

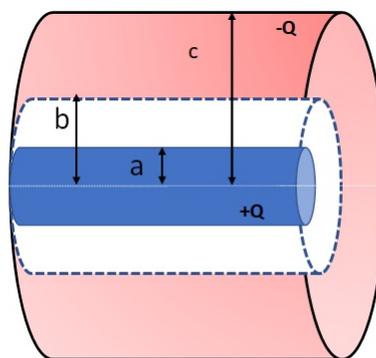
Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2020 - II
Electromagnetismo

No se permite el uso de ningún documento, libro o apuntes, ni el uso de ningún dispositivo electrónico tales como celulares, reproductores de música, computadores, tabletas, etc.

Duración total del examen : 3 horas

PROBLEMA 1 (20 puntos): Condensador cilíndrico Considere un condensador cilíndrico formado por un alambre de cobre de radio a y carga $+Q$ y rodeado por un cascarón cilíndrico concéntrico de radio c y carga $-Q$. El espacio entre ellos está parcialmente lleno de un dieléctrico lineal con constante ϵ_r desde un radio b (con $a < b < c$) y hasta un radio c . Encuentre:

- (a) (4 puntos) Los campos \vec{E} y \vec{D} para todo r .
- (b) (6 puntos) La polarización \vec{P} y las cargas de ligadura debido a la polarización en el dieléctrico σ_b y ρ_b .
- (c) (6 puntos) La capacitancia por unidad de longitud del cilindro.
- (d) (4 puntos) El trabajo por unidad de longitud necesario para ensamblar el sistema.



SOLUCIÓN:

(a) Comencemos calculando el campo \vec{D} para todo r :

Para $r < a$ tenemos conductor y las cargas libres encerradas son 0, por tanto $\vec{D} = 0$. Para $a < r < c$ la carga encerrada es $+Q$ y por tanto:

$$D2\pi rl = Q \rightarrow D = \frac{Q}{2\pi rl}$$

para $r > c$ las cargas libres encerradas son 0, por tanto $\vec{D} = 0$.

$$\vec{D} = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{Q}{2\pi rl} \hat{r} & a < r < c \\ 0 & r > c \end{cases}$$

Para el campo eléctrico tenemos:

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{Q}{2\epsilon_0\pi rl} \hat{r} & a < r < b \\ \frac{Q}{2\epsilon_0\epsilon_r\pi rl} \hat{r} & b < r < c \\ 0 & r > c \end{cases}$$

(b) Hay polarización en los puntos donde está el dieléctrico ($b < r < c$):

$$\vec{P} = \epsilon_0\chi_e\vec{E} = \chi_e\frac{Q}{2\epsilon_r\pi rl} \hat{r}$$

Las densidades de carga superficiales debido a la polarización del material se pueden encontrar como:

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n} = \begin{cases} \vec{P} \cdot \hat{n}|_{r=b} = -\chi_e\frac{Q}{2\epsilon_r\pi bl} & r = b \\ \vec{P} \cdot \hat{n}|_{r=c} = \chi_e\frac{Q}{2\epsilon_r\pi cl} & r = c \end{cases}$$

Para las densidades volumétricas de cargas ligadas tenemos:

$$\rho_b = \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rP_r) = 0$$

(c) Para encontrar la capacitancia por unidad de longitud es necesario calcular la diferencia de potencial entre el conductor con la carga $+Q$ y el conductor con carga $-Q$:

$$V_{+Q} - V_{-Q} = V(a) - V(c) = - \int_c^a \vec{E} \cdot \vec{dr} = \int_a^c \vec{E} \cdot \vec{dr} = \int_a^b \frac{Q}{2\epsilon_0\pi rl} \hat{r} \cdot \vec{dr} + \int_b^c \frac{Q}{2\epsilon_0\epsilon_r\pi rl} \hat{r} \cdot \vec{dr}$$

$$V = V(a) - V(c) = \frac{Q}{2\pi l} \left(\frac{1}{\epsilon_0} \ln \left(\frac{b}{a} \right) + \frac{1}{\epsilon} \ln \left(\frac{c}{b} \right) \right)$$

Teniendo en cuenta que $Q = CV$, podemos concluir que:

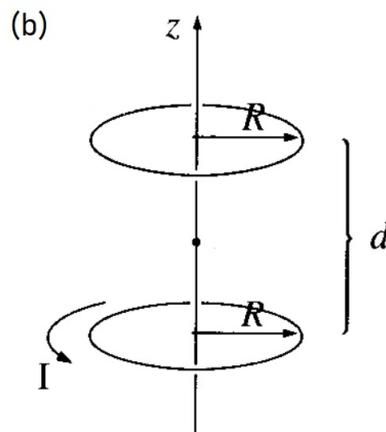
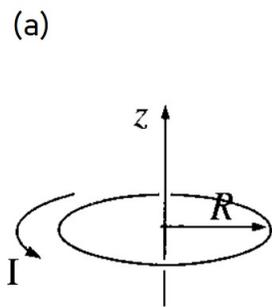
$$C = \frac{2\pi l}{\left(\frac{1}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{\epsilon} \ln\left(\frac{c}{b}\right)\right)}$$

(d) El trabajo necesario para formar la configuración es igual a la energía almacenada en el condensador:

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{4\pi l} \left(\frac{1}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{\epsilon} \ln\left(\frac{c}{b}\right)\right)$$

PROBLEMA 2 (20 puntos): Bobinas de Helmholtz Suponga una espira circular de radio R por la cual circula una corriente I como se muestra en la figura (a).

- (a) (5 puntos) Calcule el campo magnético en un punto z sobre el eje de la espira.
- (b) (1 punto) Suponga que usted requiere un campo magnético uniforme, diferente de 0, en dirección z , para esto usa una segunda espira de corriente con las mismas dimensiones geométricas como se ve en la figura (b). Indique la dirección de la corriente en esta espira para obtener un campo homogéneo en medio de las dos espiras.
- (c) (5 puntos) Si las dos espiras están separadas a una distancia d , cual es la magnitud y dirección del campo magnético en un punto sobre el eje z .
- (d) (7 puntos) Expanda la expresión del campo magnético obtenido en una serie de Taylor alrededor de $z = 0$. Usando los primero tres términos de la expansión, encuentre la relación entre d y R tal que el campo sea constante entre las dos espiras.
- (e) (2 puntos) ¿Cuál es el valor del campo magnético en un punto sobre el eje z para este caso?



SOLUCIÓN: (a) Para encontrar el campo magnético en un punto sobre el eje z usamos la Ley de Biot-Savart en donde $\vec{dl} = R d\theta \hat{i}$, $\vec{z} = \vec{r} - \vec{r}' = z\hat{k} - R\hat{r}$ y con $\hat{z} = \frac{z\hat{k} - R\hat{r}}{(z^2 + R^2)^{1/2}}$ podemos escribir:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\vec{dl} \times \hat{z}}{z^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R d\theta}{(z^2 + R^2)^{3/2}} (z\hat{r} + R\hat{k})$$

teniendo en cuenta que $\hat{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}$, y $\int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta = 0$, $\int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta = 0$, entonces solo queda la componente en la dirección \hat{k} :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R d\theta}{(z^2 + R^2)^{3/2}} (R\hat{k}) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{k}$$

(b) Para que exista un campo homogéneo diferente de 0, la corriente en las dos espiras debe ir en la misma dirección. (c) Suponiendo que la espira 1 está en una posición $-d/2\hat{k}$ y la espira 2 está en la posición $+d/2\hat{k}$, podemos escribir el campo magnético producidos por las dos espiras en un punto sobre el eje z están dados por:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I R^2}{2((z + d/2)^2 + R^2)^{3/2}} \hat{k}$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I R^2}{2((z - d/2)^2 + R^2)^{3/2}} \hat{k}$$

Usando el principio de superposición tenemos:

$$\vec{B}_{total} = \frac{\mu_0 I R^2}{2} \left[\frac{1}{((z - d/2)^2 + R^2)^{3/2}} + \frac{1}{((z + d/2)^2 + R^2)^{3/2}} \right] \hat{k}$$

(c) Haciendo la expansión en series de Taylor y tomando los primeros 3 términos de la expansión tenemos:

$$B(z) = B(z=0) + \left. \frac{\partial B}{\partial z} \right|_{z=0} \frac{z}{1!} + \left. \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} \right|_{z=0} \frac{z^2}{2!} + \dots$$

Veamos cada uno de los términos:

$$B(z=0) = \frac{\mu_0 I R^2}{2} \left[\frac{1}{((d/2)^2 + R^2)^{3/2}} + \frac{1}{((d/2)^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I R^2}{((d/2)^2 + R^2)^{3/2}} \hat{k} \right]$$

$$\frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\mu_0 I R^2}{2} \left(-\frac{3}{2} \right) \left(\frac{2(z + d/2)}{((z + d/2)^2 + R^2)^{5/2}} + \frac{2(d/2 - z)(-1)}{((d/2 - z)^2 + R^2)^{5/2}} \right) \hat{k}$$

$$\left. \frac{\partial B}{\partial z} \right|_{z=0} = 0$$

$$\left. \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} \right|_{z=0} = -\frac{3\mu_0 I R^2}{((d/2)^2 + R^2)^{5/2}} \left(1 - \frac{5d^2/4}{((d/2)^2 + R^2)} \right) = -\frac{3\mu_0 I R^2}{((d/2)^2 + R^2)^{7/2}} (R^2 - d^2)$$

Reemplazando en la serie de Taylor tenemos:

$$B(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{((d/2)^2 + R^2)^{3/2}} - \frac{3\mu_0 I R^2}{((d/2)^2 + R^2)^{7/2}} (R^2 - d^2) \frac{z^2}{2!} + \dots$$

Si queremos un campo magnético constante entre las dos espiras, el campo no debe depender de z y por tanto, $R = d$. (d) En este caso, el campo magnético es:

$$B(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{((d/2)^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{8\mu_0 I}{5R\sqrt{5}}$$

PROBLEMA 3 (30 puntos) Ondas electromagnéticas en un conductor

- (a) (8 puntos) Suponga que la solución para las ecuaciones de Maxwell en el vacío son ondas planas, monocromáticas de frecuencia ω , que se propagan en la dirección z tal que

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 \exp i(kz - \omega t)$$

$$\vec{B}(z, t) = \vec{B}_0 \exp i(kz - \omega t).$$

Encuentre la dirección y amplitud de \vec{E}_0 y \vec{B}_0 tal que se satisfacen las ecuaciones de Maxwell. Haga un dibujo en donde indique claramente la dirección de \vec{E}_0 , \vec{B}_0 y \vec{k} .

- (b) (6 puntos) Explique el comportamiento de la onda electromagnética en el medio conductor. Para esto, suponga que la onda plana incide normal a la superficie del conductor. Si el conductor es un medio lineal con permitividad eléctrica ϵ , permeabilidad magnética μ y conductividad eléctrica σ , podemos escribir las ecuaciones de Maxwell dentro del material como:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu\sigma \vec{E} \end{aligned}$$

- (c) (6 puntos) Suponga que el vector de onda dentro del conductor puede escribirse como $k + i\kappa$, en donde:

$$k = \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} + 1 \right]^{1/2}, \quad \kappa = \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} - 1 \right]^{1/2}$$

Escriba la ecuación para el campo eléctrico y el campo magnético dentro del conductor. ¿Cómo cambian las amplitudes de los campos?

- (d) (5 puntos) Encuentre la distancia de penetración a la cuál la amplitud de la onda se ha reducido en un 99%. Suponga un conductor tal que la conductividad $\sigma \ll \omega\epsilon$.
- (e) (5 puntos) Suponga ahora que tiene un buen conductor ($\sigma \gg \omega\epsilon$). Haga las aproximaciones necesarias para demostrar que la longitud de profundidad es $\lambda/2\pi$, en donde λ es la longitud de onda que se propaga en el conductor.

