

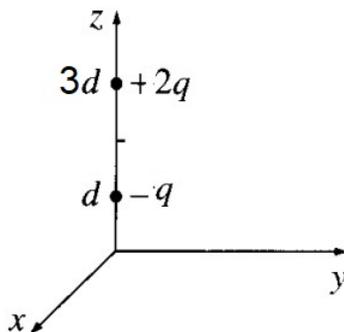
Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2020 - I
Electromagnetismo

No se permite el uso de ningún documento, libro o apuntes, ni el uso de ningún dispositivo electrónico tales como celulares, reproductores de música, computadores, tabletas, etc.

Duración total del examen : 3 horas

PROBLEMA 1 (20 puntos) Considere dos cargas localizadas en el eje z como se muestra en la figura. Un plano conductor infinito conectado a tierra ($V(z = 0) = 0$) está localizado sobre el plano xy .

1. (7 puntos) Encuentre el potencial eléctrico producido por esta configuración en cualquier punto con $z > 0$.
2. (6 puntos) Encuentre magnitud y dirección de la fuerza neta que experimenta la carga de valor $+2q$.
3. (7 puntos) Encuentre la distribución de carga sobre la superficie del conductor.



PROBLEMA 2 (20 puntos) Suponga una densidad volumétrica de corriente $\vec{J} = J\hat{k}$ que se distribuye en una ranura infinita entre los planos $x = -b$ y $x = b$ como se muestra en la figura.

1. (5 puntos) Encuentre la magnitud y dirección del campo magnético en función de x dentro de la ranura ($-b < x < b$)
2. (5 puntos) Encuentre la magnitud y dirección del campo magnético en función de x fuera de la ranura.
3. (5 puntos) Suponga que existe una corriente superficial \vec{K} en el plano $x = b$. La magnitud de esta corriente es $\vec{K} = -2bJ\hat{k}$. Encuentre la magnitud y la dirección producida por esta corriente en cualquier punto del espacio.
4. (5 puntos) Use el principio de superposición para calcular el campo magnético total, como función de x , en cualquier punto del espacio en esta nueva configuración.

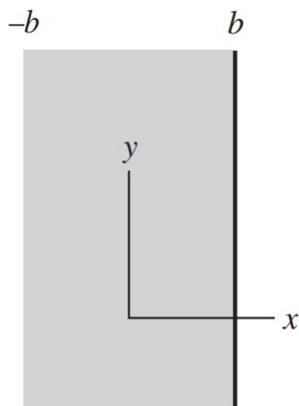
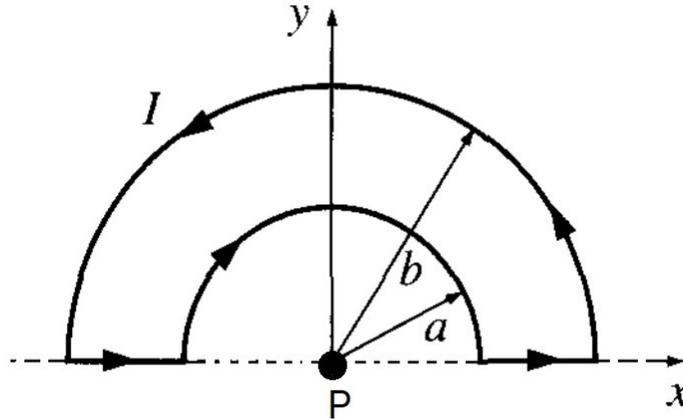


Figura 3

PROBLEMA 3 (30 puntos) Suponga un alambre doblado como se muestra en la figura. Inicialmente por el alambre circula una corriente I constante.

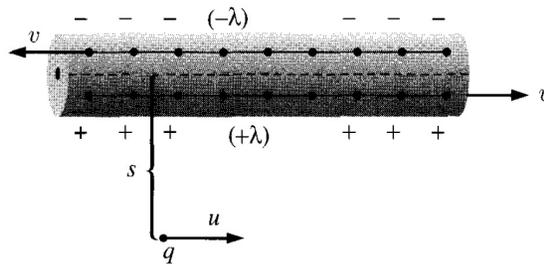


1. (7 puntos) Calcule el campo magnético en el punto P.
2. (6 puntos) Ahora suponga que por el alambre circula una corriente que se incrementa en el tiempo tal que $I(t) = kt$. Encuentre el potencial vectorial retardado $\vec{A}(t_r)$ en el punto P.
3. (6 puntos) Cuál es el valor del campo eléctrico en el punto P?
4. (3 puntos) Cuál es el origen físico de este campo eléctrico.
5. (7 puntos) Teniendo en cuenta la generalización de la ley de Biot-Savart dependiente del tiempo, dada por:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{r^2} + \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t_r)}{cr} \right] \times \hat{z} dV$$

Encuentre el campo magnético en el punto P cuando $I(t) = kt$.

PROBLEMA 4 (30 puntos) Considere un alambre en donde una densidad de carga $+\lambda$ se mueve hacia la derecha con una velocidad v con respecto al sistema de referencia del laboratorio y una densidad de carga $-\lambda$ se mueve hacia la izquierda con una velocidad $-v$ con respecto al sistema de referencia del laboratorio como se muestra en la Figura. En el sistema de referencia del laboratorio, una carga q , a una distancia s del alambre, se mueve con una velocidad u paralela al alambre.



1. (4 puntos) Encuentre la magnitud y dirección de los campos eléctrico y magnético en el sistema de referencia del laboratorio.
2. (2 puntos) Encuentre la magnitud y dirección de la fuerza que siente la carga q en el sistema de referencia del laboratorio.
3. (4 puntos) Suponga el sistema de referencia propio de la carga q . Encuentre la densidad de carga λ'_{\pm} en este sistema de referencia en términos de la densidad de carga λ_0 que se mide cuando la línea de carga está en reposo.
4. (8 puntos) Encuentre la magnitud y la dirección de los campos eléctrico y magnético en este sistema de referencia.
5. (2 puntos) Encuentre la magnitud y dirección de la fuerza que siente la carga q en el sistema de referencia en donde la carga está en reposo.
6. (5 puntos) Suponga un sistema de referencia en donde la carga $+\lambda$ se encuentra en reposo. Cuánto vale la fuerza total sobre q en este sistema de referencia?
7. (5 puntos) Compruebe que la cantidad $E^2 - c^2 B^2$ es un invariante relativista.

Fórmulas generales

Tensor de transformación de Lorentz

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tensor de campo electromagnético

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}$$

Transformación de campos eléctricos y magnéticos.

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & E'_y &= \gamma(E_y - vB_z), & E'_z &= \gamma(E_z + vB_y) \\ B'_x &= B_x, & B'_y &= \gamma(B_y + \frac{v}{c^2}E_z), & B'_z &= \gamma(B_z - \frac{v}{c^2}E_y) \end{aligned}$$

Adición de velocidades:

$$u'_{\pm} = \frac{u \mp v_x}{1 \mp uv_x/c^2}$$

$$\gamma(u'_{\pm}) = \gamma(u)\gamma(v)(1 \mp \frac{uv}{c^2})$$

Identidades vectoriales

$$\begin{aligned} \nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) &= \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} \\ \vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) &= (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \\ \vec{A} \times \vec{B} \times \vec{C} &= \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \end{aligned}$$

Derivadas vectoriales en coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} \nabla t &= \frac{\partial t}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial t}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial t}{\partial z} \hat{k} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \vec{\nabla} \times \vec{v} &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \hat{k} \end{aligned}$$

Derivadas vectoriales en coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} \nabla t &= \frac{\partial t}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial t}{\partial \phi} \hat{\phi} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_{\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_{\phi}}{\partial \phi} \end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{r} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r v_\phi) \right] \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi}$$

Derivadas vectoriales en coordenadas cilíndricas:

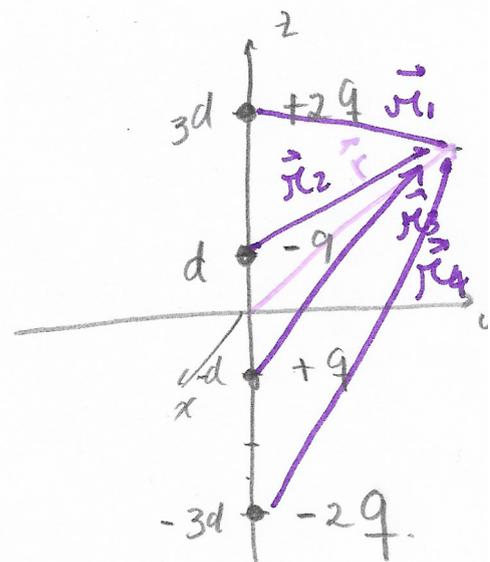
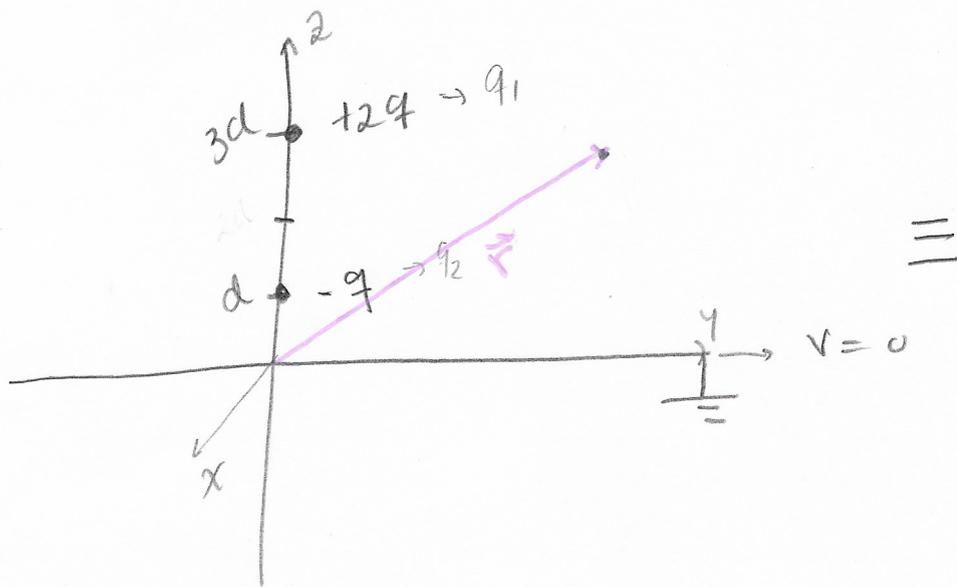
$$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial s} \hat{s} + \frac{1}{s} \frac{\partial t}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial t}{\partial z} \hat{k}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s v_s) + \frac{1}{s} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \left[\frac{1}{s} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right] \hat{s} + \left[\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s} \right] \hat{\phi} + \frac{1}{s} \left[\frac{\partial}{\partial s} (s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial \phi} \right] \hat{k}$$

