 \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n}$$

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{N} p^n (1-p)^{N-n}\, n \frac{N!}{n!(N-n)!} = p\frac{\partial}{\partial p}(p+q)^N \Big|_{q=1-p} = pN(p+q)^{N-1}\Big|_{q=1-p}.$$

$$\boxed{\langle n \rangle = pN = \frac{v}{V}N}$$

$$\langle n^2 \rangle = p\frac{\partial}{\partial p}\left(p\frac{\partial}{\partial p}(p+q)^N\right)\Big|_{q=1-p} = p\frac{\partial}{\partial p}\left(pN(p+q)^{N-1}\right)\Big|_{q=1-p}$$

$$\langle n^2 \rangle = pN(p+q)^{N-1} + pN(N-1)(p+q)^{N-2}\Big|_{q=1-p}$$

$$\langle n^2 \rangle = pN + pN(N-1) = pN(1+N-1) = pN^2$$

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = pN^2 - (pN)^2 = p(1-p)N^2$$

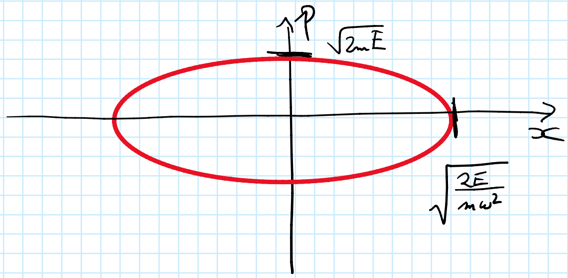
$$\boxed{\left\langle (\Delta n)^2 \right\rangle = \frac{v}{V}\left(1-\frac{v}{V}\right) N^2}$$

Examen conocimientos - oscilador armónico

A energía fija E se tiene que

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

Es la ecuación de una elipse en el espacio de fase



La función de partición microcanónica es el número de microestados con energía entre E y $E+\Delta E$:

$$Z_m = \frac{\partial \mathcal{N}(E)}{\partial E}\Delta E$$

En donde $\mathcal{N}(E)$ = numero de microestado con energía $< E$

$$\mathcal{N}(E) = \text{Area delimitada por la elipse} \times \frac{1}{h}$$

$$\mathcal{N}(E) = \frac{1}{h}\pi\sqrt{2mE}\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} = \frac{E}{\hbar\omega}$$

$$\boxed{Z_m = \frac{\Delta E}{\hbar\omega}}$$

Examen conocimientos - bosones y fermiones independientes

1. Preliminares

$\varepsilon_0 = 0 \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$

1) $N = \sum_{i=0}^{2} n_i = n_0 + n_1 + n_2$

$E = \sum_{i=0}^{2} \varepsilon_i n_i = 0 \times n_0 + \varepsilon(n_1 + n_2) = \varepsilon(n_1 + n_2)$

2) $$Z_c(N,T) = \sum_{\substack{n_0 \; n_1 \; n_2 \\ n_0+n_1+n_2=N}} \sum \sum e^{-\beta E} = \sum_{n_0} \sum_{n_1} \sum_{n_2} e^{-\beta\varepsilon(n_1+n_2)}$$

Para bosones las sumas van de 0 a ∞

Para fermiones las sumas van de 0 a 1

Los numeros de ocupación deben satisfacer $n_0 + n_1 + n_2 = N$

3) $$Z_g(z,T) = \sum_{n_0} \sum_{n_1} \sum_{n_2} e^{\beta\mu N} e^{-\beta E} = \sum_{n_0} \sum_{n_1} \sum_{n_2} e^{\beta\mu(n_0+n_1+n_2) - \beta\varepsilon(n_1+n_2)}$$

La suma de los números de ocupación ya no está restringida.