Clave $\sqrt{1 + \alpha} \approx 1 + \frac{1}{2}\alpha$, para $\alpha \ll 1$

SOLUCIÓN:

a) Suponemos que la solución a la ecuación de onda son ondas planas de la forma:

$$\begin{aligned}\vec{E}(z, t) &= \vec{E}_0 \exp i(kz - \omega t) \\ \vec{B}(z, t) &= \vec{B}_0 \exp i(kz - \omega t).\end{aligned}$$

Estas son ondas transversales que se propagan en la dirección z por tanto $E_{0z} = 0, B_{0z} = 0$. Supongamos entonces que $\vec{E}_0 = E_{0x}\hat{i} + E_{0y}\hat{j}$ y $\vec{B}_0 = B_{0x}\hat{i} + B_{0y}\hat{j}$ y que se satisfacen las ecuaciones de Maxwell tal que $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ tenemos:

$$-iE_{0y}\hat{i} + ikE_{0x}\hat{j} = i\omega B_{0x}\hat{i} + i\omega B_{0y}\hat{j}$$

Igualando las componentes en x y las componentes en y tenemos:

$$-kE_{0y} = \omega B_{0x}, \quad kE_{0x} = \omega B_{0y}$$

y por tanto:

$$B_{0x} = -\frac{k}{\omega}E_{0y} = -\frac{1}{c}E_{0y}, \quad B_{0y} = \frac{k}{\omega}E_{0x} = \frac{1}{c}E_{0x},$$

Con esto podemos concluir que el campo eléctrico y el campo magnético son ortogonales entre sí y ortogonales al vector de onda \vec{k} . En general, $\vec{B}_0 = \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E}_0 = \frac{1}{c}\hat{k} \times \vec{E}_0$.

b) Veamos la ecuación de onda que se satisface en los conductores, para eso:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

A partir de identidades vectoriales tenemos:

$$\nabla^2 = \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t}$$

la cuál corresponde a una ecuación de onda amortiguada. Se espera que en el medio conductor la amplitud de la onda disminuya.

c) Si el vector de onda puede escribirse en forma compleja $\tilde{k} = k + i\kappa$, la onda electromagnética es entonces

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 \exp i((k + i\kappa)z) \exp(-i\omega t) = \vec{E}_0 \exp(-\kappa z) \exp i(kz - \omega t)$$

Para el campo magnético tenemos:

$$\vec{B}_0 = \frac{\tilde{k}}{\omega} \times \vec{E}_0 = \frac{\tilde{k}}{\omega} \times \vec{E}_0 \exp(-\kappa z) \exp i(kz - \omega t)$$

Todo número complejo se puede escribir como $\tilde{k} = k + i\kappa = K \exp(i\phi)$ con $K = \sqrt{k^2 + \kappa^2}$, y por tanto,

$$B_0 = \frac{KE_0}{\omega} \exp(i\phi) \exp(-\kappa z) \exp i(kz - \omega t)$$

y por tanto la amplitud de la componente magnética de la onda decrece exponencialmente y esta retrasada por una fase ϕ con respecto a la componente del campo eléctrico.

d) La distancia de penetración de la onda se define como $d = 1/\kappa$. Para esta distancia la amplitud de la onda se ha reducido a $E_0/e = 0.368E_0$. Si queremos que la amplitud de la onda se reduzca en un 99%, se deben recorrer 5 veces la distancia de penetración (5d). Para buenos conductores podemos hacer la aproximación $\alpha = (\frac{\sigma}{\epsilon\omega})^2$ y por tanto $\sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \frac{1}{2}\alpha$. Usando esta aproximación podemos escribir la profundidad de penetración como:

$$d = \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\omega\sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} [\sqrt{1+\alpha} - 1]^{1/2}} = \frac{1}{\omega\sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}}} \frac{1}{\sqrt{\alpha/2}} = \frac{2}{\omega\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{1}{\frac{\sigma}{\epsilon\omega}} = \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$$

e) Si tenemos un buen conductor tenemos que $\sigma \gg \omega\epsilon$ y por tanto:

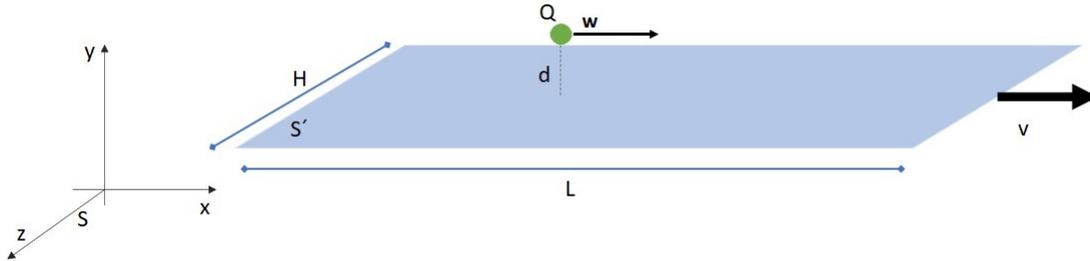
$$\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} \pm 1 \right]^{1/2} \approx \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)$$

y por tanto:

$$\kappa = k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

PROBLEMA 4 (30 puntos): Considere un plano conductor que se mueve con una velocidad $\vec{v} = v_0 \hat{i}$ con respecto a un sistema de referencia S como se muestra en la figura. En este sistema de referencia, el conductor tiene una distribución superficial de carga σ . Una partícula con carga Q que se mueve con una velocidad $\vec{w} = 2v_0 \hat{i}$ con respecto a S , paralela al plano a una distancia $d \ll L, H$.

- (a) (20 puntos) Encuentre los campos eléctricos y magnéticos que produce el plano cargado en el sistema de referencia S , en el sistema de referencia propio del plano de carga S' , y en el sistema de referencia propio de la carga Q , S'' .
- (b) (10 puntos) Encuentre la fuerza que siente la carga Q en cada uno de los sistemas de referencia.



SOLUCIÓN:

Para calcular la forma como se transforman los campos comenzamos en el sistema propio del plano, S' . En este sistema la densidad de carga es σ_0 (densidad de carga propia del plano). En S' tenemos únicamente el campo eléctrico debido a la densidad de carga:

$$E'_x = E'_z = 0, \quad E'_y = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \hat{j}$$

Como no hay corrientes eléctricas no existen los campos magnéticos:

$$B'_x = B'_y = B'_z = 0$$

Con respecto a S' , el sistema S se mueve con velocidad $-v$ sobre el eje x . Entonces, para calcular los campos eléctricos y magnéticos en S , transformamos los campos de S' usando las leyes de transformación:

$$E_x = 0, E_z = 0, \quad E_y = \gamma(v)E'_y = \gamma(v)\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}$$

$$B_x = B_y = 0, \quad B_z = \gamma(v)\frac{v}{c^2}\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}$$

Supongamos el sistema de referencia S'' que se mueve con una velocidad $+w\hat{i}$ con respecto al sistema de referencia S . En este sistema de referencia la carga Q se encuentra en reposo. Podemos transformar los campos calculados en S usando las reglas de transformación.

$$E''_x = E''_z = 0, \quad E''_y = \gamma w \left(\gamma(v)\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} - w\gamma(v)\frac{v}{c^2}\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \right) = \gamma(w)\gamma(v)\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{vw}{c^2} \right)$$

$$B''_x = B''_y = 0, \quad B''_z = \gamma(w) \left(\gamma(v)\frac{v}{c^2}\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} - \gamma(v)\frac{w}{c^2}\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \right) = \gamma(w)\gamma(v)\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left(\frac{v}{c^2} - \frac{w}{c^2} \right)$$

b) Para encontrar la fuerza que siente la carga Q en cada sistema de referencia usamos la fuerza de Lorentz $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{w} \times \vec{B})$.

En el sistema de referencia propio del plano, S' , el campo magnético es 0 y por tanto:

$$F' = q(\vec{E}' + \vec{v}' \times \vec{B}') = \frac{q\sigma_0}{2\epsilon_0} \hat{j}$$

En el sistema de referencia S , la carga q se mueve con velocidad \vec{w} y por tanto la fuerza que siente es:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{w} \times \vec{B}) = q\gamma(v) \left(\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \hat{j} + w\hat{i} \times \frac{v}{c^2} \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \hat{z} \right) = q\gamma(v)\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{vw}{c^2} \right) \hat{j}$$

En el sistema de referencia propio de la partícula cargada, S'' , la velocidad de la partícula es 0 y por tanto la fuerza es:

$$F'' = q\vec{E}'' = q\gamma(v)\gamma(w)\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{vw}{c^2} \right) \hat{j}$$

Fórmulas generales

Expansión de una función en series de Taylor:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 +$$

Tensor de transformación de Lorentz

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tensor de campo electromagnético

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}$$

Transformación de campos eléctricos y magnéticos.

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & E'_y &= \gamma(E_y - vB_z), & E'_z &= \gamma(E_z + vB_y) \\ B'_x &= B_x, & B'_y &= \gamma(B_y + \frac{v}{c^2}E_z), & B'_z &= \gamma(B_z - \frac{v}{c^2}E_y) \end{aligned}$$

Adición de velocidades:

$$u'_{\pm} = \frac{u \mp v_x}{1 \mp uv_x/c^2}$$

$$\gamma(u'_{\pm}) = \gamma(u)\gamma(v)(1 \mp \frac{uv}{c^2})$$

Identidades vectoriales

$$\begin{aligned} \nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) &= \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} \\ \vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) &= (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \\ \vec{A} \times \vec{B} \times \vec{C} &= \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \end{aligned}$$

Derivadas vectoriales en coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} \nabla t &= \frac{\partial t}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial t}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial t}{\partial z} \hat{k} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \vec{\nabla} \times \vec{v} &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \hat{k} \end{aligned}$$

Derivadas vectoriales en coordenadas esféricas:

$$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial t}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{r} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r v_\phi) \right] \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi}$$

Derivadas vectoriales en coordenadas cilíndricas:

$$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial s} \hat{s} + \frac{1}{s} \frac{\partial t}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial t}{\partial z} \hat{k}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s v_s) + \frac{1}{s} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \left[\frac{1}{s} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right] \hat{s} + \left[\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s} \right] \hat{\phi} + \frac{1}{s} \left[\frac{\partial}{\partial s} (s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial \phi} \right] \hat{k}$$

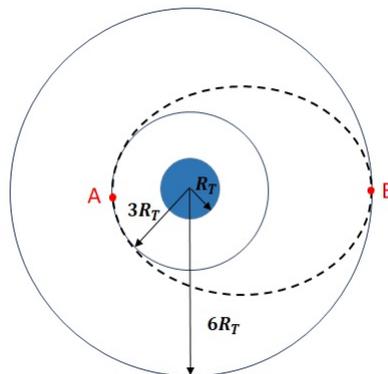
Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2020 - II
Mecánica Analítica

No se permite el uso de ningún documento, libro o apuntes, ni el uso de ningún dispositivo electrónico tales como celulares, reproductores de música, PDA, computadores, tabletas, etc.

Duración total del examen : 3 horas

PROBLEMA 1: TRANSFERENCIA ORBITAL DE HOHMANN.

Un satélite espacial se encuentra orbitando alrededor de la tierra en una órbita circular de tres veces el radio terrestre ($3R_T$). Se desea transferir el satélite a una órbita circular más lejana, de radio $6R_T$. Una forma eficiente, dado el mínimo consumo de energía, para hacer la transferencia orbital es usar una órbita semi-elíptica (conocida como la órbita de transferencia de Hohmann), como indica la figura.



- A) (4 puntos) Determine la velocidad que tiene el satélite en la órbita circular de radio $3R_T$ y la velocidad en la órbita circular de radio $6R_T$.
- B) (8 puntos) Considere ahora que el satélite se mueve en la órbita elíptica indicada en la figura. Use leyes de conservación para hallar las velocidades del satélite en los puntos A y B de la órbita elíptica.

- C) (4 puntos) Determine los cambios de velocidad que el satélite requiere para hacer la transferencia de órbitas en los puntos A y B indicados en la figura.
- D) (4 puntos) Determine el mínimo gasto de energía para hacer la transferencia del satélite desde la órbita circular de radio $3R_T$ a la órbita circular de radio $6R_T$.