Electromagnetismo:

Problema eq. por método de imágenes



a)

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\vec{r}_1 = x\hat{i} + y\hat{j} + (z - 3d)\hat{k} = \vec{r} - 3d\hat{k}$$

$$|\vec{r}_1| = (x^2 + y^2 + (z - 3d)^2)^{1/2}$$

$$\vec{r}_2 = x\hat{i} + y\hat{j} + (z - d)\hat{k}$$

$$\vec{r}_3 = x\hat{i} + y\hat{j} + (z + d)\hat{k}$$

$$\vec{r}_4 = x\hat{i} + y\hat{j} + (z + 3d)\hat{k}$$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{+2q}{r_1} + \frac{(-q)}{r_2} + \frac{(+q)}{r_3} + \frac{(-2q)}{r_4} \right) "$$

b) \vec{F}_1 es la fuerza que ejerce la carga $-q$ las dos carga imagen:

$$\vec{F}_{+2q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot 2q \left(\frac{-q}{(2d)^2} \hat{i} + \frac{q}{(4d)^2} \hat{i} + \frac{(-2q)}{(6d)^2} \hat{i} \right)$$

$$\begin{aligned}
 F_{(+2q)} &= \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} d^2 \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{2}{36} \right) \hat{x} \\
 &= \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 d^2} \left(\frac{-4+1}{16} - \frac{1}{18} \right) \hat{x} \\
 &= \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 d^2} \left(\frac{-3}{16} - \frac{1}{18} \right) \hat{x} = \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 d^2} \frac{70}{288} (-\hat{x}) \\
 &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \frac{45}{144} (-\hat{x})
 \end{aligned}$$

c) Para encontrar la distribución de carga

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{z=0}, \quad \text{llamemos } x^2 + y^2 = r^2$$

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2}{(r^2 + (z-3d)^2)^{1/2}} - \frac{1}{(r^2 + (z-d)^2)^{1/2}} + \frac{1}{(r^2 + (z+d)^2)^{1/2}} \right)$$

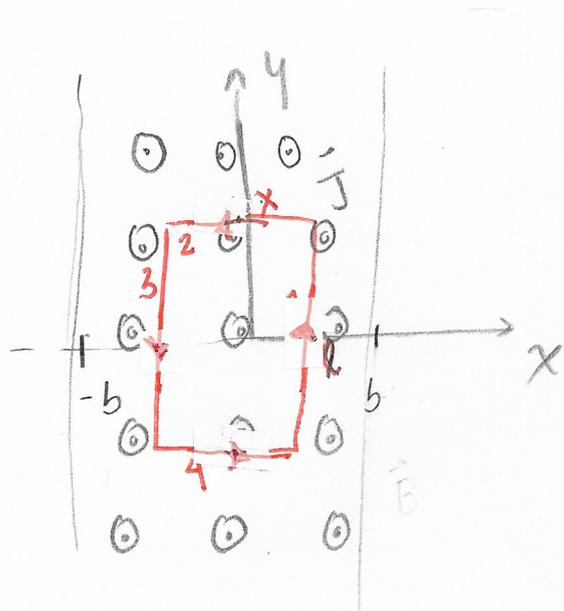
$$- \frac{2q}{(r^2 + (z+3d)^2)^{1/2}}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{1}{2} \left(\frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \right) \left[\frac{2 \cdot 2(z-3d)}{(r^2 + (z-3d)^2)^{3/2}} - \frac{1 \cdot 2(z-d)}{(r^2 + (z-d)^2)^{3/2}} \right. \\
 \left. + \frac{1 \cdot 2(z+d)}{(r^2 + (z+d)^2)^{3/2}} - \frac{2 \cdot 2(z+3d)}{(r^2 + (z+3d)^2)^{3/2}} \right]$$

en $z=0$ tenemos:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial V}{\partial z} \right|_{z=0} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-2 \cdot 12'd}{(r^2 + (3d)^2)^{3/2}} - \frac{(1-2d)}{(r^2 + d^2)^{3/2}} \right) \\ &\quad + \frac{2d}{(r^2 + d^2)^{3/2}} - \frac{12d}{(r^2 + (3d)^2)^{3/2}} \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{4d}{(r^2 + d^2)^{3/2}} - \frac{24d}{(r^2 + (3d)^2)^{3/2}} \right] \\ \sigma &= \frac{\epsilon_0 q}{4\pi} \cdot 4'd \left[\frac{1}{(r^2 + d^2)^{3/2}} - \frac{6}{(r^2 + (3d)^2)^{3/2}} \right] // \end{aligned}$$

Solución problema 2



a) $\oint \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 I_{en}$

$$I_{en} = \int \vec{J} \cdot dA$$

$J \rightarrow$ constante.

$$I_{en} = J \cdot l \cdot 2x$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{e} = \int_1 \vec{B} \cdot d\vec{e} + \int_2 \vec{B} \cdot d\vec{e} + \int_3 \vec{B} \cdot d\vec{e} + \int_4 \vec{B} \cdot d\vec{e}$$

En 4 la densidad de corriente va a infinito y por tanto las componentes de B en $x \rightarrow 0$

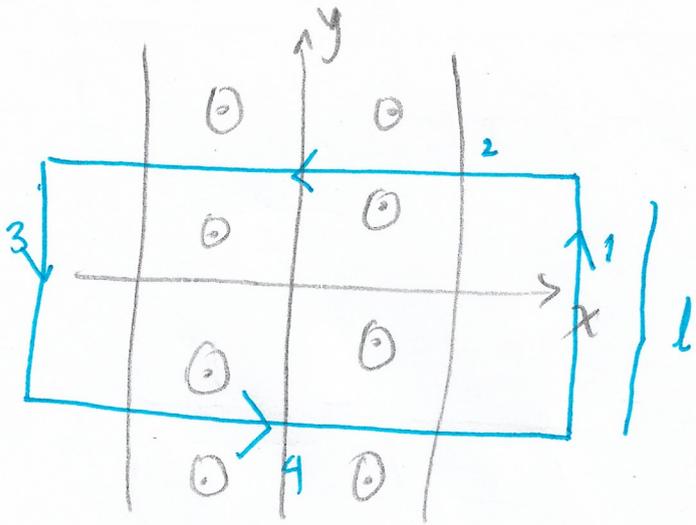
$$\int_2 \vec{B} \cdot d\vec{e} = \int_4 \vec{B} \cdot d\vec{e} = 0$$

En 1 y 3 \vec{B} y $d\vec{e}$ son paralelos

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{e} = 2Bx = \mu_0 J l x \cdot 2$$

$$\boxed{B = \mu_0 J x} \rightarrow \text{dirección } \vec{B} = \begin{cases} \mu_0 J x \hat{j}, & 0 < x < b \\ -\mu_0 J x \hat{j}, & -b < x < 0 \end{cases}$$

b) para $|x| > b$



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{en}$$

$$I_{en} = J \cdot A$$

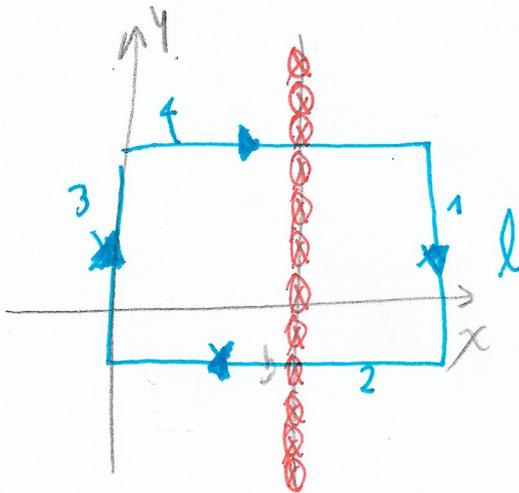
$$I_{en} = J \cdot 2bl$$

$$\int_1 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_2 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_3 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_4 \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0$$

$$2Bl = \mu_0 \cdot 2blJ =$$

$$B = \mu_0 bJ \quad \text{con dirección } \vec{B} = \begin{cases} \mu_0 bJ \hat{y}, & x > b \\ -\mu_0 bJ \hat{y}, & x < -b \end{cases}$$

c)



$$\vec{K} = -2bJ \hat{k}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{en}$$

$$I_{en} = K \cdot l = -2blJ$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_1 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_2 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_3 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_4 \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0$$

$$2Bl = -2blJ \mu_0$$

$$B = -\mu_0 bJ$$

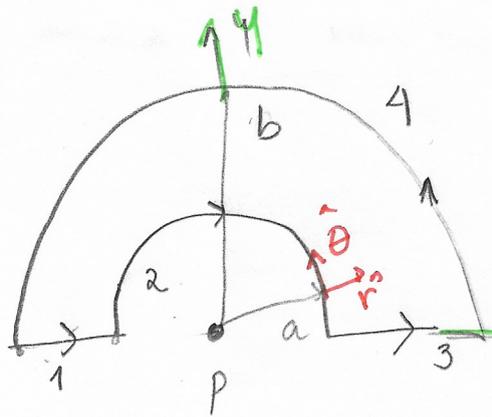
$$\vec{B} = \begin{cases} -\mu_0 bJ \hat{y} & x > b \\ \mu_0 bJ \hat{y} & x < -b \end{cases}$$

d) Usando el principio de superposición tenemos:

$$B_{\text{Total}} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x < -b \\ \mu_0 J (b-x) \hat{j} & -b < x < 0 \\ \mu_0 J (b+x) \hat{j} & 0 < x < b \\ 0 & x > b \quad " \end{array} \right\}$$