2. Fermiones

Si $N=1$ sólo uno de los n_i puede ser 1 y los demás son 0:

n_0	n_1	n_2	E
1	0	0	0
0	1	0	ε
0	0	1	ε

$$Z_c(1,T) = e^0 + e^{-\beta\varepsilon} + e^{-\beta\varepsilon}$$

$$\boxed{Z_c(1,T) = 2e^{-\beta\varepsilon} + 1}$$

Si $N=2$ los estados posibles y sus energías están dados por:

n_0	n_1	n_2	E
1	1	0	ε
1	0	1	ε
0	1	1	2ε

$$Z_c(2,T) = e^{-\beta\varepsilon} + e^{-\beta\varepsilon} + e^{-2\beta\varepsilon}$$

$$\boxed{Z_c(2,T) = 2e^{-\beta\varepsilon} + e^{-2\beta\varepsilon}}$$

Si $N=3$ el único estado posible es $n_0 = n_1 = n_2 = 1$ de energía : 2ε

$$\boxed{Z_c(3,T) = e^{-2\beta\varepsilon}}$$

Si $N>3$ no es posible ubicar las partículas por el principio de exclusión de Pauli

$$Z_c(N,T) = 0 \quad \text{si} \quad N>3.$$

3. Bosones

1) $$Z_g = \sum_{n_0=0}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} e^{\beta(\mu-\varepsilon_0)n_0}\, e^{\beta(\mu-\varepsilon_1)n_1}\, e^{\beta(\mu-\varepsilon_2)n_2}$$

$$Z_g = \prod_{i=0}^{2} \xi_i$$

con $$\xi_i = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\beta(\mu-\varepsilon_i)n} = \frac{1}{1-e^{\beta(\mu-\varepsilon_i)}}$$

$$\xi_0 = \frac{1}{1-e^{\beta\mu}}$$

$$\xi_1 = \xi_2 = \frac{1}{1-e^{\beta(\mu-\varepsilon)}}$$

$$Z_g = \xi_0\xi_1\xi_2 = \frac{1}{1-e^{\beta\mu}}\left(\frac{1}{1-e^{\beta(\mu-\varepsilon)}}\right)^2$$

$$\boxed{Z_g(z,T) = \frac{1}{1-z}\left(\frac{1}{1-ze^{-\beta\varepsilon}}\right)^2}$$

2) $$\langle n_i \rangle = z\frac{\partial}{\partial z}(\ln \xi_i) = -z\frac{\partial}{\partial z}\ln\left(1-ze^{-\beta\varepsilon_i}\right) = \frac{ze^{-\beta\varepsilon_i}}{1-ze^{-\beta\varepsilon_i}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \langle n_0 \rangle &= \frac{z}{1-z} \\ \langle n_1 \rangle = \langle n_2 \rangle &= \frac{ze^{-\beta\varepsilon}}{1-ze^{-\beta\varepsilon}} \end{aligned}}$$

3) Ordenando por número total de partículas se obtiene

$$Z_g(z,T) = \sum_{N=0}^{\infty} z^N Z_c(N,T)$$

El residuo $\underset{z=0}{\mathrm{Res}}\, Z_g(z,T)\, z^{-(N+1)}$ es el coeficiente de $\frac{1}{z}$ en la expansión de $z^{-(N+1)} Z_g(z,T)$ en serie de Laurent.

$$z^{-(N+1)} Z_g(z,T) = \sum_{M=0}^{\infty} z^{M-N-1} Z_c(M,T)$$

El término de z^{-1} corresponde a M tal que $M-N-1=-1$ es decir $M=N$.

El coeficiente es $Z_c(N,T)$

Queda comprobado que

$$\boxed{Z_c(N,T) = \underset{z=0}{\mathrm{Res}}\; z^{-(N+1)} Z_g(z,T)}$$

4) $$f(z) = z^{-(N+1)} Z_g(z,T) = \frac{1}{z^{N+1}} \frac{1}{1-z} \left(\frac{1}{1-ze^{-\beta\varepsilon}} \right)^2$$

$$f(z) = \frac{1}{z^{N+1}} \frac{-1}{z-1} \left(\frac{e^{\beta\varepsilon}}{z - e^{\beta\varepsilon}} \right)^2$$