SOLUCIÓN

A) Usamos la segunda ley de Newton para la órbita circular de radio $3R_T$:

$$\frac{GM_S M_T}{(3R_T)^2} = \frac{M_S v_1^2}{3R_T} \quad (1)$$

Donde M_S es la masa del satélite y M_T la masa de la tierra. Despejando:

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_T}{3R_T}} \quad (2)$$

La velocidad para la órbita con radio $6R_T$ es:

$$v_2 = \sqrt{\frac{GM_T}{6R_T}} \quad (3)$$

B) Dado que la fuerza gravitacional es central, entonces hay conservación de momento angular:

$$M_S v_A (3R_T) = M_S v_B (6R_T) \implies v_A = 2v_B \quad (4)$$

También hay conservación de energía mecánica:

$$-\frac{GM_T M_S}{3R_T} + \frac{1}{2} M_S v_A^2 = -\frac{GM_T M_S}{6R_T} + \frac{1}{2} M_S v_B^2 \quad (5)$$

Simplificando:

$$v_A^2 - v_B^2 = \frac{GM_T}{3R_T} \quad (6)$$

Reemplazando la ecuación 5 en la ecuación 6:

$$v_B = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}} \quad ; \quad v_A = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}} \quad (7)$$

C) En el punto A se requiere transferir de la órbita circular a la semi-elíptica, en este caso el satélite debe aumentar la velocidad en la siguiente cantidad:

$$\Delta v_A = v_A - v_1 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}} - \sqrt{\frac{GM_T}{3R_T}} = \sqrt{\frac{GM_T}{3R_T}} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \right) \quad (8)$$

En el punto B se requiere transferir de la órbita semi-elíptica a la órbita circular, por lo que se requiere que su cambio de velocidad sea:

$$\Delta v_B = v_2 - v_B = \sqrt{\frac{GM_T}{6R_T}} - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{GM_T}{6R_T}} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \quad (9)$$

D) El mínimo gasto de energía para hacer la transferencia de órbita debe ser la diferencia de energía en la órbita circular final y de la órbita circular inicial:

$$\Delta E = -\frac{GM_T M_S}{6R_T} + \frac{1}{2}M_S v_2^2 - \left(-\frac{GM_T M_S}{3R_T} + \frac{1}{2}M_S v_1^2 \right) \quad (10)$$

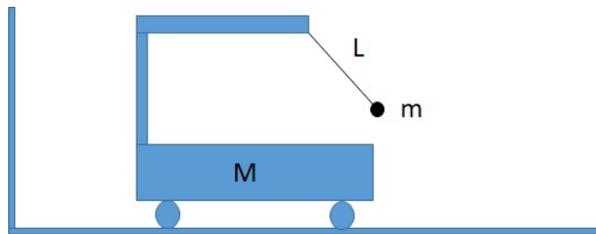
Simplificando:

$$\Delta E = \frac{GM_T M_S}{6R_T} + \frac{1}{2}M_S (v_2^2 - v_1^2) = \frac{GM_T M_S}{6R_T} + \frac{1}{2}M_S \left(\frac{GM_T}{6R_T} - \frac{GM_T}{3R_T} \right) = \frac{GM_T M_S}{12R_T} \quad (11)$$

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2020 - II
Mecánica Analítica

PROBLEMA 2: PÉNDULO SOBRE CARRO EN MOVIMIENTO.

El carro de masa M , mostrado en la figura, se desliza sin rozamiento sobre una superficie horizontal. De la parte superior del carro cuelga un péndulo simple, que consiste de una cuerda ideal de longitud L y con una masa m atada a su extremo.

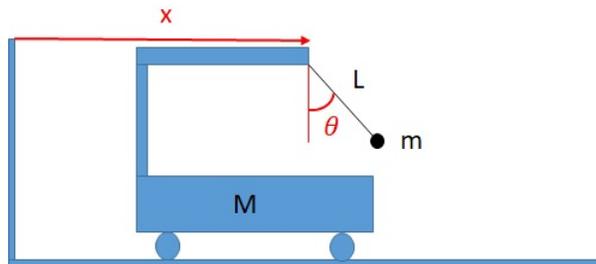


- A) (2 puntos) Encuentre un conjunto apropiado de coordenadas generalizadas para este sistema y escriba las coordenadas del carro y del péndulo en términos de ellas.
- B) (3 puntos) Encuentre la energía potencial del sistema
- C) (6 puntos) Encuentre la energía cinética del sistema
- D) (1 punto) Encuentre el Lagrangiano que describe la dinámica de este sistema
- E) (8 puntos) Use las ecuaciones de Euler-Lagrange para hallar las ecuaciones de movimiento.

SOLUCIÓN

A) Usamos dos coordenadas generalizadas (ver figura):

- coordenada x : Posición horizontal donde está sujeto el péndulo, medido desde un punto fijo.
- coordenada θ : Ángulo de oscilación del péndulo con respecto a la vertical.



Dados que todos los puntos del carro e mueven con la misma velocidad, podemos entonces definir la posición horizontal del carro con la coordenada x . Las posiciones horizontal y vertical del péndulo son:

$$x_p = x + L \sin \theta \quad ; \quad y_p = -L \cos \theta \quad (12)$$

B) Tomando como referencia el punto de soporte del péndulo y asumiendo que el centro de masa del carro está a una altura h por debajo de este punto, entonces la energía potencial del sistema es:

$$U = -Mgh - mgL \cos \theta \quad (13)$$

C) La energía cinética del sistema es:

$$K = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2) \quad (14)$$

Donde

$$\dot{x}_p = \dot{x} + L \cos \theta \dot{\theta} \quad ; \quad \dot{y}_p = L \sin \theta \dot{\theta} \quad (15)$$

Reemplazando y simplificando obtenemos:

$$K = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 + m L \cos \theta \dot{x} \dot{\theta} \quad (16)$$

C) El lagrangiano que describe la dinámica de este sistema es:

$$L = K - U = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 + m L \cos \theta \dot{x} \dot{\theta} + m g L \cos \theta + M g h \quad (17)$$

D) Aplicamos las ecuaciones de Euler-Lagrange para cada una de las coordenadas:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M + m) \dot{x} + mL \cos \theta \dot{\theta} \quad (18)$$

Entonces:

$$(M + m) \dot{x} + mL \cos \theta \dot{\theta} = \text{constante} \quad (19)$$

También podemos escribir:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \implies (M + m) \ddot{x} + mL \cos \theta \ddot{\theta} - mL \sin \theta \dot{\theta}^2 = 0 \quad (20)$$

Hacemos lo mismo para la coordenada θ :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mL \sin \theta \dot{x} \dot{\theta} - mgL \sin \theta \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mL^2 \dot{\theta} + mL \cos \theta \dot{x} \quad (21)$$

Entonces:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \implies \ddot{x} \cos \theta + L \ddot{\theta} + g \sin \theta = 0 \quad (22)$$

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2020 - II
Mecánica Analítica

PROBLEMA 3: ÓRBITAS DE HIGGS

Una partícula se mueve bajo la influencia de un potencial central dado por:

$$V(r) = -\mu^2 r^2 + \lambda^2 r^4 \quad (23)$$

Donde μ y λ son parámetros reales positivos.

En el contexto de teoría cuántica de campos r es reemplazado por un campo complejo escalar, que corresponde al campo de Higgs. En el contexto de mecánica clásica estudiamos el movimiento para una partícula sometida a este campo central.

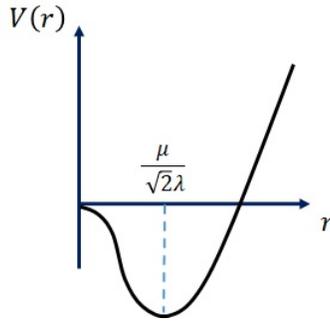
- A) (2 puntos) Dibuje el potencial central en función de la distancia radial r y verifique si este potencial tiene un mínimo, en tal caso halle la posición del mínimo.
- B) (12 puntos) Encuentre la ecuación de movimiento radial para la partícula.
- C) (6 puntos) Que condición debe cumplir la coordenada radial, en términos de μ y λ , para que las orbitas circulares en las que se mueve la partícula sean estables.
- D) (10 puntos) Determine la frecuencia para pequeñas oscilaciones, al considerar una perturbación de la coordenada radial de la partícula alrededor de su trayectoria circular.

SOLUCIÓN

A) Cuando $r \rightarrow \infty$ $V(r) \rightarrow \infty$, cuando $r \rightarrow 0$ $V(r) \rightarrow 0$, pero el término r^4 tiende a cero más rápido que el término r^2 , entonces $V(r)$ es negativo antes de volverse cero. Entonces debe existir un mínimo del potencial. Calculamos ese mínimo:

$$\frac{dV}{dr} = 0 = -2\mu^2 r + 4\lambda^2 r^3 = 0 \implies r = \frac{\mu}{\sqrt{2}\lambda} \quad (24)$$

Note que la derivada del potencial se hace cero para $r = 0$, pero la segunda derivada es negativa en $r = 0$, entonces hay un máximo local en $r = 0$. Un bosquejo del potencial central es mostrado en la figura de abajo, donde se muestra la dependencia con respecto a la coordenada radial, dado que hay simetría azimutal, si incluyéramos un tercer eje con el ángulo azimutal, en tres dimensiones tendríamos un potencial estilo sombrero mexicano.



B) El Lagrangiano para la partícula en el potencial central indicado es:

$$L = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) + \mu^2 r^2 - \lambda^2 r^4 \quad (25)$$

Usamos las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \implies \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = m\ddot{r} \quad (26)$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 + 2\mu^2 r - 4\lambda^2 r^3 \quad (27)$$

Entonces:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \implies m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 + 2\mu^2 r - 4\lambda^2 r^3 \quad (28)$$

Dado que es un potencial central, entonces el momento angular ℓ es una constante del movimiento:

$$\ell = mr^2\dot{\theta} \implies \dot{\theta}^2 = \frac{\ell^2}{m^2 r^4} \quad (29)$$

La ecuación de movimiento para la coordenada radial la podemos escribir como:

$$m\ddot{r} = \frac{\ell^2}{mr^3} + 2\mu^2 r - 4\lambda^2 r^3 \quad (30)$$

C) Para orbitas circulares $\dot{r} = 0$, reemplazando en la ecuación de movimiento obtenemos:

$$\frac{\ell^2}{mr^3} = -2\mu^2 r + 4\lambda^2 r^3 \quad (31)$$

El lado izquierdo de esta ecuación es una cantidad positiva, esto impone la restricción sobre el lado derecho:

$$-2\mu^2 r + 4\lambda^2 r^3 > 0 \implies r > \frac{\mu}{\sqrt{2}\lambda} \quad (32)$$

Es decir, la partícula se puede mover en orbitas circulares estables siempre y cuando el radio del orbita sea mayor a la distancia a la cual el potencial es un mínimo.

D) Producimos una perturbación a la orbita circular: $r \rightarrow r + \epsilon$ y reemplazamos en la ecuación de movimiento:

$$m\ddot{\epsilon} = \frac{\ell^2}{m(r + \epsilon)^3} + 2\mu^2 (r + \epsilon) - 4\lambda^2 (r + \epsilon)^3 \quad (33)$$

Expandimos a primer orden en ϵ :

$$m\ddot{\epsilon} = \frac{\ell^2}{mr^3} \left(1 - \frac{3\epsilon}{r}\right) + 2\mu^2 (r + \epsilon) - 4\lambda^2 r^3 \left(1 + \frac{3\epsilon}{r}\right) \quad (34)$$

Usamos la relación 31 y simplificamos:

$$\ddot{\epsilon} + (24\lambda^2 r^2 - 8\mu^2) \epsilon = 0 \quad (35)$$

Esta última ecuación corresponde a movimiento armónico simple si:

$$24\lambda^2 r^2 - 8\mu^2 > 0 \implies r > \frac{\mu}{\sqrt{3}\lambda} \quad (36)$$

Pero como solo hay orbitas circulares bajo la condición $r > \frac{\mu}{\sqrt{2}\lambda}$, entonces la perturbación a la órbita circular produce un movimiento armónico simple alrededor de la coordenada radial de la órbita. La frecuencia de oscilación es:

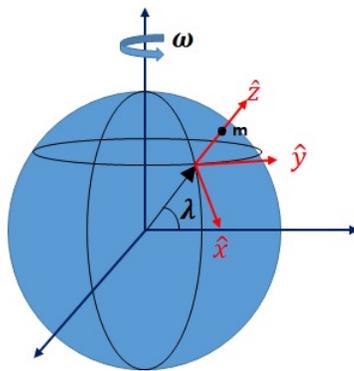
$$\omega = \sqrt{24\lambda^2 r^2 - 8\mu^2} \quad (37)$$

Donde r es el radio de la órbita circular.

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2020 - II
Mecánica Analítica

PROBLEMA 4: EFECTO DE CORIOLIS.

Si soltamos una partícula de masa m desde una posición vertical H por encima de un punto sobre la superficie terrestre, la partícula caerá en un punto diferente cuando llegue a la tierra. Esto se debe al movimiento rotacional terrestre alrededor de su eje con velocidad angular ω . En este problema queremos hallar la deflexión horizontal, sobre la superficie terrestre, causada por la fuerza de Coriolis sobre una partícula en caída libre desde una altura H , sobre la superficie de la tierra, donde despreciamos cualquier efecto del viento. Asumimos que la partícula es soltada desde una posición en el hemisferio norte a una latitud λ (como indica la figura), y que la altura de caída H es lo suficientemente pequeña tal que la aceleración de la gravedad se mantiene prácticamente constante. La aceleración de la gravedad \vec{g} que se mide sobre la superficie de la tierra tiene en cuenta el efecto de la aceleración centrípeta terrestre.