Solución problema 3.

a)



Usando Biot-Savart tener

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}$$

Integral en 4 segmentos

$$1 \rightarrow d\vec{\ell} = dx \hat{i}, \quad \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}', \quad \vec{r} = 0, \quad \vec{r}' = x(-\hat{i})$$

$$\hat{r} = \hat{i} \Rightarrow d\vec{\ell} \times \hat{r} = 0 \Rightarrow \vec{B}_1 = 0$$

$$3 \rightarrow \text{Similar a parte 1 de la espira} \Rightarrow \vec{B}_3 = 0$$

$$2 \rightarrow d\vec{\ell} = a d\theta (-\hat{\theta}), \quad \vec{r} = -a\hat{r}, \quad \hat{r} = -\hat{r}$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\pi \frac{a d\theta (-\hat{\theta}) \times (-\hat{r})}{a^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_0^\pi d\theta \underbrace{(\hat{\theta} \times \hat{r})}_{-\hat{k}}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \pi (-\hat{k}) = -\frac{\mu_0 I}{4a} \hat{k}$$

$$4 \rightarrow d\vec{\ell} = b d\theta (\hat{\theta}), \quad \vec{r} = -b\hat{r}, \quad \hat{r} = -\hat{r}$$

$$\vec{B}_4 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{b d\theta \hat{\theta} \times (-\hat{r})}{b^2} = \frac{\mu_0 I}{4b} \hat{k}$$

$$\vec{B}_{\text{total}}(P) = \vec{B}_1(P) + \vec{B}_2(P) + \vec{B}_3(P) + \vec{B}_4(P)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) (\hat{k})$$

b) $I(t) = Kt$,

$$t_r = t - \frac{r}{c}$$

$$\vec{A}(t, \vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{r} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I(t_r) d\vec{e}}{r}$$

$$I(t_r) = K \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

Veamos la contribución al potencial retardado de cada uno de los segmentos:

$$1 \rightarrow \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}' \Rightarrow \vec{r} = 0, \vec{r}' = -x \hat{i}$$

$$\vec{r} = x \hat{i}, d\vec{e} = dx \hat{i}$$

$$\vec{A}_1(t, \vec{r}) = \frac{\mu_0 K}{4\pi} \int_a^b \frac{\left(t - \frac{x}{c} \right) dx \hat{i}}{x}$$

$$= \frac{\mu_0 K}{4\pi} \left[\int_a^b \left[\frac{t}{x} dx - \int_a^b \frac{dx}{c} \right] \hat{i} \right]$$

$$= \frac{\mu_0 K}{4\pi} \left[t \ln \left(\frac{b}{a} \right) - \frac{(b-a)}{c} \right] \hat{i}$$

$$2 \rightarrow d\vec{e} = a d\theta (\hat{\theta}) \quad ; \quad \kappa = a$$

$$\begin{aligned} \vec{A}_2 &= \frac{\mu_0 \kappa}{4\pi} \int_0^\pi \frac{(t - a/c) a d\theta (\hat{\theta})}{a} \quad , \quad \hat{\theta} = -\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j} \\ &= \frac{\mu_0 \kappa (t - a/c)}{4\pi} \int_0^\pi d\theta (\hat{\theta}) \\ &= \frac{\mu_0 \kappa (t - a/c)}{4\pi} \int_0^\pi (\sin\theta \hat{i} - \cos\theta \hat{j}) d\theta \\ &= \frac{\mu_0 \kappa (t - a/c)}{4\pi} \cdot 2 \hat{i} \end{aligned}$$

De forma similar tenemos, para el segmento 4

$$\vec{A}_4 = \frac{\mu_0 \kappa (t - b/c)}{4\pi} \cdot 2 (-\hat{i})$$

para el segmento 3

3 $\rightarrow \vec{\kappa} = -\kappa \hat{i} \rightarrow$ similar a parte 1 de la espira

$$\vec{A}_3(t, \vec{r}) = \frac{\mu_0 \kappa}{4\pi} \left(t \ln\left(\frac{a}{b}\right) - \frac{(b-a)}{c} \right) \hat{i}$$

$$A_{\text{total}} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3 + \vec{A}_4$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 \kappa t}{4\pi} \cdot 2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) \hat{i} = \frac{\mu_0 \kappa t}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \hat{i}$$

c) Teniendo en cuenta

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla V, \quad \text{y que no tenemos}$$

distribuciones de carga por tanto $V = \text{cte}$ $\nabla V = 0$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 K}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \hat{z}$$

↳ Cambios en campos magnéticos inducen campos eléctricos.

d)
$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\underbrace{\frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{r^2}}_{(1)} + \underbrace{\frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t_r)}{rc}}_{(2)} \right) \times \hat{r} dV$$

$$J dV = I(t_r) dl = K t_r d\vec{e} = K \left(t - \frac{r}{c} \right) d\vec{e}$$

$$\dot{J} dV = \frac{dI}{dt}(t_r) d\vec{e} = K d\vec{e}$$

$$(1) \int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r) \times \hat{r} dVol}{r^2} = \int K \left(t - \frac{r}{c} \right) \frac{d\vec{e} \times \hat{r}}{r^2}$$

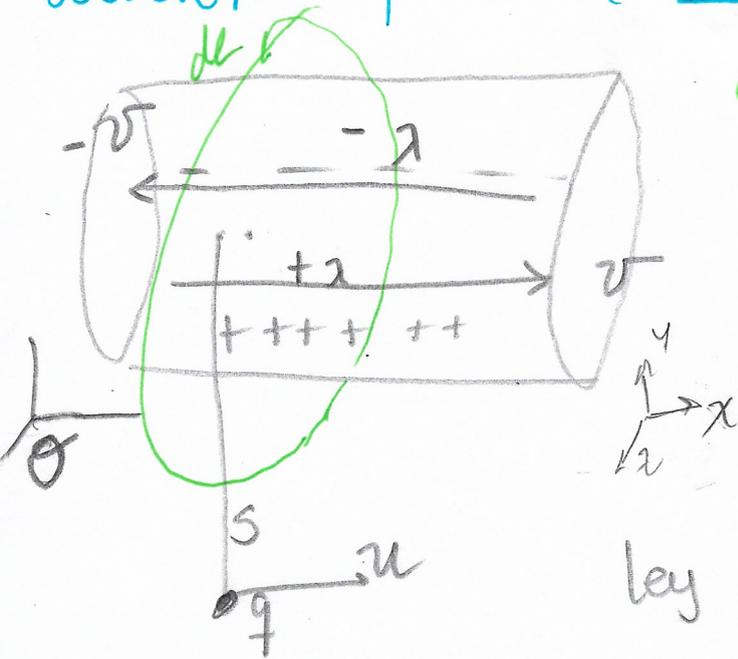
$$= \int K t \frac{d\vec{e} \times \hat{r}}{r^2} - \int \frac{K}{c} \frac{d\vec{e} \times \hat{r}}{r^2}$$

$$(2) \int \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t_r) \times \hat{r} dV}{rc} = \int \frac{K \cdot d\vec{e} \times \hat{r}}{rc}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} k t \int \frac{d\vec{e} \times \vec{r}}{r^2} \rightarrow \text{resultado similar}$$

a parte (a) cuando $\underline{kt = I}$ "

Solución problema 4



a) En sistema de ref. θ
Ley Gauss.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{en}}{\epsilon_0}, \quad Q_{en} = 0$$

$$E = 0$$

Ley de Ampere $\Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 I_{en}$

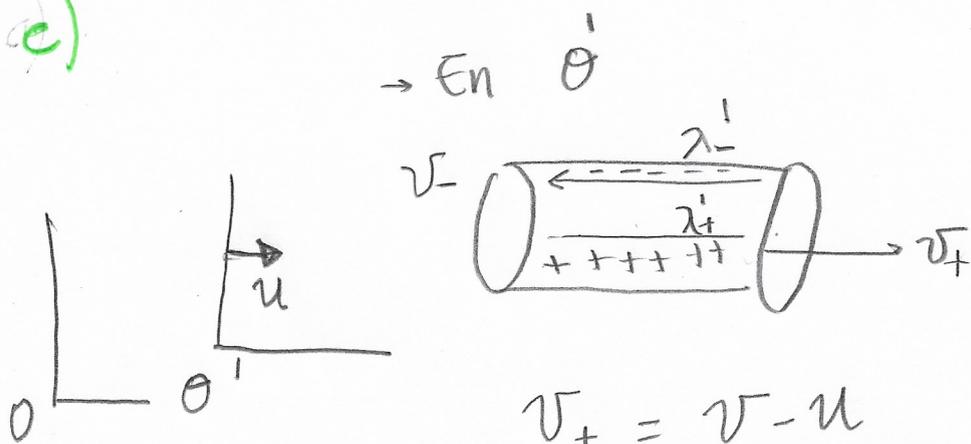
$$I_{en} = 2\lambda v$$

$$B \cdot \pi s = \mu_0 \cdot 2\lambda v \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 \lambda v}{\pi s} (-\hat{k})$$

$$b) \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) = q\vec{u} \times \vec{B}, \quad \vec{u} = u\hat{k}$$

$$\vec{F} = q u \cdot \frac{\mu_0 \lambda v}{\pi s} (\hat{j}) \quad "$$

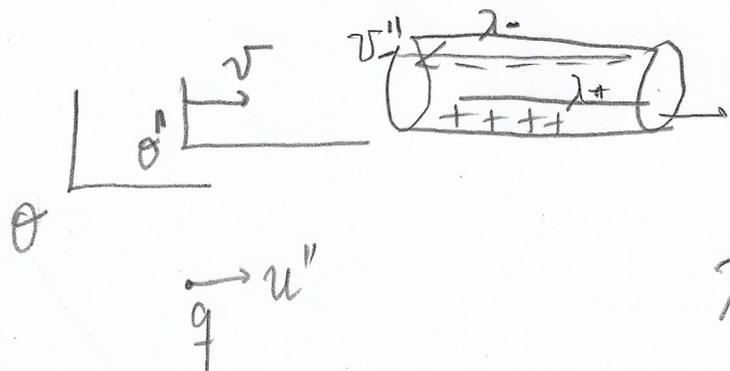
c)



$$v_+ = \frac{v_- - u}{1 - \frac{uv_-}{c^2}}$$

$$v_- = \frac{v_+ + u}{1 + \frac{uv_+}{c^2}}$$

Existe un sistema θ'' donde λ_+ no se mueve



$\lambda_+ = \lambda_0 \rightarrow$ sistema de referencia propio.