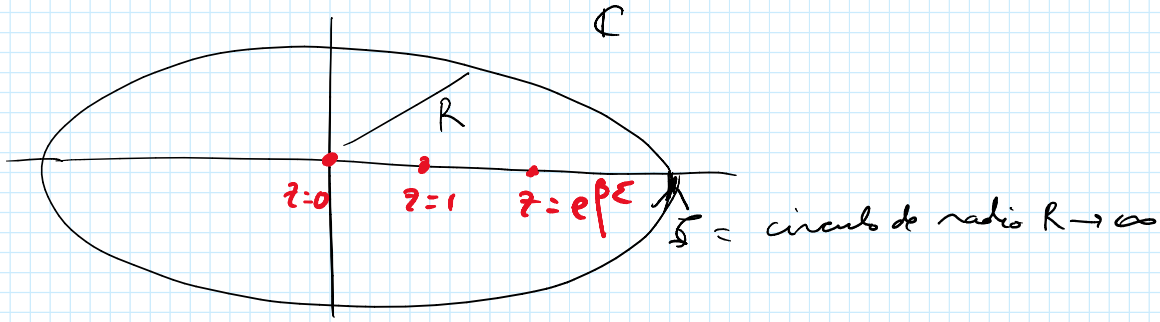
Por inspección se ve que f tiene:

1 polo de orden $N+1$ en $z = 0$

1 polo de orden 1 en $z = 1$

1 polo de orden 2 en $z = e^{\beta\varepsilon}$

5)



Sea la integral $I = \int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz$

Por teorema del residuo $I = 2i\pi \left(\operatorname{Res}_0 f + \operatorname{Res}_1 f + \operatorname{Res}_{e^{\beta\varepsilon}} f \right)$

$z = Re^{i\theta}$

$$I = \int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta})\, Re^{i\theta} d\theta$$

Si $R \to \infty$ $\left| f(Re^{i\theta}) \right| \sim \frac{1}{R^{N+1}} \frac{1}{R} \frac{1}{R^2} = \frac{1}{R^{N+3}}$

por lo tanto $I \to 0$ cuando $R \to \infty$.

La suma de los residuos es nula:

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{0} f + \operatorname*{Res}_{1} f + \operatorname*{Res}_{e^{\beta\varepsilon}} f = 0}$$

6) El residuo de f en $z=0$ es difícil de calcular por ser de orden $N+1$. Es más fácil calcular los residuos en 1 y $e^{\beta\mu}$

$$f(z) = \frac{1}{z^{N+1}} \times \frac{-1}{z-1} \times \left(\frac{e^{\beta\varepsilon}}{z-e^{\beta\varepsilon}}\right)^2$$

$$\operatorname*{Res}_{1} f(z) = \frac{-1}{1} \times \left(\frac{e^{\beta\varepsilon}}{1-e^{\beta\varepsilon}}\right)^2$$

$$\operatorname*{Res}_{e^{\beta\mu}} f(z) = \lim_{z\to e^{\beta\varepsilon}} \frac{d}{dz}\left((z-e^{\beta\varepsilon})^2 f(z)\right) = \lim_{z\to e^{\beta\varepsilon}} \frac{d}{dz} \frac{1}{z^{N+1}}\left(\frac{-1}{z-1}\right) e^{2\beta\varepsilon}$$

$$\operatorname*{Res}_{e^{\beta\mu}} f(z) = e^{2\beta\varepsilon} \lim_{z\to e^{\beta\varepsilon}} \left((N+1) z^{-N-2} \frac{1}{z-1} + z^{-N-1} \frac{1}{(z-1)^2}\right)$$

$$= e^{2\beta\varepsilon} \lim_{z\to e^{\beta\varepsilon}} \left(\frac{1}{z^{N+1}(z-1)} \left(\frac{N+1}{z} + \frac{1}{z-1}\right)\right)$$

$$= e^{2\beta\varepsilon} \lim_{z\to e^{\beta\varepsilon}} \frac{1}{z^{N+2}(z-1)^2} \left((N+1)(z-1) + z\right)$$

$$= e^{2\beta\varepsilon} \lim_{z\to e^{\beta\varepsilon}} \frac{(N+2)z - (N+1)}{z^{N+2}(z-1)^2}$$

$$\operatorname*{Res}_{e^{\beta\mu}} f = \frac{(N+2)e^{\beta\varepsilon} - (N+1)}{e^{N\beta\varepsilon}\left(e^{\beta\varepsilon}-1\right)^2}$$