- A) (4 puntos) Determine el vector de velocidad angular terrestre en el sistema de coordenadas mostrado en la figura. Con la coordenada vertical \hat{z} apuntando en dirección opuesta a la aceleración de la gravedad \vec{g} , la coordenada \hat{y} apuntando en dirección este y \hat{x} apuntando en dirección sur.

- B) (10 puntos) Asuma que la velocidad sobre el eje \hat{z} es dominante y que las otras componentes de la velocidad son despreciables, y encuentre el vector de aceleración de la partícula medida por una persona en la superficie terrestre.
- C) (10 puntos) halle las funciones que indican como varia cada coordenada de la partícula en función del tiempo.
- D) (6 puntos) Determine la deflexión horizontal que sufre la partícula en términos de la velocidad angular ω de la tierra, la aceleración de la gravedad g medida en la superficie terrestre, de la altura H y latitud λ a la que la partícula es soltada.

NOTA: Recuerde que la transformación de la aceleración entre un sistema con coordenadas fijas y un sistema con coordenadas que rotan respecto al primero se puede escribir como:

$$(\vec{a})_{fija} = (\vec{a})_{rotante} + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times (\vec{v})_{rotante}$$

SOLUCIÓN

A) La figura muestra el sistema de coordenadas en una posición en el hemisferio norte a una latitud λ .

El vector angular ω que va en dirección del eje terrestre, se descompone en este sistema de coordenadas indicado como:

$$\vec{\omega} = -\omega \cos \lambda \hat{x} + \omega \sin \lambda \hat{z} \quad (38)$$

B) La aceleración de la partícula medida por una persona en la tierra es:

$$(\vec{a})_{rotante} = (\vec{a})_{fija} - \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} - \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} - 2\vec{\omega} \times (\vec{v})_{rotante} \quad (39)$$

La velocidad angular de la tierra es constante en el tiempo, por lo que el término $\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$ no contribuye. La aceleración para un sistema fijo sin rotación se debe exclusivamente al efecto de la fuerza gravitacional:

$$(\vec{a})_{fija} = -\frac{GM_T}{R_T^2} \hat{r} \quad (40)$$

La aceleración gravitacional efectiva que se mide en la tierra se debe a la fuerza gravitacional en superposición con la fuerza centrífuga:

$$\vec{g} = (\vec{a})_{fija} - \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (41)$$

El efecto de la fuerza de Coriolis sobre la aceleración de la partícula, medida por un observador en la superficie terrestre, se puede cuantificar entonces como:

$$\vec{a} = \vec{g} - 2\vec{\omega} \times \vec{v} \quad (42)$$

Donde $\vec{g} = -g\hat{z}$ es la aceleración de la gravedad medida por el observador en la superficie terrestre, por lo que lleva la corrección de la fuerza centrífuga, y el término con el producto cruz corresponde a la aceleración de Coriolis. Como el cuerpo es soltado en caída libre, podemos hacer la aproximación que sus componentes de velocidad son:

$$\dot{x} = 0 \quad (43)$$

$$\dot{y} = 0 \quad (44)$$

$$\dot{z} = -gt \quad (45)$$

De acuerdo a esto, podemos evaluar el producto cruz en la aceleración de Coriolis:

$$\vec{\omega} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -\omega \cos \lambda & 0 & \omega \sin \lambda \\ 0 & 0 & -gt \end{vmatrix} = -\omega \cos \lambda g t \hat{y} \quad (46)$$

Entonces, el vector aceleración de la partícula es:

$$\vec{a} = -g\hat{z} + 2\omega\cos\lambda g t\hat{y} \quad (47)$$

C) La ecuación $\ddot{z} = -g$, con velocidad inicial igual a cero ($\dot{z}(0) = 0$) y posición inicial $z(0) = H$, conduce a la ecuación de posición:

$$z(t) = H - \frac{1}{2}gt^2 \quad (48)$$

Para la coordenada y tenemos la ecuación diferencial:

$$\ddot{y} = 2\omega\cos\lambda g t \quad (49)$$

Donde la posición y velocidad inicial en y son cero ($y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$). Integrando dos veces obtenemos:

$$y(t) = \frac{1}{3}\omega\cos\lambda g t^3 \quad (50)$$

D) Como la partícula la soltamos desde el reposo y desde una altura H , entonces el tiempo que le toma llegar al suelo lo encontramos evaluando $z(t) = 0$, obteniendo:

$$t_{vuelo} = \sqrt{\frac{2H}{g}} \quad (51)$$

Reemplazando en la ecuación de la coordenada y , obtenemos la deflexión horizontal que sufre la trayectoria de la partícula:

$$d = y(t_{vuelo}) = \frac{1}{3}\omega\cos\lambda \left(\frac{2H}{g}\right)^{3/2} \quad (52)$$

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2020 - 2
Mecánica Cuántica

No se permite el uso de ningún documento, libro o apuntes, ni el uso de ningún dispositivo electrónico tales como celulares, reproductores de música, computadores, tabletas, etc.

Duración total del examen : 3 horas

PROBLEMA 1 (20 puntos). Medición de un estado cuántico.

Considere un sistema físico en el estado $|\psi\rangle$. Medir dicho estado significa determinar las amplitudes de probabilidad asociadas a la representación de $|\psi\rangle$ en una base específica. Si por ejemplo se tiene un haz de fotones en el estado de polarización

$$|\psi\rangle = c_H|H\rangle + c_V|V\rangle, \quad (1)$$

con $|H\rangle$ y $|V\rangle$ denotando polarización horizontal y vertical, respectivamente, medir $|\psi\rangle$ significa determinar c_H y c_V unívocamente.

- (a) **(4 puntos)** El estado $|\psi\rangle$ puede escribirse de tal forma que aparezcan de manera explícita la magnitud y la fase de las amplitudes de probabilidad. Definiendo

$$c_H = ae^{i\phi_H} \quad c_V = be^{i\phi_V} \quad (2)$$

y tomando $\phi_H = 0$ y $\phi_V = \phi$, demuestre que el estado $|\psi\rangle$ puede escribirse como

$$|\psi\rangle = a|H\rangle + be^{i\phi}|V\rangle. \quad (3)$$

¿Es la escogencia $\phi_H = 0$ razonable? Explique su respuesta.

- (b) **(8 puntos)** A partir de la ecuación. 3 es claro que se necesitan tres valores reales, a , b y ϕ para determinar el estado $|\psi\rangle$.

- i. **(4 puntos)** Para determinar a y b , en el caso de los fotones, se utiliza un analizador de polarización que llamaremos PA_{HV} . Este aparato es capaz de distinguir entre los estados

$$|H\rangle \quad y \quad |V\rangle, \quad (4)$$

ya que registra $+1$ cuando el fotón tiene polarización horizontal y -1 cuando tiene polarización vertical. Calcule la probabilidad de obtener $+1$, $p_{HV}(+1||\psi\rangle)$, y la probabilidad de obtener -1 , $p_{HV}(-1||\psi\rangle)$, al utilizar el aparato PA_{HV} para medir $|\psi\rangle$. ¿Por qué se pueden entonces determinar a and b ?

- ii. **(2 puntos)** Para determinar ϕ , se utiliza además de PA_{HV} otro aparato que denotaremos por PA_{45} el cual permite distinguir entre los estados

$$|D\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle) \quad |A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - |V\rangle). \quad (5)$$

De manera análoga a PA_{HV} , PA_{45} registra +1 cuando el fotón está en el estado $|D\rangle$ y registra -1 cuando el fotón está en el estado $|A\rangle$. Calcule la probabilidad de obtener +1, $p_{45}(+1|\psi\rangle)$, y la probabilidad de obtener -1, $p_{45}(-1|\psi\rangle)$, al utilizar el aparato PA_{45} para medir $|\psi\rangle$.

- iii. **(2 puntos)** Explique cómo el utilizar PA_{HV} y PA_{45} permite determinar ϕ aunque no sea de manera unívoca.

- (c) **(4 puntos)** Para determinar ϕ de manera unívoca, se utiliza otro aparato, análogo a PA_{HV} y PA_{45} , que es capaz de distinguir entre los estados

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + i|V\rangle) \quad |L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - i|V\rangle). \quad (6)$$

Este aparato, denotado por PA_c registra +1 al medir fotones con polarización circular derecha, $|R\rangle$, y registra -1 al medir fotones con polarización circular izquierda, $|L\rangle$.

- i. **(2 puntos)** Calcule la probabilidad de obtener +1, $p_c(+1|\psi\rangle)$, y la probabilidad de obtener -1, $p_c(-1|\psi\rangle)$, al utilizar el aparato PA_c para medir $|\psi\rangle$.
- ii. **(2 puntos)** Explique por qué el uso de PA_{HV} , PA_{45} y PA_c permite conocer ϕ unívocamente y por lo tanto el estado $|\psi\rangle$.
- (d) **(4 puntos)** Considere la situación en que se realizan medidas de polarización, con los tres aparatos descritos anteriormente, sobre varios sistemas preparados en el mismo estado. Los resultados de las mediciones son tales que

$$p_{HV}(+1|\psi\rangle) = \frac{1}{2} \quad p_{45}(+1|\psi\rangle) = 0.93 \quad p_c(-1|\psi\rangle) = \frac{1}{4}. \quad (7)$$

¿cuál es el estado de polarización del sistema?

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2020 - 2
Mecánica Cuántica

PROBLEMA 2. (30 puntos) Evolución temporal de un estado: resonancia magnética nuclear

Considere una partícula con espín y por lo tanto con un momento magnético, $\vec{\mu}$. Esta partícula se encuentra inicialmente en el estado $|\psi(t=0)\rangle = |+\rangle_z$, un estado propio del operador de espín en la dirección z . Posteriormente, se enciende un campo magnético, \vec{B} . Este campo tiene una componente constante en dirección \hat{z} y una componente que oscila en el tiempo, con frecuencia ω , en dirección \hat{x} :

$$B_z = B_z^0 \qquad B_x = B_x^0 \cos(\omega t), \qquad (8)$$

con B_z^0 y B_x^0 constantes.

El objetivo de este ejercicio es encontrar el estado de la partícula después de un cierto tiempo t y a partir de este resultado, explicar la física detrás del fenómeno de resonancia magnética nuclear. Para esto siga los siguientes pasos:

- (a) **(10 puntos)** Empiece considerando el hamiltoniano de interacción de la partícula con el campo magnético.
- i. **(5 puntos)** Demuestre que este hamiltoniano de interacción puede escribirse como

$$\hat{H}_I = -\Omega_0 \hat{S}_z - \Omega_1 \hat{S}_x \cos(\omega t), \qquad (9)$$

donde $\Omega_0 = \gamma B_z^0$ y $\Omega_1 = \gamma B_x^0$ son las correspondientes frecuencias de Larmor, γ es la razón giromagnética y \hat{S}_i son componentes del operador de espín.

- ii. **(5 puntos)** Escriba \hat{H}_I en representación matricial usando la base $|+\rangle_z, |-\rangle_z$ de vectores propios de \hat{S}_z . Al realizar esto se debe encontrar que los términos asociados a la componente de \vec{B} que es constante aparecen únicamente en la diagonal mientras que los términos asociados a la componente del campo magnético que varía con el tiempo aparecen en los elementos fuera de la diagonal. ¿Qué física revela este hecho?
- (b) **(10 puntos)** Considere el estado de la partícula en el tiempo t ,

$$|\psi(t)\rangle = a(t)|+\rangle_z + b(t)|-\rangle_z. \qquad (10)$$

Las funciones $a(t)$ y $b(t)$ pueden escribirse como

$$a(t) = c(t)e^{i\Omega_0 t/2} \qquad b(t) = d(t)e^{-i\Omega_0 t/2}, \qquad (11)$$

con $c(t)$ y $d(t)$ funciones arbitrarias de t y por lo tanto no comprometen la generalidad del estado.