$$\lambda_0 = \frac{Q}{L_0}$$

$$\text{En } \theta' \rightarrow L' = \frac{L_0}{\gamma(v_+)} \Rightarrow \lambda' \text{ en } \theta' \Rightarrow \lambda' = \frac{Q}{L'}$$

$$\lambda'_+ = \frac{Q}{L_0 / \gamma(v_+)} = \boxed{\lambda_0 \gamma(v_+)}$$

$$\boxed{\lambda'_- = \lambda_0 \gamma(v_-)}$$

d) 2 opciones \rightarrow E con $\lambda_{total} = \lambda_+ + \lambda_-$

$\lambda_{total} = \lambda_0 (\gamma(v_+) - \gamma(v_-))$ θ transformando
campos eléctricos y magnéticos

$$\text{En } \theta \rightarrow E_x = E_y = E_z = 0$$

$$\vec{B}_x = B_y = 0, \quad B_z = \frac{\mu_0 \lambda v}{\pi S} (-\hat{z})$$

$$\text{En } \theta' \Rightarrow E_x' = E_x = 0$$

$$E_y' = \gamma(u) (E_y - u B_z)$$

$$E_y' = +\gamma(u) \cdot u \cdot \frac{\mu_0 v \lambda}{\pi S}$$

$$E_z' = 0$$

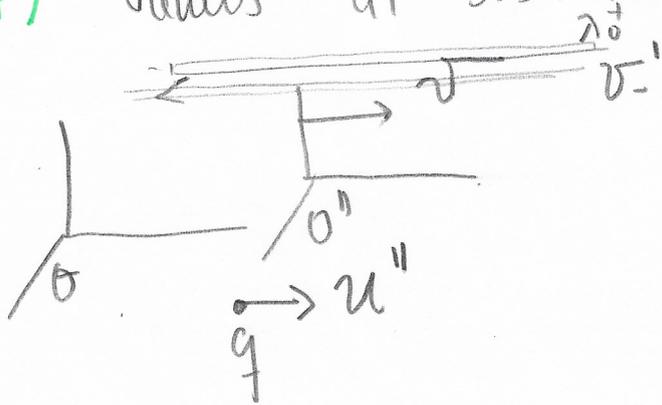
$$B_x' = B_x = 0$$

$$B_y' = \gamma(u) (B_y + \frac{v}{c^2} E_z) = 0$$

$$B_z' = -\gamma(u) \frac{\mu_0 v \lambda}{\pi S}$$

e). En θ' , $\vec{F}' = \gamma(u) \cdot q \cdot u \frac{\mu_0 v}{\pi S} (\hat{y})$

f) Vamos al sistema donde λ está en reposo



Vamos cómo se transforman

los campos de θ a θ''

$$E_x'' = 0, \quad E_z'' = 0$$

$$E_y'' = \gamma(v) \cdot (-v) \cdot \frac{\mu_0 \lambda_0 v}{\pi s}$$

$$= \gamma(v) \cdot v^2 \cdot \frac{\mu_0 \lambda_0}{\pi s}$$

$$B_x'' = 0$$

$$B_y'' = 0$$

$$B_z'' = -\gamma(v) \cdot \frac{\mu_0 \lambda_0 v}{\pi s}$$

$$\vec{F}'' = q (\vec{E}'' + \vec{u}'' \times \vec{B}'')$$

\vec{u}'' → Según adición de velocidades

$$\vec{u}'' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} \hat{i} \Rightarrow$$

$$\vec{F}'' = q \left(\gamma(v) v^2 \frac{\mu_0 \lambda_0}{\pi s} + \left(\frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} \right) \cdot \left(-\gamma(v) \cdot \frac{\mu_0 \lambda_0 v}{\pi s} \right) (\hat{i} \times (-\hat{k})) \right)$$

g) $E^2 - c^2 B^2 = \text{invariante}$

En θ tenemos: $E^2 = 0$

$$B^2 = \left(\frac{\mu_0 \lambda v}{\pi s} \right)^2 \Rightarrow E^2 - c^2 B^2 = \frac{\mu_0^2 \lambda^2 (c v)^2}{(\pi s)^2}$$

En $\theta^1 \Rightarrow E^2 = \left(\gamma(u) \cdot \frac{u v}{\pi s} \right)^2 = \frac{1}{1 - \frac{u^2}{c^2}} \cdot \frac{\mu_0^2 v^2 \lambda^2}{(\pi s)^2} \cdot \frac{u^2 v^2}{c^2}$

$$c^2 B^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)} \cdot \frac{\mu_0^2 v^2 \lambda^2}{(\pi s)^2} \cdot c^2$$

$$E^2 - c^2 B^2 = \frac{1}{1 - \frac{u^2}{c^2}} \cdot \frac{\lambda^2 \mu_0^2}{(\pi s)^2} (u^2 v^2 - c^2 v^2)$$

$$= \frac{c^2 \mu_0^2 \lambda^2}{(\pi s)^2} v^2 \frac{(u^2 - c^2)}{c^2} =$$

$$= -\frac{c^2 v^2 \mu_0^2 \lambda^2}{(\pi s)^2}$$

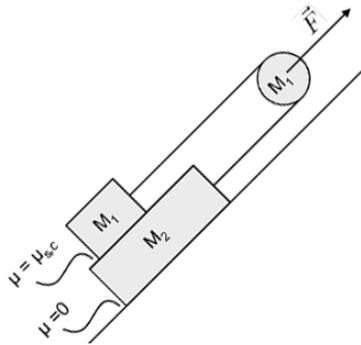
Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2020 - I

Mecánica clásica

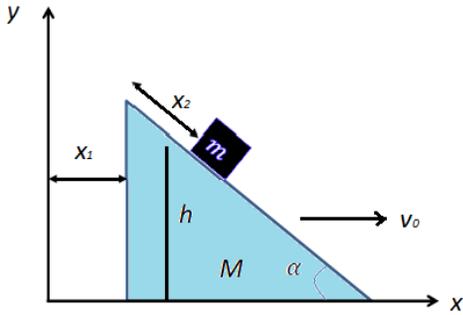
1. (20) Sea $U(r) = C \ln\left(\frac{r^2}{a^2+r^2}\right)$ el potencial de interacción entre dos masas.

- Encuentre el radio de una órbita circular en función del momento angular.
- Muestre que la órbita es estable.
- Identifique la energía límite entre órbitas confinadas y libres.

2. (20) En el sistema de la figura hay fricción entre M_1 y M_2 pero no entre M_2 y la tabla. La polea gris es móvil y no ideal, es un disco con masa m y radio $R=1$. Si el ángulo de inclinación es 45° , $M_1=m$, $M_2=2m$, $F=4mg$, ¿Existe algún valor de μ_s tal que las masas no deslizen una respecto a la otra? ¿Cuál es la aceleración lineal de la polea sobre la que se aplica la fuerza (en términos de m y μ_c) si el sistema se desliza? Ignore cambios de altura de la polea perpendicularmente a la rampa.



3. (30) Una masa m se desliza desde el reposo (relativo a la cuña) a una altura h sobre una cuña móvil de masa M con inclinación α , inicialmente con velocidad v_0 , como indica la figura.



a) Escriba explícitamente las ligaduras. Escriba explícitamente U y T en coordenadas cartesianas.

b) Obtenga el Lagrangiano

c) Encuentre las ecuaciones de movimiento.

4. (30) Tres masas m iguales se encuentran sobre un anillo de radio R , sin fricción ni gravedad. Las masas están conectadas por resortes idénticos de constante k .

a) Encuentre las frecuencias normales de oscilación.

b) Encuentre las coordenadas normales en términos de los desplazamientos.

c) Si las masas comienzan estacionarias y en equilibrio pero a una de ellas se le da un desplazamiento inicial δ respecto a la posición de equilibrio, encuentre la posición de las masas en función del tiempo.

Examen de Conocimientos – Mecánica clásica

1. (20) Sea $U_{(r)} = C \ln\left(\frac{r^2}{a^2+r^2}\right)$ el potencial de interacción entre dos masas.

- Encuentre el radio de una órbita circular en función del momento angular.
- Muestre que la órbita es estable.
- Identifique la energía límite entre órbitas confinadas y libres.

Solución:

a) En términos de la masa reducida $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$, el potencial efectivo es

$$U_{ef(r)} = \frac{l^2}{2\mu r^2} + C \ln\left(\frac{r^2}{a^2 + r^2}\right)$$

Donde l es el momento angular. Para una órbita circular la derivada del potencial efectivo debe ser 0, así que

$$\begin{aligned} \frac{dU_{ef(r)}}{dr} \Big|_{r_c} &= -\frac{l^2}{\mu r_c^3} + 2Cr \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2 + r^2} \right) \Big|_{r_c} = 0 \\ \Rightarrow \frac{l^2}{\mu r_c^2} &= \frac{2Ca^2}{(a^2 + r_c^2)} \\ \Rightarrow r_c^2 &= \frac{l^2 a^2}{2\mu C a^2 - l^2} \end{aligned}$$

b) Para r grande, el potencial efectivo es aproximadamente

$$U_{ef(r)} \approx \frac{1}{r^2} \left(\frac{l^2}{2\mu} - Ca^2 \right)$$

En los límites, $U_{ef(x \rightarrow 0)} = \infty$ y $U_{ef(x \rightarrow \infty)} = 0$, y como $r_c > 0$, $l < \sqrt{2\mu C a^2}$ así que el potencial es negativo para la órbita circular, la cual es entonces un mínimo así que es estable.