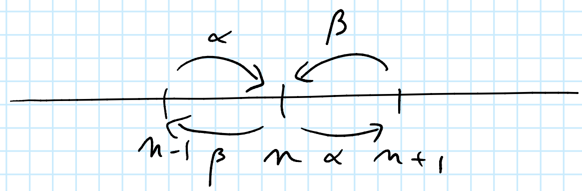
Finalmente $\quad Z_c(N,T) = \operatorname{Res}_{0} f = -\operatorname{Res}_{1} f - \operatorname{Res}_{e^{\beta\varepsilon}} f$

$$Z_c = \frac{e^{2\beta\varepsilon}}{\left(1-e^{\beta\varepsilon}\right)^2} - \frac{(N+2)\,e^{\beta\varepsilon} - (N+1)}{e^{N\beta\varepsilon}\left(1-e^{\beta\varepsilon}\right)^2}$$

$$\boxed{Z_c(N,T) = \frac{1}{\left(1-e^{\beta\varepsilon}\right)^2}\left(e^{2\beta\varepsilon} - (N+2)\,e^{\beta\varepsilon(1-N)} + (N+1)\,e^{-\beta\varepsilon N}\right)}$$

Examen conocimientos - marcha aleatoria con deriva

1) $$\frac{dP_n}{dt} = -\alpha P_n - \beta P_n + \alpha P_{n-1} + \beta P_{n+1}$$



$$\boxed{\frac{dP_n}{dt} = \alpha P_{n-1} + \beta P_{n+1} - (\alpha+\beta) P_n}$$

2) $$F(z,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_n(t)\, z^n$$

$$F(1,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_n(t) = 1$$ por normalización

3) $$P_n(0) = \delta_{n,0}$$

$$F(z,0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{n,0}\, z^n = 1$$

4) $$\frac{\partial F(z,t)}{\partial t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial P_n(t)}{\partial t} z^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\alpha P_{n-1}(t)\, z^n + \beta P_{n+1}(t)\, z^n - (\alpha+\beta) P_n(t)\, z^n\right)$$

$$= \alpha z\, F(z,t) + \beta \frac{1}{z} F(z,t) - (\alpha+\beta) F(z,t)$$

$$\boxed{\frac{\partial F(z,t)}{\partial t} = \left(\alpha z + \beta \frac{1}{z} - (\alpha+\beta)\right) F(z,t)}$$

5) $(\alpha z + \beta \frac{1}{z} - (\alpha+\beta))t$

5) $$F(z,t) = e^{\left(\alpha z + \beta \frac{1}{z} - (\alpha+\beta)\right)t} \, F(z,0) \qquad y \quad F(z,0) = 1$$

$$\boxed{F(z,t) = \exp\left[\left(\alpha z + \frac{\beta}{z} - (\alpha+\beta)\right)t\right]}$$

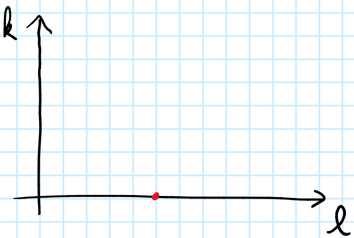
6) $$F(z,t) = e^{-(\alpha+\beta)t} \, e^{\alpha z t} \, e^{\beta z^{-1} t}$$

$$= e^{-(\alpha+\beta)t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\alpha z t)^k \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} (\beta t)^\ell z^{-\ell}$$

$$F(z,t) = e^{-(\alpha+\beta)t} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{\ell!} \alpha^k \beta^\ell t^{k+\ell} z^{k-\ell}$$