Al resolver la ecuación de Schrödinger y considerar lo que se llama la aproximación de onda rotante, se encuentra que

$$\begin{aligned} c(t) &= -\frac{\omega'_-}{\Omega_R} e^{i\omega'_+ t} + \frac{\omega'_+}{\Omega_R} e^{i\omega'_- t} \\ d(t) &= \frac{4}{i\Omega_1} e^{-i(\omega - \Omega_0)t} \left[-i\omega'_+ \frac{\omega'_-}{\Omega_R} e^{i\omega'_+ t} + i\omega'_- \frac{\omega'_+}{\Omega_R} e^{i\omega'_- t} \right], \end{aligned} \quad (12)$$

con

$$\omega_{\pm} = \frac{(\omega - \Omega_0) \pm \Omega_R}{2} \quad \Omega_R = \sqrt{(\omega - \Omega_0)^2 + \left(\frac{\Omega_1}{2}\right)^2}. \quad (13)$$

- i. **(5 puntos)** Demuestre que en este caso la probabilidad, $P_{|- \rangle_z}(t)$, de que después de un tiempo t , la partícula esté en el estado $|- \rangle_z$ está dada por

$$P_{|- \rangle_z}(t) = p_{max}(\omega) \frac{1}{2} [1 - \cos(\Omega_R t)], \quad (14)$$

con

$$p_{max}(\omega) = \frac{4[(\omega - \Omega_0)^2 - \Omega_R^2]^2}{\Omega_1^2 \Omega_R^2}. \quad (15)$$

- ii. **(5 puntos)** Realice una gráfica de $P_{|- \rangle_z}(t)$ y dé una interpretación física de ella.

(c) **(10 puntos)** Física detrás del fenómeno de resonancia magnética nuclear.

- i. **(5 puntos)** Utilizando la definición de Ω_R , reescriba $p_{max}(\omega)$ como

$$p_{max}(\omega) = \left(\frac{\Omega_1}{2}\right)^2 \frac{1}{\left[(\omega - \Omega_0)^2 + \left(\frac{\Omega_1}{2}\right)^2\right]} \quad (16)$$

y realice una gráfica de $p_{max}(\omega)$.

- ii. **(5 puntos)** Explique cómo se entiende el hecho de que por medio de la resonancia magnética nuclear se pueden identificar distintos tipos de átomos en una muestra.

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2020 - 2
Mecánica Cuántica

PROBLEMA 3. (30 puntos) Momento angular y teoría de perturbaciones: acoplamiento espín-orbita en el átomo de hidrogeno .

En este ejercicio se calculará la separación energética que aparece por el acoplamiento espín-orbita en el átomo de hidrogeno. Para esto seguiremos los siguientes pasos:

- (a) **(4 puntos)** Sin realizar ningún cálculo, identifique los números cuánticos apropiados para caracterizar la energía y los estados propios del átomo de hidrogeno antes de considerar el acoplamiento entre el momento angular orbital y de espín. Es decir, antes de tener en cuenta la estructura fina y la estructura hiperfina.
- (b) **(10 puntos)** Al considerar el átomo de hidrogeno, en el marco propio del electrón, este ve un movimiento del núcleo que genera un campo magnético dado por

$$\vec{B}(r) = \frac{-\mu_0 e}{4\pi r^3 m_0} \vec{L}, \quad (17)$$

con μ_0 la permeabilidad del vacío, e la carga del electrón, m_0 la masa en reposo del electrón y \vec{L} el momento angular orbital del electrón. El operador campo magnético, $\vec{\hat{B}}$ puede obtenerse al reemplazar el momento angular \vec{L} por el correspondiente operador $\vec{\hat{L}}$

- i. **(6 puntos)** Teniendo en cuenta lo anterior, demuestre que el hamiltoniano de interacción, asociado únicamente al acoplamiento espín-orbita, puede escribirse como

$$\hat{H}_I = g \frac{e^2 \mu_0}{8\pi m_0^2 r^3} \vec{\hat{S}} \cdot \vec{\hat{L}}, \quad (18)$$

con el factor g del electrón que cumple $\vec{\mu} = g \left(\frac{e}{2m_0} \right) \vec{\hat{S}}$.

- ii. **(4 puntos)** Explique brevemente en palabras porque el operador $\vec{\hat{B}}$ puede obtenerse al sustituir \vec{L} por el correspondiente operador $\vec{\hat{L}}$.

(c) **(10 puntos)** \hat{H}_I está en realidad dado por

$$\hat{H}_I = \left(\frac{1}{2}\right) g \frac{e^2 \mu_0}{8\pi m_0^2 r^3} \hat{\vec{S}} \cdot \hat{\vec{L}}, \quad (19)$$

donde el factor de $1/2$ es introducido al considerar la corrección relativista conocida como la corrección de Thomas. Considerando este hamiltoniano corregido y el hecho que $g \approx 2$, demuestre que, usando teoría de perturbaciones, la corrección a la energía a primer orden debida al acoplamiento espín-orbita está dada por

$$E_{n,j,l}^{(1)} = \left(\frac{e^2 \mu_0}{8\pi m_0^2}\right) \frac{1}{2} \frac{\hbar^2}{n^3 a_0^3} \left[\frac{j(j+1) - l(l+1) - 3/4}{l(l+1/2)(l+1)} \right]. \quad (20)$$

Tenga en cuenta la base más apropiada para trabajar con el termino de acople y además note que

$$\langle n; j, m_j; l, m_l; s, m_s | \frac{1}{r^3} | n; j, m_j; l, m_l; s, m_s \rangle = \frac{1}{l(l+1/2)(l+1)n^3 a_0^3}, \quad (21)$$

con a_0 el radio de Bohr.

(d) **(6 puntos)** Calcule, en términos de $E_n^{(0)}$, m_0 y c , el desdoblamiento energético del estado $3P$ del átomo de hidrogeno debido al acoplamiento espín-orbita. Para esto note que

$$\left(\frac{e^2 \mu_0}{8\pi m_0^2}\right) \frac{1}{2} \frac{\hbar^2}{n^3 a_0^3} = (E_n^{(0)})^2 \frac{n}{m_0 c^2}, \quad (22)$$

con $E_n^{(0)}$ la energía del nivel n sin perturbar.

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2020 - 2
Mecánica Cuántica

PROBLEMA 4. (20 puntos) Partículas idénticas

Considere un sistema físico compuesto por tres partículas idénticas. Se consideran únicamente tres estados para las partículas individuales, $|\phi\rangle$, $|\chi\rangle$ y $|\omega\rangle$. Suponga que una de las partículas está en el estado $|\phi\rangle$, otra en $|\chi\rangle$ y la última en el estado $|\omega\rangle$. Cada uno de estos estados está normalizado y entre ellos son ortogonales.

En este ejercicio se construirá el estado asociado al sistema físico en cuestión para cada uno de los siguientes casos:

- (a) **(8 puntos)** cuando los tres estados individuales son diferentes entre ellos
 - i. **(3 puntos)** y las partículas son bosones
 - ii. **(3 puntos)** y las partículas son fermiones
 - iii. **(2 puntos)** Comente sobre las diferencias físicas entre el caso de bosones y el caso de fermiones.

- (b) **(6 puntos)** Cuando $|\phi\rangle=|\chi\rangle$ y sigue siendo ortogonal a $|\omega\rangle$
 - i. **(2 puntos)** y las partículas son bosones
 - ii. **(2 puntos)** y las partículas son fermiones
 - iii. **(2 puntos)** Comente sobre las diferencias físicas entre el caso de bosones y el caso de fermiones.

- (c) **(6 puntos)** cuando los tres estados individuales son iguales
 - i. **(2 puntos)** y las partículas son bosones
 - ii. **(2 puntos)** y las partículas son fermiones
 - iii. **(2 puntos)** Comente sobre las diferencias físicas entre el caso de bosones y el caso de fermiones.

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2020 - 2
Mecánica Cuántica

INFORMACIÓN ÚTIL

1. Energía del átomo de hidrogeno en el modelo de Bohr:

$$E_n^{(0)} = -\frac{e^4 m_0}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2 2n^2}. \quad (23)$$

Radio de Bohr

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_0 e^2}. \quad (24)$$

Ángulo	Sin	Cos
0	0	1
$\pi/6$	1/2	0.86
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	0.86	1/2
$\pi/2$	1	0
π	0	-1

2. Oscilador armónico, operadores escalera

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad \text{y} \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (25)$$

3.

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} e^{im\varphi} P_l^m(\cos\theta) \quad (26)$$

$$Y_l^m(\pi - \theta, \varphi + \pi) = (-1)^l Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (27)$$

4. Para los operadores de momento angular \hat{J} :

$$\hat{J}_z|J, m_j \rangle = j(j+1)\hbar|J, m_j \rangle$$

$$\hat{J}_+|J, m_j \rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}|J, m_j + 1 \rangle$$

$$\hat{J}_-|J, m_j \rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}|J, m_j - 1 \rangle$$

$$[\hat{J}_+, \hat{J}_z] = -\hbar\hat{J}_+$$

$$[\hat{J}_-, \hat{J}_z] = \hbar\hat{J}_-$$

5. Matrices de Pauli

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

6. Operador simetrizador

$$\hat{S} = \frac{1}{N!} \sum_{\alpha} \hat{P}_{\alpha} \quad (28)$$

Operador antisimetrizador

$$\hat{A} = \frac{1}{N!} \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} \hat{P}_{\alpha} \quad (29)$$

En las expresiones de \hat{S} y \hat{A} , N es el número de partículas del sistema y \hat{P}_{α} es el operador de permutación. ϵ_{α} puede tomar los valores $+1$ o -1 dependiendo de si la permutación es par ($+1$) o impar (-1).

7. Teoría de perturbaciones independientes del tiempo para el caso no degenerado:

La corrección a la energía a primer orden es:

$$E_n^{(1)} = \langle \phi_n | \hat{H}_I | \phi_n \rangle \quad (30)$$

en donde $|\phi_n \rangle$ son los estados propios del hamiltoniano sin perturbar.

La corrección a la energía a segundo orden es:

$$E_n^{(2)} = \sum_{k \neq n} \frac{|\langle \phi_k | \hat{H}_I | \phi_n \rangle|^2}{E_n^0 - E_k^0} \quad (31)$$

La corrección de primer orden al estado es:

$$|\varphi_n^{(1)}\rangle = \sum_{k \neq n} \frac{\langle \phi_k | \hat{H}_I | \phi_n \rangle}{E_n^0 - E_k^0} |\varphi_k^{(0)}\rangle. \quad (32)$$

la corrección del estado a segundo orden es :

$$|\varphi_n^{(2)}\rangle = \sum_{k \neq n} \sum_{l \neq n} \frac{\langle \phi_k | \hat{H}_I | \phi_l \rangle \langle \phi_l | \hat{H}_I | \phi_n \rangle}{(E_n^0 - E_k^0)(E_n^0 - E_l^0)} |\varphi_k^{(0)}\rangle. \quad (33)$$

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2020 - 2
Mecánica Cuántica

Solución

PROBLEMA 1 (20 puntos). Medición de un estado cuántico.

(a) (4 puntos)

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= c_H|H\rangle + c_V|V\rangle \\ &= ae^{i\phi_H}|H\rangle + be^{i\phi_V}|V\rangle \\ &= e^{i\phi_H}(a|H\rangle + be^{i(\phi_V-\phi_H)}|V\rangle). \end{aligned} \quad (1)$$

Se reconoce entonces que ϕ_H aparece como una fase global y por lo tanto no afecta al estado. Entonces se puede escoger $\phi_H = 0$ sin pérdida de generalidad, de tal manera que

$$|\psi\rangle = (a|H\rangle + be^{i\phi}|V\rangle), \quad (2)$$

con $\phi = \phi_V$.

(b) (8 puntos)

i. (4 puntos)

$$\begin{aligned} p_{HV}(+1|\psi\rangle) &= |\langle H|\psi\rangle|^2 \\ &= |\langle H|(a|H\rangle + be^{i\phi}|V\rangle)|^2 \\ &= |a + 0|^2 \\ &= |a|^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Además,

$$\begin{aligned} p_{HV}(-1|\psi\rangle) &= |\langle V|\psi\rangle|^2 \\ &= |\langle V|(a|H\rangle + be^{i\phi}|V\rangle)|^2 \\ &= |0 + be^{i\phi}|^2 \\ &= |b|^2. \end{aligned} \quad (4)$$

A partir de Eq.3 y Eq.4 se ve que las probabilidades, $p_{HV}(+1||\psi\rangle)$ y $p_{HV}(-1||\psi\rangle)$ determinan a y b , respectivamente. Por lo tanto, utilizando el aparato PA_{HV} sobre un conjunto de fotones preparado en el estado $|\psi\rangle$ se puede medir el número de fotones que tienen, por ejemplo, polarización H e inferir el valor de a . El valor de b se obtiene ya que al estar normalizada la polarización, $b = \sqrt{1 - a^2}$.

ii. (2 puntos)

$$\begin{aligned}
 p_{45}(+1||\psi\rangle) &= |\langle D|\psi\rangle|^2 & (5) \\
 &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle H| + \langle V|)(a|H\rangle + be^{i\phi}|V\rangle) \right|^2 \\
 &= \frac{1}{2}|a + be^{i\phi}|^2 \\
 &= \frac{1}{2}[1 + 2ab\cos(\phi)].
 \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
 p_{45}(-1||\psi\rangle) &= |\langle A|\psi\rangle|^2 & (6) \\
 &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle H| - \langle V|)(a|H\rangle + be^{i\phi}|V\rangle) \right|^2 \\
 &= \frac{1}{2}|a - be^{i\phi}|^2 \\
 &= \frac{1}{2}[1 - 2ab\cos(\phi)].
 \end{aligned}$$

iii. (2 puntos) A partir de Eq.5 y Eq.6 se ve que las probabilidades, $p_{45}(+1||\psi\rangle)$ o $p_{45}(-1||\psi\rangle)$ determinan ϕ , cuando a y b son conocidos. Por lo tanto, utilizando el aparato PA_{45} sobre un sistema de fotones preparados en $|\psi\rangle$ se puede contar, por ejemplo, el número de fotones con polarización D . A partir de esta medición y de las mediciones hechas con el aparato PA_{HV} se determina $\cos(\phi)$ por medio de la Eq.5. Sin embargo, la fase ϕ no se determina de manera unívoca ya que el coseno inverso no se define unívocamente.