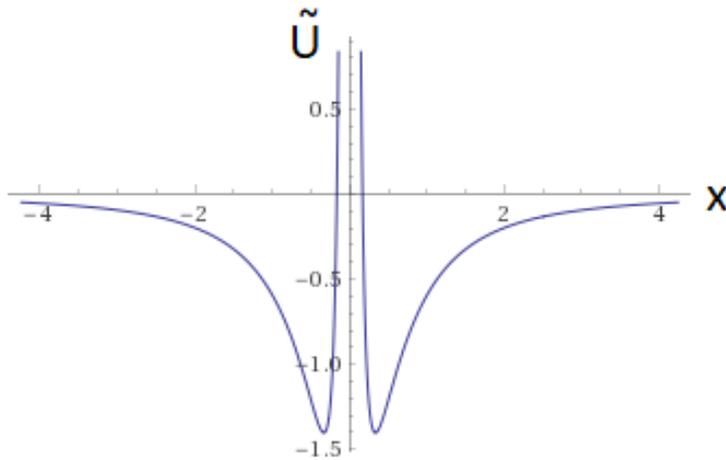
c) Podemos trabajar con un potencial normalizado: llamando $k \equiv \frac{l}{\sqrt{2\mu C a^2}}$ y $x \equiv \frac{r}{a}$

$$U_{ef(r)} = C \tilde{U}(x)$$

Donde

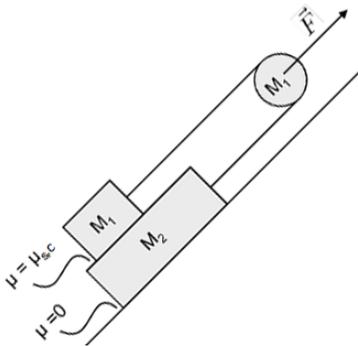
$$\tilde{U}(x) = k^2 x^{-2} - \ln(1 + x^{-2})$$

Gráficamente,



De donde se ve que las órbitas con $\tilde{U} < 0$ son confinadas.

2. (20) En el sistema de la figura hay fricción entre M_1 y M_2 pero no entre M_2 y la tabla. La polea gris es móvil y no ideal, es un disco con masa m y radio $R=1$. Si el ángulo de inclinación es 45° , $M_1=m$, $M_2=2m$, $F=4mg$, ¿Existe algún valor de μ_s tal que las masas no deslizen una respecto a la otra? ¿Cuál es la aceleración lineal de la polea sobre la que se aplica la fuerza (en términos de m y μ_c) si el sistema se desliza? Ignore cambios de altura de la polea perpendicularmente a la rampa.



Solución:

Las ecuaciones de movimiento son:

$$T_1 - f - M_1 g \sin \theta = M_1 a_1$$

$$T_2 + f - M_2 g \sin \theta = M_2 a_2$$

$$F - T_1 - T_2 = m a_3$$

$$R T_1 - R T_2 = I \alpha$$

Y las ecuaciones de ligadura son

$$(x_3 - x_1) + (x_3 - x_2) = L$$

$$v_2 - v_1 = v_T$$

De donde obtenemos derivando

$$2a_3 - a_1 - a_2 = 0$$

$$a_2 - a_1 = \alpha R$$

Usando $\theta = 45^\circ$, $M_1=m$, $M_2=2m$, $F= 4mg$, $I = \frac{1}{2}mR^2$ y $R=1$, estas se simplifican a

$$T_1 - f - mg\frac{1}{\sqrt{2}} = ma_1$$

$$T_2 + f - 2mg\frac{1}{\sqrt{2}} = 2ma_2$$

$$4mg - T_1 - T_2 = m\frac{1}{2}(a_2 + a_1)$$

$$T_1 - T_2 = \frac{1}{2}m(a_2 - a_1)$$

Estas cuatro ecuaciones tienen cinco incógnitas. Si las masas no deslizan, tenemos además que $a_1 = a_2$, con lo que se puede resolver el sistema. Si las masas deslizan, $f = \mu_c mg\frac{1}{\sqrt{2}}$ y de nuevo es sólo despejar.

Examen de Doctorado - Mecánica Cuántica, 2020-I
Universidad de los Andes, Departamento de Física Total points :
 100

I. (*Total Points:30*) Given is the Dirac equation

$$\left[\gamma^\mu \left(-i\hbar \partial_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right) - mc \right] \Psi = 0$$

with

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

where γ_0 and $\vec{\gamma}$ are 4×4 matrices with $\vec{\sigma}$ the Pauli matrices.

(a)(*7 points*) Find the Hamiltonian of the Schrödinger form of the Dirac equation, i.e., determine \hat{H} in $i\hbar \partial \Psi / \partial t = \hat{H} \Psi$.

(b)(*8 points*) Make the ansatz

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Phi \\ \chi \end{pmatrix} e^{-imc^2 t / \hbar} \quad (3)$$

and write the Dirac equation in form of two equations, one for Φ and another for χ . Assume that the term $2mc^2$ is bigger than any other term like, e.g., $i\hbar \partial \chi / \partial t$ and/or eA_0 (this is the non-relativistic limit).

Determine χ in terms of Φ .

Use this equation to find an equation for Φ in the form $i\hbar \partial \Phi / \partial t = \hat{H}_{NR} \Phi$. What is this equation?

(c)(*15 points*) The conserved Dirac current is

$$j^\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi = (\rho, (1/c) \vec{j})$$

with $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$ and $\rho = \Psi^\dagger \Psi$. Use the non-relativistic approximations in (b) to find the non-relativistic form of \vec{j} .

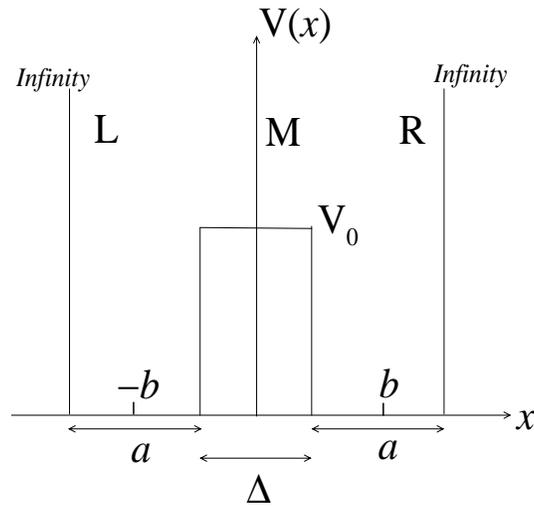
II. (*Total Points:30*) Classically the interaction of the electromagnetic field with matter is given by $j_\mu A_\mu \propto e \vec{p} \cdot \vec{A} / m$ in the gauge where $A_0 = 0$. As \vec{A}

we can take the photon plane wave $\vec{\epsilon}_{k\sigma} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ with $\sigma = 1, 2$. Effectively the interaction Hamiltonian becomes

$$\hat{H}_{int} = N \frac{e}{m} \hat{\vec{p}} \cdot \vec{\epsilon}_{k\sigma} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

with $\hat{\vec{p}} = -i\hbar\vec{\nabla}$ and N a normalization constant. Use Fermi's golden rule in lowest order in \hat{H}_{int} to calculate the transition probability per unit time of an excited atomic state $2S$ decaying into $1S$ and a photon. Since the photon has been taken care of by the plane wave, the final and initial states are given only by the atomic initial and final wave functions.

III. (*Total Points:20*) Given is the double well potential as shown in the figure below. With $\Delta \equiv 2b - a$ and the potential going to infinity at



$x = \pm(b + a/2)$. The right region (R) and the left region (L) where the potential is zero are given by

$$R = \{x \mid \Delta/2 \leq x < b + a/2\}$$

$$L = \{x \mid -\Delta/2 \geq x > -(b + a/2)\}$$

whereas the middle region where the potential is a constant V_0 is

$$M = \{x \mid -\Delta/2 \leq x \leq \Delta/2\}$$

(a)(10 points) Find solutions up to global constants for the three regions using the notation

$$k \equiv \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, K = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$$

with $V_0 > E$ and $E > 0$. For the middle region M, find two solutions and classify them according to

$$\Psi(-x) = \Psi(x) \quad \text{symmetric(S)}$$

$$\Psi(-x) = -\Psi(x) \quad \text{antisymmetric(A)}$$

Sketch the total wave function $\Psi(x)$.

Hint: The wave function should vanish at the infinite walls. In the middle region try the ansatz $e^{\pm Kx}$.

(b)(10 points) Write down the matching conditions for the wave function and its derivatives using $\tan(ka)$.

IV. (Total Points:20) The double well model in (III) can be used to study the ammonia molecule NH_3 which classically has two inequivalent configurations. In quantum mechanics these are the Ψ_S and Ψ_A states with energy E_S and E_A respectively. The localized states in space at $x = \pm b$ are $\Psi_R = (1/\sqrt{2})(\Psi_S + \Psi_A)$ and $\Psi_L = (1/\sqrt{2})(\Psi_S - \Psi_A)$. The non-zero potential V_0 in the middle allows tunneling and hence a transition $\Psi_L \leftrightarrow \Psi_R$. We can model the situation as a two level system

$$|\Psi_S\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\Psi_A\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\Psi_{R/L}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

with the Hamiltonian

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} E_0 - A & 0 \\ 0 & E_0 + A \end{pmatrix} \quad (5)$$

where E_S and E_A are parameterized by the constants E_0 and A .

(a)(10 points) It is convenient to introduce the so called position operator \hat{X} as

$$\hat{X} = b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Find the properly normalized eigenstates to \hat{X} and its corresponding eigenvalues. Let $|\Psi(t)\rangle$ be the solution of the Schrödinger equation with the Hamiltonian \hat{H}_0 . Find the probability to be in position b at time t and the expectation value of \hat{X} with respect to $|\Psi(t)\rangle$.