Sea: $n = k - \ell$

$k = n + \ell$



$0 \leq k = n + \ell$

$-n \leq \ell$, pero además $\ell \geq 0$

$\ell \geq \max(-n, 0)$

$$F(z,t) = e^{-(\alpha+\beta)t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{\ell=\max(-n,0)}^{\infty} \frac{1}{(n+\ell)!} \frac{1}{\ell!} \alpha^{n+\ell} \beta^{\ell} t^{n+2\ell} \right) z^n$$

Comparando con

$$F(z,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_n(t) \, z^n \qquad \text{se obtiene}$$

$$P_n(t) = e^{-(\alpha+\beta)t} \sum_{\ell=\max(-n,0)}^{\infty} \frac{\alpha^{n+\ell} \beta^{\ell}}{(n+\ell)! \, \ell!} t^{n+2\ell}$$

7) $$\langle n \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \, P_n(t) = \frac{\partial}{\partial z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_n(t) z^n \Big|_{z=1} = \frac{\partial F(z,t)}{\partial z} \Big|_{z=1}$$

$$\frac{\partial F(z,t)}{\partial z} = \left(\alpha - \frac{\beta}{z^2}\right) t \, e^{\left(\alpha z + \frac{\beta}{z} - (\alpha+\beta)\right)t}$$

$$\frac{\partial F(z,t)}{\partial z} = \left(\alpha - \frac{\beta}{z^2}\right)t \, e^{\left(\alpha z + \frac{\beta}{z} - (\alpha+\beta)\right)t}$$

$$\boxed{\langle n \rangle = (\alpha - \beta)t}$$

8) $$\frac{\partial}{\partial z}\left(z \frac{\partial}{\partial z} F(z,t)\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n P_n(t) z^n\right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 P_n(t) z^{n-1}$$

Entonces

$$\langle n^2 \rangle = \frac{\partial}{\partial z}\left(z \frac{\partial}{\partial z} F(z,t)\right)\Big|_{z=1}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(z \frac{\partial F}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\alpha z - \frac{\beta}{z}\right)t \, e^{\left(\alpha z + \beta/z - (\alpha+\beta)\right)t}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(z \frac{\partial F}{\partial z}\right) = \left(\left(\alpha + \frac{\beta}{z^2}\right)t + \left(\alpha z - \frac{\beta}{z}\right)\left(\alpha - \frac{\beta}{z^2}\right)t^2\right) e^{\left(\alpha z + \frac{\beta}{z} - (\alpha+\beta)\right)t}$$

$$\langle n^2 \rangle = (\alpha+\beta)t + \underbrace{(\alpha-\beta)^2 t^2}_{\langle n \rangle^2}$$

$$\boxed{\langle (\Delta n)^2 \rangle = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = (\alpha+\beta)\, t}$$

9) $$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = \beta \rho(x+a,t) + \alpha \rho(x-a,t) - (\alpha+\beta)\rho(x,t)$$

Usando: $$\rho(x+a,t) = \rho(x,t) + a\frac{\partial}{\partial x}\rho(x,t) + \frac{a^2}{2}\frac{\partial \rho}{\partial x}(x,t) + O(a^2)$$

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = a(\alpha-\beta)\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2}a^2(\alpha+\beta)\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} + O(a^2)$$

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = -a(\alpha-\beta)\frac{\partial \rho}{\partial x}(x,t) + \frac{1}{2}a^2(\alpha+\beta)\frac{\partial^2 \rho(x,t)}{\partial x^2} + O(a^2)$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + v\frac{\partial \rho}{\partial x}(x,t) - D\frac{\partial^2 \rho(x,t)}{\partial x^2} = 0}$$

Con $\boxed{v = a(\alpha-\beta)}$

$\boxed{D = \frac{1}{2}a^2(\alpha+\beta)}$

10)

$$\boxed{\langle x\rangle = \langle n a\rangle = (\alpha-\beta)a t = v t}$$

$\boxed{v = \text{velocidad de deriva}}$

$$\boxed{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = \langle(\Delta x)^2\rangle = a^2\langle(\Delta n)^2\rangle = a^2(\alpha+\beta)t = 2Dt}$$

$\boxed{D = \text{coeficiente de difusión}}$