(c) (4 puntos)

i. (2 puntos)

$$\begin{aligned} p_c(+1|\psi) &= |\langle R|\psi\rangle|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle H| + i\langle V|)(a|H\rangle + be^{i\phi}|V\rangle) \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} |a + ibe^{i\phi}|^2 \\ &= \frac{1}{2} [1 - 2ab\text{Sin}(\phi)]. \end{aligned} \tag{7}$$

Además,

$$\begin{aligned} p_c(-1|\psi) &= |\langle L|\psi\rangle|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle H| - i\langle V|)(a|H\rangle + be^{i\phi}|V\rangle) \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} |a - ibe^{i\phi}|^2 \\ &= \frac{1}{2} [1 + 2ab\text{Sin}(\phi)]. \end{aligned} \tag{8}$$

ii. (2 puntos) Para determinar $|\psi\rangle$ se debe entonces hacer lo siguiente: preparar varias copias del sistema en el estado $|\psi\rangle$ y realizar tres tipos de mediciones. Primero, se utiliza PA_{HV} y se determinan a y b . Segundo, sobre otras copias del sistema se utiliza PA_{45} y se determina el $\text{Cos}(\phi)$. Tercero, sobre otras copias del sistema se utiliza PA_c y se determina el $\text{Sin}(\phi)$. Al conocer el $\text{Cos}(\phi)$ y el $\text{Sin}(\phi)$ se puede determinar ϕ unívocamente. De esta manera, se conocen a , b y ϕ y por lo tanto $|\psi\rangle$.

(d) (4 puntos)

$$p_{HV}(+1|\psi) = |a|^2 = \frac{1}{2}. \tag{9}$$

Entonces $a = 1/\sqrt{2}$ y $b = 1/\sqrt{2}$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} p_{45}(+1|\psi\rangle) &= \frac{1}{2} [1 + 2ab\cos(\phi)] \\ &= \frac{1}{2} \left[1 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cos(\phi) \right] \\ &= 0.93. \end{aligned} \tag{10}$$

Entonces $\cos(\phi) = 0.86$.

Además,

$$\begin{aligned} p_c(-1|\psi\rangle) &= \frac{1}{2} [1 + 2ab\sin(\phi)]. \\ &= \frac{1}{2} \left[1 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin(\phi) \right]. \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned} \tag{11}$$

Entonces, $\sin(\phi) = -1/2$.

Como el coseno es positivo y el seno es negativo, $\phi = -\pi/6$ y

$$\boxed{|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + be^{-i\pi/6}|V\rangle)}. \tag{12}$$

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2020 - 2
Mecánica Cuántica

PROBLEMA 2. (30 puntos) Evolución temporal de un estado: resonancia magnética nuclear

(a) **(10 puntos)** Hamiltoniano de interacción

i. **(5 puntos)**

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_I &= -\hat{\vec{\mu}} \cdot \vec{B} \\
 &= -\gamma \hat{\vec{S}} \cdot (B_x^0 \cos(\omega t) \hat{x} + B_z^0 \hat{z}) \\
 &= -\gamma \hat{S}_x B_x^0 \cos(\omega t) - \gamma \hat{S}_z B_z^0 \\
 &= -\Omega_1 \hat{S}_x \cos(\omega t) - \Omega_0 \hat{S}_z
 \end{aligned} \tag{13}$$

con $\Omega_0 = \gamma B_z^0$ y $\Omega_1 = \gamma B_x^0$.

ii. **(5 puntos)** Se tiene que $\hat{s}_i = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_i$ con $\hat{\sigma}_i$ la i ésima matriz de Pauli. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_I &= -\frac{\hbar}{2} \Omega_1 \cos(\omega t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\hbar}{2} \Omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} -\Omega_0 & -\Omega_1 \cos(\omega t) \\ -\Omega_1 \cos(\omega t) & \Omega_0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

El hecho que el término constante en el tiempo aparezca únicamente en la diagonal, indica que un campo magnético constante únicamente contribuye como un valor constante a la energía.

(b) **(10 puntos)**

i. **(5 puntos)**

$$\begin{aligned}
 P_{|- \rangle_z}(t) &= |b(t)|^2 \\
 &= |d(t)|^2 \\
 &= \frac{16}{\Omega_1^2} \left| \frac{\omega'_+ \omega'_-}{\Omega_R} \right|^2 \left| -e^{i\omega'_+ t} + e^{i\omega'_- t} \right|^2 \\
 &= \frac{16}{\Omega_1^2 \Omega_R^2} |\omega'_+ \omega'_-|^2 \left[1 - e^{i(\omega'_+ - \omega'_-)t} - e^{-i(\omega'_+ - \omega'_-)t} + 1 \right].
 \end{aligned} \tag{13}$$

Se tiene además que

$$\omega'_+ \omega'_- = \frac{(\omega - \Omega_0)^2 - \Omega_R^2}{4} \quad (14)$$

y que

$$\omega'_+ - \omega'_- = \Omega_R. \quad (15)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P_{|- \rangle_z}(t) &= \frac{16}{\Omega_1^2 \Omega_R^2} \frac{((\omega - \Omega_0)^2 - \Omega_R^2)^2}{16} [2 - e^{i\Omega_R t} - e^{-i\Omega_R t}]. \\ &= \frac{((\omega - \Omega_0)^2 - \Omega_R^2)^2}{\Omega_1^2 \Omega_R^2} 2 [1 - \cos(\Omega_R t)]. \end{aligned} \quad (16)$$

Tomando en cuenta que

$$p_{max}(\omega) = \frac{4[(\omega - \Omega_0)^2 - \Omega_R^2]^2}{\Omega_1^2 \Omega_R^2}, \quad (17)$$

se tiene entonces que

$$P_{|- \rangle_z}(t) = p_{max}(\omega) \frac{1}{2} [1 - \cos(\Omega_R t)]. \quad (18)$$

ii. (5 puntos)

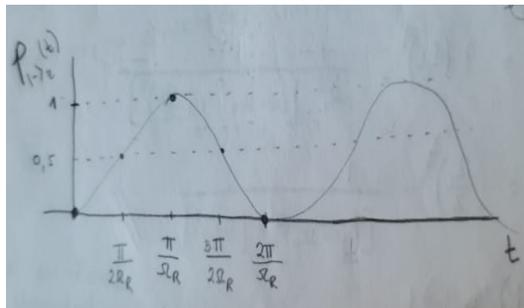


Figure 1: gráfica de $P_{|- \rangle_z}(t)$

De esta gráfica se ve que si el campo magnético se deja actuar durante $\Delta t = \frac{\pi}{\Omega_R}$ el estado de las partículas pasa de $|+ \rangle_z$ a $|- \rangle_z$. Para otro valor de Δt es posible preparar el estado de los átomos en una superposición.

(c) (10 puntos)

i. (5 puntos)

$$\begin{aligned} p_{max}(\omega) &= \frac{4[(\omega - \Omega_0)^2 - \Omega_R^2]^2}{\Omega_1^2 \Omega_R^2} & (19) \\ &= 4 \left[(\omega - \Omega_0)^2 - (\omega - \Omega_0)^2 - \left(\frac{\Omega_1}{2}\right)^2 \right]^2 \frac{1}{\Omega_1^2 \left[(\omega - \Omega_0)^2 + \left(\frac{\Omega_1}{2}\right)^2 \right]} \\ &= 4 \left(\frac{\Omega_1}{2}\right)^4 \frac{1}{\Omega_1^2 \left[(\omega - \Omega_0)^2 + \left(\frac{\Omega_1}{2}\right)^2 \right]} \\ &= \left(\frac{\Omega_1}{2}\right)^2 \frac{1}{\left[(\omega - \Omega_0)^2 + \left(\frac{\Omega_1}{2}\right)^2 \right]} \end{aligned}$$

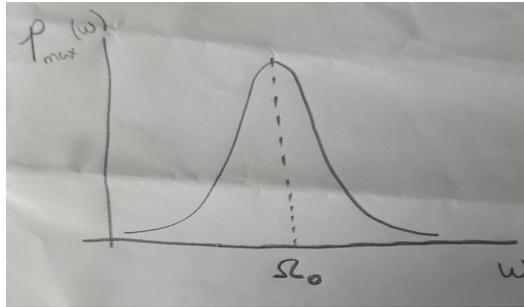


Figure 2: gráfica de $p_{max}(\omega)$

- ii. (5 puntos) De la figura 2, se observa un pico en p_{max} cuando $\omega = \Omega_0$ lo que corresponde a un típico fenómeno de resonancia. Esta es la clave para entender el fenómeno de resonancia magnética nuclear: para un $B_z^{(0)}$ dado, el núcleo de un átomo tiene una cierta frecuencia de Larmor asociada. Por la tanto, variando ω y midiendo p_{max} es posible identificar picos de resonancia que corresponden a núcleos específicos y así identificar la composición de una muestra.

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2020 - 2
Mecánica Cuántica

PROBLEMA 3. (30 puntos) Momento angular y teoría de perturbaciones: acoplamiento espín-orbita en el átomo de hidrogeno .

- (a) **(4 puntos)** En ausencia de acople, la energía está caracterizada únicamente por el número cuántico n .

En ausencia de acople, los estados propios están caracterizados por los números cuánticos n, l, m_l, s y m_s . Donde l y s denotan el número cuántico asociado al momento angular orbital y de espín, respectivamente. m_l y m_s denotan los números cuánticos asociados a las respectivas componentes z de los momentos angulares.

- (b) **(10 puntos)**
i. **(6 puntos)**

$$\hat{H}_I = -\hat{\vec{\mu}} \cdot \hat{\vec{B}}, \quad (20)$$

con $\hat{\vec{\mu}}$ el momento magnetico del electron y B en campo magnetico que ve el electron en su propio marco de referencia.

$$\begin{aligned} \hat{H}_I &= -\gamma \hat{\vec{s}} \cdot \frac{-\mu_0 e}{4\pi r^3 m_0} \hat{\vec{L}} \\ &= g \left(\frac{e}{2m_0} \right) \frac{-\mu_0 e}{4\pi r^3 m_0} \hat{\vec{s}} \cdot \hat{\vec{L}} \\ &= g \left(\frac{e^2 \mu_0}{8\pi m_0^2 r^3} \right) \hat{\vec{s}} \cdot \hat{\vec{L}} \end{aligned} \quad (21)$$

- ii. **(4 puntos)** las componentes de \vec{L} están dadas por

$$\hat{L}_x = yp_z - zp_y, \quad \hat{L}_y = xp_z - zp_x, \quad \hat{L}_z = xp_y - yp_x. \quad (22)$$

Como las diferentes componentes espaciales y de momento lineal conmutan cuando van en diferentes direcciones, es posible simplemente reemplazar las variables por sus correspondientes operadores sin necesidad de aplicar ninguna regla de simetrización. Esto es lo que lleva a que \vec{L} pueda ser reemplazado por $\hat{\vec{L}}$.