(b)(10 points) The interaction energy of a classical dipole, D , with an electric field \mathcal{E} is $W = -\mathcal{E}D$ where we assume that the dipole is parallel to the field. The ammonia molecule has such a dipole moment. In quantum mechanics one can replace D by

$$\hat{X} = d_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Write down the interaction Hamiltonian \hat{W} and add it to \hat{H}_0 to obtain the full Hamiltonian \hat{H} . Choose $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$. With the ansatz

$$|\Psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} \quad (8)$$

for the solution of the Schrödinger equation with \hat{H} find the differential equation for $a(t)$ and $b(t)$.

Solutions

①

$$1. a.) \quad \left[\gamma^\mu \left(-i\hbar \partial_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right) - mc \right] \psi = 0$$

$$\Rightarrow \gamma^0 \left[\left(-i\hbar \partial_0 - \frac{e}{c} A_0 \right) + \gamma^i \left(-i\hbar \partial_i - \frac{e}{c} A_i \right) - mc \right] \psi = 0$$

$$\partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\Rightarrow c \times \left[-i\hbar \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{e}{c} A_0 + \alpha^i \hat{\pi}_i - mc \right] \psi = 0$$

$$\boxed{\hat{\pi}_i \equiv \hat{p}_i - \frac{e}{c} A_i, \quad \hat{p}_i = -i\hbar \partial_i}$$

$$\Rightarrow \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \underbrace{[c \vec{\alpha} \cdot \hat{\pi} + e A_0 + \beta mc^2]}_{H} \psi \right]$$

$$b.) \quad \psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} e^{-imc^2 t / \hbar} \Rightarrow$$

$$(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - eA_0) \phi e^{i\dots} = c \vec{\sigma} \cdot \hat{\pi} \chi e^{i\dots}$$

$$+ \phi mc^2 e^{i\dots} \quad + \chi mc^2 e^{i\dots}$$

$$(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - eA_0 + 2mc^2) \chi = \vec{\sigma} \cdot \hat{\pi} \phi$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow E, \quad E - eA_0 \ll 2m c^2 \quad (2)$$

$$\Rightarrow 2m c^2 \chi = c \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \phi$$

$$\Rightarrow \boxed{\chi = \frac{1}{2m c} \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \phi}$$

Into the first equation:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi = eA_0 \phi + \frac{1}{2m} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \phi$$

From:

$$[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2}] = i \epsilon_{ijk} \frac{\sigma_k}{2}$$

$$2\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \epsilon_{ijk} \sigma_k}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) &= \sigma_i \sigma_j \hat{\pi}_i \hat{\pi}_j = \\ &= \delta_{ij} \hat{\pi}_i \hat{\pi}_j + i \epsilon_{ijk} \sigma_k \hat{\pi}_i \hat{\pi}_j \\ &= \frac{\Delta^2}{\hbar^2} + i \epsilon_{ijk} \sigma_k (\hat{p}_i - \frac{e}{c} A_i) (\hat{p}_j - \frac{e}{c} A_j) \\ &= \frac{\Delta^2}{\hbar^2} + i \epsilon_{ijk} \sigma_k \left[\hat{p}_i \hat{p}_j + \frac{e\hbar}{c} A_i A_j \right. \\ &\quad \left. - \frac{e}{c} (A_i \hat{p}_j + A_j \hat{p}_i) - \frac{e}{c} (\hat{p}_i \cdot A_j) \right] \end{aligned}$$

The first 3 terms are symmetric in (i, j) ,
 hence do not give a contribution \Rightarrow

(3)

$$\begin{aligned} \left(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \right)^2 &= -i \epsilon_{ijk} \sigma_k \frac{e}{c} (\hat{p}_i \cdot \vec{A}_j) \\ &= -\frac{e \hbar}{c} (\vec{\sigma} \times \vec{A}) = -\frac{e \hbar}{c} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \end{aligned}$$

and we obtain

$$\boxed{i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi = \left[\frac{\hat{\pi}^2}{2m} + e A_0 - \frac{e \hbar}{2m c} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \right] \phi}$$

Pauli equation as the non-relativistic limit of
 the Dirac equation

$$\begin{aligned} c_1) \quad \vec{j} &= c \psi^\dagger \vec{\gamma} \psi = c \psi^\dagger \vec{\alpha} \psi \\ &= c \left(\psi^\dagger \vec{\sigma} \chi + \chi^\dagger \vec{\sigma} \psi \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{(\vec{j}_k)_{NR}}{c} &= \frac{1}{2m c} \left[\psi^\dagger \sigma_k \sigma_i \hat{\pi}_i \psi + (\hat{\pi}_i^* \psi^\dagger) \overset{\sigma_i}{\sigma_i} \sigma_k \psi \right] \\ &= \frac{1}{2m c} \left[\psi^\dagger (\delta_{ki} + i \epsilon_{kij} \sigma_j) \hat{\pi}_i \psi \right. \\ &\quad \left. + (\hat{\pi}_i^* \psi^\dagger) (\delta_{ik} + i \epsilon_{ikj} \sigma_j) \psi \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2mc} \left[\psi^\dagger \hat{\pi}_k \psi + \psi^\dagger i \epsilon_{kij} \sigma_j \hat{\pi}_i \psi + (\hat{\pi}_k^* \psi^\dagger) \psi + (\hat{\pi}_i \psi^\dagger) i \epsilon_{ikj} \sigma_j \psi \right] \quad (4)$$

$$= \frac{1}{2mc} \left[\psi^\dagger \hat{p}_k \psi + (\hat{p}_k^* \psi^\dagger) \psi + \psi^\dagger \left(-\frac{e}{c} A_k\right) \psi + \psi^\dagger \left(-\frac{e}{c} A_k\right) \psi \right.$$

$$\left. + i \epsilon_{kij} \left(\psi^\dagger \sigma_j \left(\hat{p}_i - \frac{e}{c} A_i \right) - \left(\hat{p}_i^* - \frac{e}{c} A_i \right) \psi^\dagger \sigma_j \psi \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2mc} \left[\psi^\dagger (-i\hbar \partial_k) \psi + (i\hbar) (\partial_k \psi^\dagger) \psi - 2 \frac{e}{c} A_k \psi^\dagger \psi + i \epsilon_{kij} \left((-i\hbar) \psi^\dagger \sigma_j \partial_i \psi - (-i\hbar) (\partial_k \psi^\dagger) \sigma_j \psi \right) \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \bar{\mathcal{H}}_{NR} &= \frac{i\hbar}{2m} \left[(\vec{\partial} \psi^\dagger) \psi - \psi^\dagger \vec{\partial} \psi \right] \\ &\quad - \frac{e}{2mc} \vec{A} \psi^\dagger \psi + \frac{\hbar}{2m} \vec{\nabla} \times \psi^\dagger \vec{\nabla} \psi \end{aligned}}$$

Fermi's Golden Rule

Solution

$$\frac{dP}{dt} \propto |\langle f | H_{int} | i \rangle|^2 \delta(E_f - E_i)$$

$\psi_{1s}(r), \psi_{2s}(r)$ ← only r dependence

$$\psi_{1s}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}$$

$$\vec{\nabla} \psi_{1s} = \frac{\partial \psi_{1s}}{\partial r} \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{1}{a_0} \psi_{1s} \frac{\vec{r}}{r}$$

$$M = \langle 2s | \vec{\Sigma} \cdot \vec{p} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} | 1s \rangle = \quad \vec{\Sigma} \cdot \vec{k} = 0$$

$$= \int d^3x \psi_{2s}(r) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \vec{\Sigma} \cdot \vec{\nabla} \psi_{1s} =$$

$$= -\frac{1}{a_0} \int d^3x \psi_{2s}(r) \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{r}}{r} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \psi_{1s}(r)$$

$$= -\frac{1}{a_0} \int d^3x \frac{\psi_{2s}(r) \psi_{1s}(r)}{r} \vec{\Sigma} \cdot \vec{r} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

↑
 $k = k \hat{z}$

$$z = r \cos \theta$$

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

\Rightarrow

$$\langle 2s | \vec{\Sigma} \cdot \vec{p} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} | 2s \rangle =$$

$$= -\frac{1}{a} \int d^3x \frac{\psi_{2s}(r) \psi_{1s}(r)}{r} \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{r}}{r} e^{-ikr \cos \theta}$$

Since $\vec{k} = k \hat{e}_z$, $\vec{\Sigma} \cdot \vec{k} = 0 \Rightarrow \vec{\Sigma}$ in $x-y$

plane: $\vec{\Sigma} = \Sigma_x \hat{x} + \Sigma_y \hat{y}$

$$\Rightarrow \vec{\Sigma} \cdot \vec{r} = \Sigma_x x + \Sigma_y y = \Sigma_x r \sin \theta \cos \varphi + \Sigma_y r \sin \theta \sin \varphi$$

$$\langle 2s | \vec{\Sigma} \cdot \vec{p} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} | 1s \rangle =$$

$$= -\frac{1}{a} \int dr r^2 \int d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \quad \times$$

$$\times \frac{\psi_{2s}(r) \psi_{1s}(r)}{r^2} \left[\Sigma_x r \sin \theta \cos \varphi + \Sigma_y r \sin \theta \sin \varphi \right] e^{-ikr \cos \theta}$$

$$\text{but } \int_0^{2\pi} \cos \varphi = \int_0^{2\pi} \sin \varphi = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle 2s | \vec{\Sigma} \cdot \vec{p} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} | 1s \rangle = 0}$$

Solutions

(1)

2. a) in L and R the particle is free \Rightarrow solution \sin , however, at $x = \pm (b + a/2)$ the wave function ψ must vanish at these points \Rightarrow

$$\left\{ \begin{array}{l} L: \psi = \lambda \sin k (b + a/2 + x) \\ R: \psi = \lambda \sin k (b + a/2 - x) \end{array} \right.$$

A simple check reveals solutions:

$$\frac{d^2}{dx^2} \sin k(\dots) = -k^2 \sin k(\dots)$$

$$\Rightarrow E\psi = \left(\frac{2mE}{\hbar^2} \frac{\hbar^2}{2m} \psi \right) = E\psi \checkmark$$

For M: $e^{\pm Kx}$ will be solutions

$$\text{since } \frac{d^2}{dx^2} e^{\pm Kx} = K^2 e^{\pm Kx} \Rightarrow$$

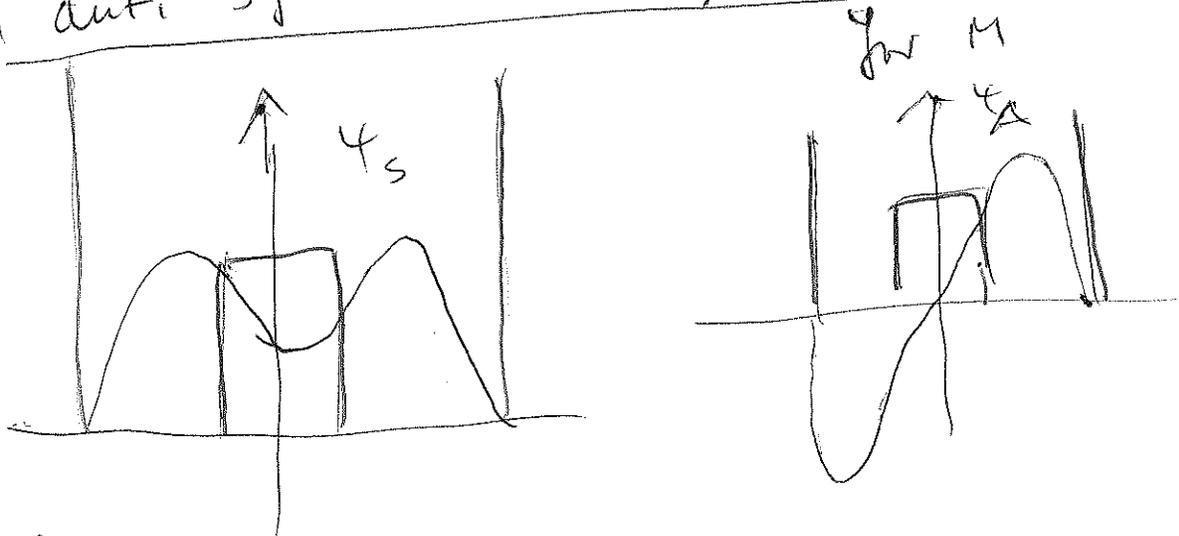
Therefore

$$\begin{aligned} E\psi &= \left(\frac{-2m(V_0 - E)}{\hbar^2} \frac{\hbar^2}{2m} + V_0 \right) \psi \\ &= E\psi \checkmark \end{aligned}$$

Classification according to symmetry

2.

Symmetric solution : $u = \mu \cosh Kx$
 anti-symmetric : $u = \mu \sinh Kx$



b.) Symmetric at L/n : $x = -(b-a/2)$

\rightarrow R/N : $x = (b-a/2)$

$$\lambda \sin k (b+a/2 - (b-a/2))$$

$$= \lambda \sin ka$$

$$= \mu \cosh K (b-a/2)$$

wave function

$$-\lambda k \cos ka = \frac{\mu}{\mu} K \sinh K (b-a/2)$$

derivative

$$\Rightarrow \boxed{\tan ka = -\frac{k}{K} \coth K (b-a/2)}$$

for L/M:

$$\lambda \sin k \left(b + \frac{a}{2} - (b - a/2) \right) = \lambda \sin ka$$

$$= \mu \cosh k (b - a/2) = \mu \cosh k (b - a/2)$$

$$\lambda k \cos ka = k \sinh (-k (b - a/2)) = -k \sinh k (b - a/2)$$

⇒ the same as for R/M.

Anti-symmetric: R/M

$$\lambda \sin ka = \mu \sinh k (b - a/2)$$

$$-\lambda k \cos ka = k \cosh k (b - a/2)$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan ka = -\frac{k}{a} \tanh k (b - a/2)}$$

We have $k \approx \sqrt{\frac{2\mu b}{\hbar^2}}$ $\gg k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$

⇒ $k_a \gg k_a$ and $k_b \gg k_b$

~~and~~ $2k_b \gg k_a$

⇒ $k \Delta \gg 1$

$$\tanh 2x = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}}$$

(4)

$$= \frac{e^{2x} (1 - e^{-4x})}{e^{2x} (1 + e^{-4x})} = \frac{1 - e^{-4x}}{1 + e^{-4x}}$$

$$= \frac{1 - e^{-4x}}{1 + e^{-4x}}$$

$$\tanh 2x = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}} = \frac{1 - e^{-4x}}{1 + e^{-4x}} \approx$$

$$\approx (1 - e^{-4x})(1 - e^{-4x}) = 1 + e^{-2x} - 2e^{-2x}$$

$$= 1 - e^{-2x}$$

$$\coth 2x = \frac{1}{\tanh 2x} = \frac{1}{1 - e^{-2x}} \approx 1 + e^{-2x}$$

⇒ the matching conditions are

$$\boxed{\tanh ka \approx -\frac{k}{ka} \left(1 \pm \frac{e^{-ks}}{a}\right)}$$

or $X = ka$

$$\boxed{\tan X \approx -\frac{X}{ka} (1 \pm e^{-ks})}$$

Solutions

①

$$2a.) \quad b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} |4_{R/L}\rangle =$$

$$b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix} =$$

$$= b \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \pm b \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

$$= \pm b |4_{R/L}\rangle, \quad (\hat{X} |4_{R/L}\rangle = \pm b |4_{R/L}\rangle)$$

$$\boxed{P(b)} = |\langle 4_R | 4(t) \rangle|^2$$

$$= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\langle 4_B | + \langle 4_A | \right) \left(\alpha_0 |4_S\rangle + \beta_0 |4_A\rangle \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2$$

$$= \frac{1}{4} \left| \alpha_0 + \beta_0 \right|^2 = \frac{1}{4} \left| e^{-iE_S t/\hbar} + e^{-iE_A t/\hbar} \right|^2$$

$$= \frac{1}{4} (1 + 1 + 2 \cos(E_S - E_A)t)$$

$$= \frac{1}{2} (1 + \cos 2\Delta t)$$

$$= \boxed{\cos^2 \Delta t}$$

$$\text{with } |4(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\alpha_0 |4_S\rangle + \beta_0 |4_L\rangle \right)$$

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= e^{-i(E-\Delta)t/\hbar} \\ \beta_0 &= e^{-i(E+\Delta)t/\hbar} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{\langle X \rangle}} &= \frac{1}{2} (\alpha_0^* \beta_0^*) b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} \\
 &= (\alpha_0^* \beta_0^*) b \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = b (\alpha_0^* \beta + \beta_0^* \alpha) \\
 &= \frac{2b}{2} \operatorname{Re} (\alpha_0^* b_0) = 2b \operatorname{Re} (e^{i(E_0 - A - A)t/\hbar}) \\
 &= \frac{2b}{2} \operatorname{Re} \left[e^{i(E_0 - A - A)t/\hbar} \right] \\
 &= b \cos 2At/\hbar
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 i\hbar \dot{a} &= (E_0 - A)a - \eta b \cos \omega t \\
 i\hbar \dot{b} &= (E + A)b - \eta a \cos \omega t
 \end{aligned}$$

$\eta = d_0 \epsilon_0$

c)

$$\begin{aligned}
 2i \dot{\alpha} &= -\omega_1 \beta (e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} + e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t}) \\
 2i \dot{\beta} &= -\omega_1 \alpha (e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} + e^{i(\omega_1 + \omega_2)t})
 \end{aligned}$$

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2020 - 1
Mecánica estadística

Instrucción

No se permite el uso de ningún documento, libro o apuntes, ni el uso de ningún dispositivo electrónico tales como celulares, reproductores de música, tabletas, etc.

Preguntas

1. (15 puntos) **Dewar**

- (7,5 puntos) Un recipiente cilíndrico de doble pared de radio r y altura h , contiene nitrógeno líquido, el cual se encuentra a una temperatura T_i . La temperatura exterior es T_e . Cada pared se comporta como un cuerpo negro. Calcule la potencia transmitida por radiación la cual evaporará el nitrógeno¹.
- (7,5 puntos) Si $T_i = 77K$, $T_e = 300K$, $r = 2cm$, $h = 4cm$, el calor latente de evaporación del nitrógeno es $198J/g$ y la densidad es $\rho = 0,8g/l$, ¿en cuánto tiempo se desocupará el contenedor?

2. (25 puntos) **Fluctuaciones de un oscilador** Una balanza de precisión consiste en un alambre de cuarzo de constante elástica c cuya elongación x por efecto de un peso, mg , es medida usando un microscopio. El límite de sensibilidad corresponde a una extensión de $1\mu m$ para una masa de $1\mu g$. La balanza está en equilibrio térmico con el ambiente, de tal manera que la posición de la masa al final del alambre fluctuá térmicamente una distancia y alrededor de la posición de equilibrio \bar{x} como función de m , g y c .

- (5 puntos) Escriba la ecuación de movimiento de la masa atada a la balanza y compruebe que un cambio de variable apropiado es $y = x - \bar{x}$.
- (10 puntos) Calcule el ensamblaje canónico clásico, a temperatura T , para hallar $\sqrt{\langle y^2 \rangle}$
- (10 puntos) Ahora calcule $\langle y^2 \rangle$ desde el punto de vista de un oscilador armónico cuántico. Tome el límite cuando $\hbar \rightarrow 0$ y compare su resultado con el cálculo clásico.

3. (30 puntos) **Densidad de neutrinos en el universo** Las teorías cosmológicas actuales predicen que el universo no solo contiene densidad de radiación uniforme en equilibrio térmico a $2,7K$ sino también una distribución en equilibrio de neutrinos a la misma temperatura.

Los neutrinos son partículas de espín $1/2$, por lo tanto fermiones, con la particularidad que su espín es siempre paralelo (y no antiparalelo) a su momento \vec{p} . Al ser partículas de masa cero como los fotones, la energía es igual a $c|\vec{p}|$. Neutrinos encerrados en un volumen Ω pueden ser creados o destruidos en las paredes por lo que su número no es fijo. Con esta información calcule:

- (15 puntos) El número promedio de neutrinos por cm^3 .