- (c) **(10 puntos)** Los estados sin perturbar son no degenerados y la perturbación es independiente del tiempo. Por lo tanto, se puede utilizar teoría de perturbaciones independiente del tiempo. A primer orden, la corrección a la energía está dada por

$$E_n^{(1)} = \langle \phi_n^{(0)} | \hat{H}_I | \phi_n^{(0)} \rangle, \quad (23)$$

con $|\phi_n^{(0)}\rangle$ siendo un estado propio del hamiltoniano sin perturbar.

$$\begin{aligned} E_n^{(1)} &= \langle n; l, m_l; s, m_s | g \frac{1}{2} \left(\frac{e^2 \mu_0}{8\pi m_0^2 r^3} \right) \hat{\vec{s}} \cdot \hat{\vec{L}} | n; l, m_l; s, m_s \rangle, \\ &= \left(\frac{e^2 \mu_0}{8\pi m_0^2} \right) \langle n; l, m_l; s, m_s | \frac{\hat{\vec{s}} \cdot \hat{\vec{L}}}{r^3} | n; l, m_l; s, m_s \rangle, \end{aligned} \quad (24)$$

donde se uso el hecho que $g_s = 2$. Además,

$$\begin{aligned} \hat{J}^2 &= (\hat{\vec{s}} + \hat{\vec{L}})^2 \\ &= (\hat{\vec{s}})^2 + (\hat{\vec{L}})^2 + 2\hat{\vec{s}} \cdot \hat{\vec{L}}. \end{aligned} \quad (25)$$

Por lo tanto,

$$E_n^{(1)} = \left(\frac{e^2 \mu_0}{8\pi m_0^2} \right) \frac{1}{2} \langle n; l, m_l; s, m_s | \frac{(\hat{J})^2 - (\hat{\vec{s}})^2 - (\hat{\vec{L}})^2}{r^3} | n; l, m_l; s, m_s \rangle. \quad (26)$$

Para efectuar esta operación se utiliza el hecho que existe una base en la que \hat{H}_I es diagonal. Esta base la llamaremos acoplada y se denota por $|n; j, m_j; l, m_l; s, m_s\rangle$, con j y m_j los números cuánticos asociados al momento angular total y a su componente z . Dicha base acoplada se puede expresar en términos de la base desacoplada $|n; l, m_l; s, m_s\rangle$. Por lo tanto, teniendo en cuenta que los diferentes elementos de las bases son ortogonales entre ellos

$$\begin{aligned}
E_n^{(1)} &= \left(\frac{e^2 \mu_0}{8\pi m_0^2} \right) \frac{1}{2} \\
&\times \langle n; j, m_j; l, m_l; s, m_s | \frac{(\hat{J})^2 - (\hat{s})^2 - (\hat{L})^2}{r^3} | n; j, m_j; l, m_l; s, m_s \rangle \\
&= \left(\frac{e^2 \mu_0}{8\pi m_0^2} \right) \frac{1}{2} (j(j+1)\hbar^2 - s(s+1)\hbar^2 - l(l+1)\hbar^2) \\
&\times \langle n; j, m_j; l, m_l; s, m_s | \frac{1}{r^3} | n; j, m_j; l, m_l; s, m_s \rangle \\
&= \left(\frac{e^2 \mu_0}{8\pi m_0^2} \right) \frac{1}{2} (j(j+1)\hbar^2 - s(s+1)\hbar^2 - l(l+1)\hbar^2) \\
&\times \frac{1}{l(l+1/2)(l+1)n^3 a_0^3}.
\end{aligned} \tag{27}$$

Para un electrón, $s = 1/2$. Por lo tanto, $s(s+1) = 3/4$ y

$$E_n^{(1)} = \left(\frac{e^2 \mu_0}{8\pi m_0^2} \right) \frac{1}{2} \frac{\hbar^2}{n^3 a_0^3} \left[\frac{j(j+1) - l(l+1) - 3/4}{l(l+1/2)(l+1)} \right].$$

De la Eq.28, se observa que la corrección a la energía depende de tres números cuánticos, n , l y j . Lo que esto refleja es el hecho de que los niveles energéticos antes de considerar el acople espín orbita son degenerados y el acople justamente abre este degeneramiento. Por lo tanto,

$$E_n^{(1)} \rightarrow E_{n,j,l}^{(1)}. \tag{28}$$

- (d) **(6 puntos)** Al ser el estado $3P$ eso significa que $n = 3$ y $l = 1$. El electron tiene $s = 1/2$ y por lo tanto, como $|l+s| \leq j \leq |l-s|$ los posibles valores de j son $j = 3/2$ y $j = 1/2$.

Por lo tanto, aparecen dos valores para la corrección de la energía, $E_{n=3,j=3/2,l=1}^{(1)}$ y $E_{n=3,j=1/2,l=1}^{(1)}$.

Reconociendo que, como indica el enunciado,

$$\left(\frac{e^2 \mu_0}{8\pi m_0^2} \right) \frac{1}{2} \frac{\hbar^2}{n^3 a_0^3} = (E_n^{(0)})^2 \frac{n}{m_0 c^2}, \tag{29}$$

se tiene que

$$E_{n,j,l}^{(1)} = (E_n^{(0)})^2 \frac{n}{m_0 c^2} \left[\frac{j(j+1) - l(l+1) - 3/4}{l(l+1/2)(l+1)} \right]. \tag{30}$$

Reemplazando los valores correspondientes para j y l . se tiene que

$$\begin{aligned} E_{n=3,j=3/2,l=1}^{(1)} &= (E_3^{(0)})^2 \frac{1}{m_0 c^2} \\ E_{n=3,j=1/2,l=1}^{(1)} &= -2(E_3^{(0)})^2 \frac{1}{m_0 c^2}. \end{aligned} \tag{31}$$

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2020 - 2
Mecánica Cuántica

PROBLEMA 4. (20 puntos) Partículas idénticas

- (a) **(8 puntos)** cuando los tres estados individuales son diferentes entre ellos
- i. **(3 puntos)** Para crear el estado físico en el caso de un sistema de varias partículas se inicia escribiendo un estado donde se etiquetan las partículas. Por ejemplo

$$|u\rangle = |\phi\rangle_1 |\chi\rangle_2 |\omega\rangle_3 \quad (32)$$

Posteriormente se aplica el operador simetrizador o antisimetrizador dependiendo de la naturaleza de las partículas. Para el caso de los bosones

$$\begin{aligned} \hat{S}|u\rangle &= \frac{1}{N!} \sum_{\alpha} \hat{P}_{\alpha} (|\phi\rangle_1 |\chi\rangle_2 |\omega\rangle_3) \\ &= \frac{1}{3!} (|\phi\rangle_1 |\chi\rangle_2 |\omega\rangle_3 + |\phi\rangle_1 |\omega\rangle_2 |\chi\rangle_3 \\ &\quad + |\chi\rangle_1 |\phi\rangle_2 |\omega\rangle_3 + |\chi\rangle_1 |\omega\rangle_2 |\phi\rangle_3 \\ &\quad + |\omega\rangle_1 |\phi\rangle_2 |\chi\rangle_3 + |\omega\rangle_1 |\chi\rangle_2 |\phi\rangle_3). \end{aligned} \quad (33)$$

Finalmente se normaliza el estado y entonces para el caso de bosones se obtiene

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_{bosones} &= \frac{1}{\sqrt{6}} (|\phi\rangle_1 |\chi\rangle_2 |\omega\rangle_3 + |\phi\rangle_1 |\omega\rangle_2 |\chi\rangle_3 \\ &\quad + |\chi\rangle_1 |\phi\rangle_2 |\omega\rangle_3 + |\chi\rangle_1 |\omega\rangle_2 |\phi\rangle_3 \\ &\quad + |\omega\rangle_1 |\phi\rangle_2 |\chi\rangle_3 + |\omega\rangle_1 |\chi\rangle_2 |\phi\rangle_3). \end{aligned} \quad (34)$$

- ii. **(3 puntos)** Para el caso de fermiones de nuevo se empieza creando

$$|u\rangle = |\phi\rangle_1 |\chi\rangle_2 |\omega\rangle_3. \quad (35)$$

Posteriormente se aplica el operador simetrizador o antisimetrizador dependiendo de la naturaleza de las partículas. Para el caso de los fermiones

$$\hat{A}|u\rangle = \frac{1}{N!} \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} \hat{P}_{\alpha} (|\phi\rangle_1 |\chi\rangle_2 |\omega\rangle_3) \quad (36)$$

$$(37)$$

Aplicar $\hat{\mathcal{A}}$ es equivalente a calcular el determinante de Slater

$$\hat{\mathcal{A}}|u\rangle = \begin{vmatrix} |\phi\rangle_1 & |\chi\rangle_1 & |\omega\rangle_1 \\ |\phi\rangle_2 & |\chi\rangle_2 & |\omega\rangle_2 \\ |\phi\rangle_3 & |\chi\rangle_3 & |\omega\rangle_3 \end{vmatrix} \quad (38)$$

Calculando este determinante y normalizando se tiene

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_{fermiones} = \frac{1}{\sqrt{6}} & (|\phi\rangle_1|\chi\rangle_2|\omega\rangle_3 - |\phi\rangle_1|\omega\rangle_2|\chi\rangle_3 \\ & - |\chi\rangle_1|\phi\rangle_2|\omega\rangle_3 + |\chi\rangle_1|\omega\rangle_2|\phi\rangle_3 \\ & + |\omega\rangle_1|\phi\rangle_2|\chi\rangle_3 - |\omega\rangle_1|\chi\rangle_2|\phi\rangle_3). \end{aligned} \quad (39)$$

iii. **(2 puntos)** La función de onda del sistema de partículas, bajo el intercambio de bosones, es simétrica mientras que bajo el intercambio de fermiones es anti-simétrica.

(b) **(6 puntos)** Cuando $|\phi\rangle=|\chi\rangle$ y sigue siendo ortogonal a $|\omega\rangle$

i. **(2 puntos)** las partículas son bosones

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_{bosones} = \mathcal{N} & (|\phi\rangle_1|\phi\rangle_2|\omega\rangle_3 + |\phi\rangle_1|\omega\rangle_2|\phi\rangle_3 \\ & + |\phi\rangle_1|\phi\rangle_2|\omega\rangle_3 + |\phi\rangle_1|\omega\rangle_2|\phi\rangle_3 \\ & + |\omega\rangle_1|\phi\rangle_2|\phi\rangle_3 + |\omega\rangle_1|\phi\rangle_2|\phi\rangle_3). \end{aligned} \quad (40)$$

Con la normalización apropiada se tiene

$$|\Psi\rangle_{bosones} = \frac{1}{\sqrt{3}} (|\phi\rangle_1|\phi\rangle_2|\omega\rangle_3 + |\phi\rangle_1|\omega\rangle_2|\phi\rangle_3 + |\omega\rangle_1|\phi\rangle_2|\phi\rangle_3).$$

ii. **(2 puntos)** las partículas son fermiones

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_{fermiones} = \mathcal{N} & (|\phi\rangle_1|\phi\rangle_2|\omega\rangle_3 - |\phi\rangle_1|\omega\rangle_2|\phi\rangle_3 \\ & - |\phi\rangle_1|\phi\rangle_2|\omega\rangle_3 + |\phi\rangle_1|\omega\rangle_2|\phi\rangle_3 \\ & + |\omega\rangle_1|\phi\rangle_2|\phi\rangle_3 - |\omega\rangle_1|\phi\rangle_2|\phi\rangle_3). \end{aligned} \quad (41)$$

por lo tanto

$$\boxed{|\Psi\rangle_{fermiones} = 0}. \quad (42)$$

- iii. **(2 puntos)** El hecho que para el caso de fermiones la funcion de onda es cero, revela el principio de exclusion de Pauli.

(c) **(6 puntos)** cuando los tres estados individuales son iguales

- i. **(2 puntos)** para bosones

$$\boxed{|\Psi\rangle_{bosones} = |\phi\rangle_1|\phi\rangle_2|\phi\rangle_3}. \quad (43)$$

- ii. **(2 puntos)** para fermiones

$$\boxed{|\Psi\rangle_{fermiones} = 0}. \quad (44)$$

- iii. **(2 puntos)** De nuevo se revela el principio de exclusion de Pauli para fermiones.

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2020 - 2
Mecánica estadística

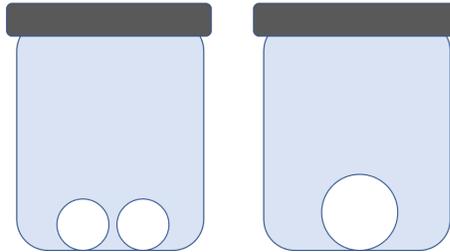
Instrucción

No se permite el uso de ningún documento, libro o apuntes, ni el uso de ningún dispositivo electrónico tales como celulares, reproductores de música, tabletas, etc.

Preguntas

1. (15 puntos) **Coalescencia de burbujas**

La coalescencia es el proceso en el que dos dominios de composición esencialmente idéntica entran en contacto para formar un dominio mayor. Considere un recipiente, de altura h , herméticamente sellado lleno de agua. En el fondo del recipiente hay dos burbujas pequeñas que se deslizan la una hacia la otra para coalescer en una burbuja grande de radio a calcular (ver figura). La presión en el recipiente es P_0 , el radio de cada burbuja pequeña es R_0 y la tensión superficial del agua es σ . Considere que el proceso es isotérmico. Calcule el cambio de presión dentro del recipiente cuando las burbujas coalescen.



2. (25 puntos) **Paramagnetismo de Langevin**

Antes del nacimiento de la mecánica cuántica, Langevin explicó el paramagnetismo asumiendo que cada ión paramagnético tiene un momento magnético $\vec{\mu}$ cuya magnitud es constante (depende de la naturaleza del ión) y es libre de moverse en todas direcciones. En presencia de un campo magnético externo \vec{B} , la energía de interacción de un ión con el campo $E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ depende de la dirección de $\vec{\mu}$. La distribución de probabilidad del momento magnético, en equilibrio térmico, sigue la distribución de Boltzmann - Gibbs.

- (15 puntos) Calcule la función de partición Z y la energía libre, F . A partir del cálculo de F , encuentre momento magnético promedio $\langle \mu \rangle$. A partir del cálculo de $\langle \mu \rangle$ deduzca la expresión para la susceptibilidad magnética, χ , y simplifíquela para el caso de campos magnéticos pequeños¹.
- (10 puntos) Ahora para el cálculo cuántico, tenga en cuenta que la proyección de $\vec{\mu}$ en un campo $\vec{B} = B\hat{z}$, μ_z , puede tomar solo dos valores: $g\mu_B J_z$ con $-m_j < J_z < m_j$. Donde μ_B es el magnetón de Bohr y g es el factor de Landé. Para este caso calcule Z , F y χ . Compare el cálculo cuántico con el cálculo clásico del punto anterior.

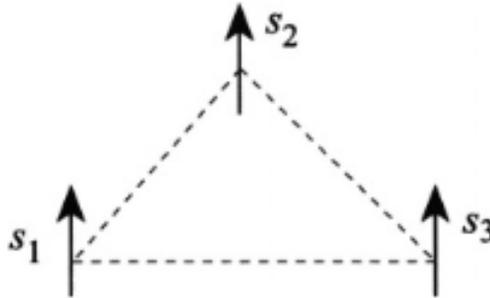
¹ $\coth x \approx \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \dots$

3. (30 puntos) **Efecto Termoiónico**

Para estudiar la emisión de electrones por un filamento de Tungsteno se modela el metal como una caja de potencial. Se asume que el potencial es cero dentro de la caja y constante fuera de ella. Este potencial constante, V , es igual al potencial de extracción de un electrón con momento lineal cero. Sólo algunos electrones pueden escapar porque $\beta(V - \mu) \gg 1$. Con $\beta = 1/k_B T$ y μ el potencial químico.

- (7,5 puntos) Muestre que para electrones libres con energía mayor que la de la barrera, la función de distribución de Fermi se reduce a la función de distribución de Boltzman.
- (7,5 puntos) Calcule el número de electrones por unidad de volumen con momento normal a la superficie, p_x , que chocan con la superficie del filamento en un intervalo de tiempo dt .
- (15 puntos) Asuma que sólo los electrones con momento $p_x \geq \sqrt{2mV}$ dejan el metal. El filamento está conectado a un potencial negativo y opuesto a este se encuentra un ánodo positivo, de tal manera que los electrones son constantemente reemplazados y el material permanece neutro. Calcule la densidad de corriente emitida como función de la temperatura y compárela con la ley empírica de Richardson $j = AT^2 e^{-B/T}$ donde A y B son constantes determinadas de forma experimental.

4. (30 puntos) **Arreglo de tres espines**



Se ubican tres espines en los vértices de un triángulo equilátero con cada espín interactuando con sus vecinos. La expresión para la energía en el modelo de Ising en un campo magnético, B , es:

$$\mathcal{H} = -J(s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1) - B(s_1 + s_2 + s_3)$$

Donde, J es el factor de interacción que se asume constante a primeros vecinos y s_i puede tomar valores de ± 1 .

Derive las expresiones para:

- la función de partición
- el espín promedio $\langle s \rangle$
- la energía interna

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2020 - 1
Mecánica estadística

Solución

1. Coalescencia de burbujas

En equilibrio, cada burbuja tiene un balance entre la fuerza que siente debido a la tensión superficial del agua y la presión interna del aire atrapado:

$$2\pi R_0\sigma = p\pi R_0^2$$
$$p = \frac{2\sigma}{R_0}$$

La presión que siente cada burbuja antes de coalescer es:

$$P_i = P_0 + \rho gh + \frac{2\sigma}{R_0}$$

donde ρgh es la presión hidrostática y h es la altura del agua. No se toma en cuenta los efectos debido al tamaño de las burbujas ya que son pequeñas comparadas a la altura del agua ($R_0 \ll h$). Al coalescer la nueva burbuja tendrá un radio de:

$$2\frac{4}{3}\pi R_0^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$$
$$R = 2^{1/3}R_0$$

Ya que el proceso es isotérmico, la presión dentro de la burbuja no cambia:

$$P_i = P + \rho gh + \frac{2\sigma}{R}$$

Sin tener en cuenta pequeños cambios en la presión hidrostática. El diferencial de presión será entonces:

$$\Delta P = P - P_0 = 2\sigma \left(-\frac{1}{R} + \frac{1}{R_0} \right)$$
$$= \frac{2\sigma}{R_0} \left(1 - \frac{1}{2^{1/3}} \right)$$

2. Paramagnetismo de Langevin

- Clásicamente, integrando sobre todas las direcciones angulares:

$$\begin{aligned} Z &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d(\cos\theta) e^{\beta\mu B \cos\theta} \\ &= \frac{4\pi}{\beta\mu B} \sinh(\beta\mu B) \end{aligned}$$

La energía libre es:

$$F = -k_B T \ln Z$$

De lo que se obtiene un momento magnético promedio:

$$\begin{aligned} \langle \mu \rangle &= -\frac{\partial F}{\partial B} \\ &= \mu \left(\coth(\beta\mu B) - \frac{1}{(\beta\mu B)} \right) \end{aligned}$$

De lo que se puede extraer la susceptibilidad χ para $B \approx \mu_0 H$:

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial H}$$

Donde M es el momento magnético por unidad de volumen.

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{N}{\Omega} \frac{\partial \langle \mu \rangle}{\partial H} \\ &= \frac{N}{\mu_0 \Omega} \frac{\partial \langle \mu \rangle}{\partial B} \\ &= \frac{N\mu}{\mu_0 \Omega} \frac{\partial}{\partial B} \left(\frac{1}{\beta\mu B} + \frac{\beta\mu B}{3} + \dots - \frac{1}{\beta\mu B} \right) \\ &= \frac{1}{\mu_0 \Omega} \frac{N}{k_B T} \frac{\mu^2}{3} \end{aligned}$$

- Cuánticamente el Hamiltoniano es $H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ y el momento magnético es proporcional al momento angular $\vec{\mu} = g\mu_B \vec{J}$ y está $2J + 1$ veces degenerado, entonces:

$$Z = \sum_{m=-m_j}^{m_j} e^{\beta g \mu_B B m}$$

Para facilidad del cálculo, voy a definir $x = \beta g \mu_B B$

$$\begin{aligned}
Z &= \sum_{m=-m_j}^{m_j} e^{xm} \\
&= e^{-Jx} \frac{1 - e^{(2J+1)x}}{1 - e^x} \\
&= \frac{e^{(J+1/2)x} - e^{-(J+1/2)x}}{e^{x/2} - e^{-x/2}} \\
&= \frac{\sinh(x(J + 1/2))}{\sinh(x/2)}
\end{aligned}$$

La energía libre es:

$$F = -k_B T \ln Z$$

De lo que se obtiene un momento magnético promedio:

$$\begin{aligned}
\langle \mu \rangle &= -\frac{\partial F}{\partial B} \\
&= k_B T \frac{\partial \ln Z}{\partial B} \\
&= \frac{k_B T}{Z} \frac{\partial Z}{\partial B} \\
&= \frac{k_B T}{Z} \frac{\partial x}{\partial B} \frac{\partial Z}{\partial x}
\end{aligned}$$

De los que obtenemos:

$$\langle \mu \rangle = \frac{g\mu_B}{Z} \frac{(j + 1/2) \cosh(J + 1/2)x \sinh x/2 - 1/2 \sinh(J + 1/2)x \cosh x/2}{\sinh^2 x/2}$$

De lo que obtiene un valor de susceptibilidad

$$\chi = \frac{1}{\mu_0 \Omega} (g\mu_B)^2 \frac{J(J+1)}{3}$$

3. Efecto termoiónico

- Cómo la energía de un electrón libre es mayor que la energía de Fermi, y por tanto del potencial químico, el factor de Fermi se reduce al factor de Boltzman:

$$\begin{aligned}
F(\epsilon) &= \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} \\
&\approx e^{\beta(\mu-\epsilon)}
\end{aligned}$$

Y el número de electrones con momento \vec{p} por unidad de volumen es:

$$2 \frac{d^3 \vec{p}}{h^3} e^{\beta(\mu - p^2/2m)}$$

- El número de electrones que chocan con la superficie del filamento en un tiempo dt es:

$$2 \frac{p_x}{m} dt \frac{d^3 \vec{p}}{h^3} e^{\beta(\mu - p^2/2m)}$$

- Por lo tanto, la densidad de corriente emitida es:

$$j = e \int_{\sqrt{2mV}}^{\infty} dp_x \int_{-\infty}^{\infty} dp_y dp_z \frac{p_x}{m} \frac{2}{h^3} e^{\beta(\mu - p^2/2m)}$$

Los electrones que salen del filamento son aquellos que cumplen $p_x < \sqrt{2mV}$. Entonces:

$$j = \frac{\pi m e k_B^2}{h^3} T^2 e^{-(V-\mu)/k_B T}$$

Recuperando de esta forma la ley empírica de Richardson $j = AT^2 e^{-B/T}$

4. Arreglo de tres espines

- La función de partición se calcula como:

$$Z = \prod_{n=1}^3 \sum_{s_i = \pm 1} e^{-\beta \mathcal{H}}$$

La configuración de espines tiene 8 orientaciones posibles: 111, 11-1, 1-11, -111, 1-1-1, -1-11, -11-1, -1-1-1 así es que por cálculo directo y por la definición de las funciones hipérbolicas:

$$Z = 2e^{3\beta J} \cosh \beta B + 6e^{-\beta J} \cosh \beta B$$

- El espín promedio es:

$$\begin{aligned} \langle s \rangle &= -\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial(\beta B)} \ln Z \\ &= -\frac{2}{Z} (e^{3\beta J} \sinh \beta B + e^{-\beta J} \sinh \beta B) \end{aligned}$$

- La energía interna se calcula cómo:

$$\begin{aligned} \epsilon &= -J \frac{\partial}{\partial(\beta J)} \ln Z \\ &= \frac{6J}{Z} (e^{3\beta J} \cosh \beta B - e^{-\beta J} \cosh \beta B) \end{aligned}$$

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2020 - 1
Mecánica estadística

FORMULAS GENERALES

1. Funciones de estado y relaciones de Maxwell

Energía interna:	U	$dU = TdS - pdV$
Entalpía:	$H = U + pV$	$dH = TdS + Vdp$
Energía libre:	$F = U - TS$	$dF = -SdT - pdV$
Entalpía libre de Gibbs :	$G = H - TS$	$dG = -SdT + Vdp$

$$TVS = -pSV, \quad TpS = VSp, \quad pTV = SVT, \quad VTp = -SpT$$

$$TdS = C_V dT + TpTVdV \quad \text{y} \quad TdS = C_p dT - TVTpdp$$

2. Para un gas ideal:

$$S_m = C_V \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + R \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) + S_{m0} \quad \text{y} \quad S_m = C_p \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - R \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) + S'_{m0}$$

3. Ecuaciones de Helmholtz:

$$UVT = TpTV - p, \quad HpT = V - TVTp$$

para una superficie muy grande: $W_{\text{rev}} = -\gamma dA$, en donde la tensión superficial es γ

$$\gamma = UAS = FAT$$

4. Valores esperados en términos de la función de partición.

$$E = -\frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta}, \quad p = kT \frac{\partial \ln(Z)}{\partial V}, \quad S = k \ln(Z) - k\beta \frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta}, \quad C_V = k\beta^2 \frac{\partial^2 \ln(Z)}{\partial \beta^2}$$

$$F = -kT \ln(Z), \quad \alpha = \frac{\partial \ln(Z)}{\partial N}, \quad \mu_j = -kT \frac{\partial \ln(Z)}{\partial N_j}$$

5. Funciones hiperbólicas

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$