¹ $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$

- (15 puntos) Su energía promedio.
Integrales que pueden ser útiles²:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{1 + e^x} = \frac{3}{2} \zeta(3) = 1,803$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{1 + e^x} = \frac{7\pi^4}{120} = 5,671$$

4. (30 puntos) **Campo crítico en un superconductor** Considere un cilindro sólido de volumen V hecho de un material superconductor (tipo I) en un campo magnético paralelo al eje del cilindro.

- Usando el hecho de que en el estado superconductor, el material se comporta como un diamagneto perfecto, mientras que en el estado normal la susceptibilidad magnética es despreciable:
 - Escriba la magnetización en términos del campo interno B y el campo externo H . En el estado superconductor $B = 0$ dentro del volumen V .
 - Escriba la expresión para la energía libre en estado normal y el estado superconductor en función del campo crítico H_c .
 - Muestre que la discontinuidad de la entropía en la transición de fase a campo cero es:

$$S_n - S_s = -\frac{V}{4\pi} H_c \frac{\partial H_c}{\partial \tau}$$

Donde $H_c(\tau)$ es el campo crítico para suprimir la superconductividad a temperatura τ .

- ¿Cuál es el calor latente cuando la transición ocurre en presencia de campo?
- Cuantifique la discontinuidad en el calor específico a campo cero.

² $k = 1,38 \times 10^{-23} \frac{m^2 kg}{s^2 K}$, $h = 6,62 \times 10^{-34} \frac{m^2 kg}{s}$ y $c = 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2020 - 1
Mecánica estadística

Solución

1. Dewar

- La potencia total de radiación que recibe el nitrógeno líquido para paredes que se comportan como cuerpos negros perfectos (emisividad igual a 1) es:

$$P_{tot} = P_e - P_i = \sigma A \epsilon (T_e^4 - T_i^4) \\ = \sigma 2\pi r h (T_e^4 - T_i^4) = 2,3W$$

▪

$$Q = mL = 7920J \\ \Delta t = 57,4 \text{ minutos}$$

2. Fluctuaciones de un oscilador

- La ecuación de movimiento es $m\ddot{x} = mg - cx$ y en equilibrio $mg = c\bar{x}$, por lo tanto al hacer el cambio de variable $y = x - \bar{x}$ obtenemos la ecuación $m\ddot{y} = -cy$ la cual representa la oscilación (por efectos de fluctuaciones térmicas) a estudiar.
- A partir de la ecuación obtenida en el punto anterior, escribimos el Hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} cy^2$$

y calculamos $\langle y^2 \rangle$ como

$$\langle y^2 \rangle = \frac{\int dp dy y^2 e^{-\beta(\frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} cy^2)}}{\int dp dy e^{-\beta(\frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} cy^2)}} \\ = \frac{-2}{\beta} \frac{\partial}{\partial c} \ln Z$$

con

$$Z = \int dp dy e^{-\beta(\frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} cy^2)}$$

Sin necesidad de hacer toda la integral, es posible ver que $Z = \frac{\text{constante}}{\sqrt{c}}$

Y con el resultado obtenido previamente, llegamos a que $\langle y^2 \rangle = \frac{1}{\beta c}$. Recuerde que $\Delta y = \sqrt{\langle y^2 \rangle}$.

- Cuánticamente: $Z = \sum_0^{\infty} e^{-\beta(n+1/2)\hbar\omega}$ con $c = m\omega^2$.

$$\begin{aligned} Z &= \frac{e^{-\beta\hbar\omega/2}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega/2}} \\ &= \frac{2}{\sinh(\beta\hbar/2)} \end{aligned}$$

De los resultados de la parte anterior tenemos que:

$$\begin{aligned} \langle y^2 \rangle &= \frac{2}{\beta} \frac{\partial}{\partial c} \ln \sinh \left(\frac{\beta\hbar}{2} \sqrt{\frac{c}{m}} \right) \\ &= \frac{\hbar}{2\sqrt{mc}} \coth \left(\frac{\beta\hbar}{2} \sqrt{\frac{c}{m}} \right) \end{aligned}$$

En el límite $\hbar \rightarrow 0$, $\coth x \simeq \frac{1}{x}$ y se recupera el cálculo clásico.

3. Densidad de neutrinos en el universo

- Debido a que el número de neutrinos en el volumen Ω no es fijo, el potencial químico es cero. El factor de Fermi queda entonces:

$$f = \frac{1}{1 + e^{\beta\epsilon}}$$

La densidad de neutrinos con momento \vec{p} es:

$$D(p)dp = \frac{\Omega}{h^3} 4\pi p^2 dp$$

Note la ausencia del factor 2, ya que en este caso solo tenemos una orientación de espín. La densidad de estados de energía queda entonces:

$$D(\epsilon)dp = \frac{\Omega}{h^3 c^3} 4\pi \epsilon^2 d\epsilon$$

El número promedio de neutrinos a temperatura T , es:

$$\begin{aligned} \langle N \rangle &= \int_0^{\infty} f(\epsilon) D(\epsilon) d\epsilon \\ &= \frac{4\pi\Omega}{h^3 c^3} \int_0^{\infty} \frac{\epsilon^2 d\epsilon}{1 + e^{\beta\epsilon}} \\ &= \frac{4\pi\Omega}{h^3 c^3} \left(\frac{1}{\beta^3} \right) \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{1 + e^x} \end{aligned}$$

Haciendo los cálculos numéricos:

$$\frac{\langle N \rangle}{\Omega} = 7,6 \times 10^6 T^3 (m^{-3})$$

- Para la energía promedio

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \int_0^\infty f(\epsilon) \epsilon D(\epsilon) d\epsilon \\ &= \frac{4\pi\Omega}{h^3 c^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^3 d\epsilon}{1 + e^{\beta\epsilon}} \\ &= \frac{4\pi\Omega}{h^3 c^3} \left(\frac{1}{\beta^4} \right) \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{1 + e^x} \end{aligned}$$

Numéricamente:

$$\begin{aligned} \frac{\langle E \rangle}{\Omega} &= \frac{7\pi^5}{30} \frac{(kT)^4}{(hc)^3} \\ &= 3,3 \times 10^{-16} T^4 (J/m^3) \end{aligned}$$

4. Campo crítico en un superconductor

- La magnetización es: $\mathbf{M} = \frac{\mathbf{B} - \mathbf{H}}{4\pi}$. En un superconductor tipo I el campo \mathbf{B} dentro del material es cero.

Por lo tanto: $\mathbf{M} = \frac{-\mathbf{H}}{4\pi}$.

El cambio en energía libre debido al cambio en el campo externo es:

$$\delta F = -V \cdot \mathbf{M} \cdot d\mathbf{H} = \frac{V}{4\pi} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{H}$$

Utilizando este resultado se puede calcular la energía libre del estado superconductor como:

$$\begin{aligned} F_s(H) &= F_s(0) + \int_0^H dF \\ &= F_s(0) + \frac{V}{4\pi} \int_0^H H \cdot dH \\ &= F_s(0) + \frac{V}{8\pi} H^2 \end{aligned}$$

La transición al estado normal ocurre cuando la energía libre del estado superconductor iguala a la del estado normal:

$$\begin{aligned} F_s(H_c) &= F_s(0) + \frac{V}{8\pi} H_c^2 \\ &= F_n(H_c) = F_n(0) \end{aligned}$$

Entonces a campo cero: $F_n(0) - F_s(0) = \frac{V}{8\pi} H_c^2$. la discontinuidad en la entropía en la transición de fase se calcula como:

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial \tau} \right)_{H,V}$$

$$S_n - S_s = - \frac{V}{4\pi} H_c \frac{\partial H_c}{\partial \tau}$$

- El calor latente en la transición es:

$$q = \tau(S_n - S_s)$$

$$= - \frac{V\tau}{4\pi} H_c \frac{\partial H_c}{\partial \tau}$$

- El calor específico es:

$$C = \tau \left(\frac{\partial S}{\partial \tau} \right)$$

$$c_n - c_s = \frac{\tau}{4\pi} \left[\left(\frac{\partial H_c}{\partial \tau} \right)^2 + H_c \left(\frac{\partial^2 H_c}{\partial \tau^2} \right) \right]$$

Como la transición es de segundo orden a campo cero $H_c(\tau_c) = 0$. Por lo tanto:

$$c_n - c_s = \frac{\tau}{4\pi} \left(\frac{\partial H_c}{\partial \tau} \right)^2$$

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2020 - 1
Mecánica estadística

FORMULAS GENERALES

1. Funciones de estado y relaciones de Maxwell

Energía interna:	U	$dU = TdS - pdV$
Entalpía:	$H = U + pV$	$dH = TdS + Vdp$
Energía libre:	$F = U - TS$	$dF = -SdT - pdV$
Entalpía libre de Gibbs :	$G = H - TS$	$dG = -SdT + Vdp$

$$TVS = -pSV, \quad TpS = VSp, \quad pTV = SVT, \quad VTp = -SpT$$

$$TdS = C_V dT + T_p TV dV \quad \text{y} \quad TdS = C_p dT - TVT p dp$$

2. Para un gas ideal:

$$S_m = C_V \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + R \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) + S_{m0} \quad \text{y} \quad S_m = C_p \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - R \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) + S'_{m0}$$

3. Ecuaciones de Helmholtz:

$$UVT = TpTV - p, \quad HpT = V - TVTp$$

para una superficie muy grande: $W_{\text{rev}} = -\gamma dA$, en donde la tensión superficial es γ

$$\gamma = UAS = FAT$$

4. Valores esperados en términos de la función de partición.

$$E = -\frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta}, \quad p = kT \frac{\partial \ln(Z)}{\partial V}, \quad S = k \ln(Z) - k\beta \frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta}, \quad C_V = k\beta^2 \frac{\partial^2 \ln(Z)}{\partial \beta^2}$$

$$F = -kT \ln(Z), \quad \alpha = \frac{\partial \ln(Z)}{\partial N}, \quad \mu_j = -kT \frac{\partial \ln(Z)}{\partial N_j}$$