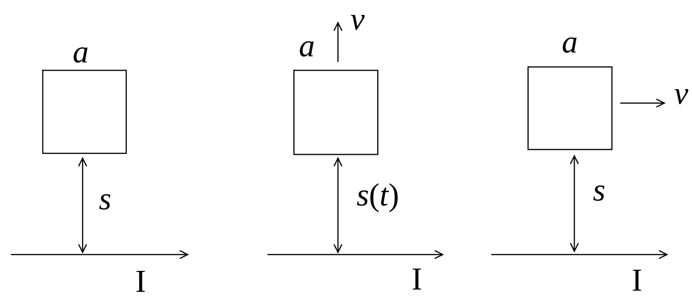
Ph. D. Qualifiers Exam, Electrodynamics (2019-II)
Total marks 100

I(15 marks)
A square loop of wire (length of each side "a") lies on a table, a distance s from a very long straight wire, which carries a steady current I, as shown in the figure.
(a) Find the flux of the magnetic field B through the loop.
(b) If someone now pulls the loop directly away from the wire, at speed v, what emf $\mathcal{E}$ is generated?
(c) What if the loop is pulled to the right at speed v, instead of away? what is then $\mathcal{E}$?
Hint: The magnitude of the magnetic field at a perpendicular distance r from a current carrying wire is given as $B = \mu_0 I/(2\pi r)$.



II(25 marks)
The potential on the surface of a hollow sphere of radius R is given as $V_0(\theta)$.
(i) Find an expression for the potential outside the sphere.
(ii) Suppose that the potential is constant over the surface of the sphere. Use the result you got in (i) to find the potential outside now.
The general solution for the potential is given as,

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right)P_l(Cos\,\theta)$$

Legendre Polynomials: $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = (1/2)(3x^2 - 1)$

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)\ P_m(x)\ dx\ =\ \frac{2}{2m+1}\quad if\ l = m$$
$$= 0 \quad if\ l \neq m$$

III(30 marks)
(i) A particle carrying charge q falls freely with a constant acceleration g. What is the power radiated and the radiation reaction force?
(ii) If the particle performs simple harmonic motion, say $\vec{r} = A\cos(\omega t)\hat{z}$, calculate the power emitted, P_{rad}?
Is the power corresponding to the radiation reaction force the same as the power P_{rad}? Are these two powers the same, if we take the time averaged values over a full cycle?
Hint: The Larmor formula for power radiated by a particle of charge q and acceleration a is $P_{rad} = \mu_0 q^2 a^2/(6\pi c)$ and for the radiation reaction force is $\vec{F}_{rad} = \mu_0 q^2 \dot{\vec{a}}/(6\pi c)$.

IV(30 marks)
Given the Lagrangian density

$$\mathcal{L} = -\frac{\epsilon_0}{2}\,(\partial_\nu A^\mu)(\partial^\nu A_\mu)$$

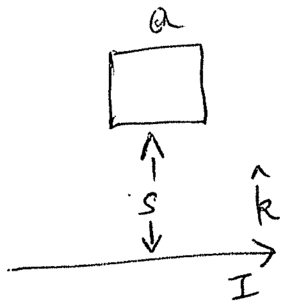
where A_μ is the covariant four-potential, use the Euler - Lagrange equation

$$\partial_\alpha\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\mu)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = 0$$

to obtain a homogeneous wave equation for the four-potential.

Solution

1\.



a) $\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{a}$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi}$$

$$\Phi = \int_0^a \int_s^{a+s} \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \, ds \, dz$$

$$= \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \int_s^{a+s} \frac{1}{s} \, ds = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left(\frac{s+a}{s}\right)$$

(b) $$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \frac{d}{dt} \ln\left(\frac{s(t)+a}{s(t)}\right)$$

$$= -\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \frac{d}{dt} \ln\left[1 + \frac{a}{s(t)}\right]$$

with $v = \dfrac{ds}{dt}$ $$\mathcal{E} = -\frac{\mu_0 I a^2 v}{2\pi s(s+a)}$$

(c) Φ is constant $\mathcal{E} = 0$.

2\. $$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right) P_l(\cos\theta)$$

A_l's $\to 0$ for $l \neq 0$.

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta)$$

$$V(R,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (B_l / R^{l+1}) P_l(\cos\theta) = V_0(\theta) \quad \text{— (1)}$$

Multiplying ① by $P_\ell(\cos\theta)\sin\theta$ and integrating

(i) $$\frac{B_\ell}{R^{\ell+1}} \frac{2}{2\ell+1} = \int_0^\pi V_0(\theta)\, P_\ell(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta$$

$$B_\ell = \left(\frac{2\ell+1}{2} R^{\ell+1}\right)\int_0^\pi V_0(\theta)\, P_\ell(\cos\theta)\, d(\cos\theta)$$

(ii) when $V_0(\theta) = V_0$ = constant

$$B_\ell = \left(\frac{2\ell+1}{2} R^{\ell+1}\right) V_0 \int_0^\pi P_0(\cos\theta)\, P_\ell(\cos\theta)\, d(\cos\theta)$$

(since $P_0(\cos\theta) = 1$). The above implies that only $\ell = 0$ survives and

$$B_0 = V_0 R$$

For the potential outside, i.e., $r > R$

$$V(r,\theta) = \frac{B_0}{r} = \frac{R V_0}{r}$$

3. (i) For a particle in free fall, $\vec{r}(t) = \frac{1}{2} g t^2 \hat{y}$ say.

$$\vec{v} = g t \hat{y} \Rightarrow \vec{a} = g \hat{y} \Rightarrow \vec{F}_{rad} = 0$$

Hence the power from the radiation reaction force is $\vec{F}_{rad} \cdot \vec{v} = 0$

However, there is radiation emitted and is given by, $P_{rad} = \frac{\mu_0 q^2 g^2}{6\pi c}$

(ii) With $\vec{r}(t) = A \cos(\omega t) \hat{z}$

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}} = - A \omega \sin(\omega t) \hat{z}$$

$$\vec{a} = - A \omega^2 \cos(\omega t) \hat{z} = - \omega^2 \vec{r}$$

$$\dot{\vec{a}} = - \omega^2 \dot{\vec{r}} \quad \text{or} \quad - \omega^2 \vec{v}$$

$$\vec{F}_{rad} = - \frac{\mu_0 q^2 \omega^2 \vec{v}}{6\pi c} \qquad \left| \vec{F}_{rad} \cdot \vec{v} \right| = \frac{\mu_0 q^2 \omega^2 v^2}{6\pi c} = P_1$$

The Larmor formula for radiation

$$P_2 = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c} = \frac{\mu_0 q^2 A^2 \omega^4 \cos^2(\omega t)}{6\pi c}$$

$$P_1 \neq P_2 \quad \text{since } P_1 = \frac{\mu_0 q^2 \omega^4 A^2 \sin^2(\omega t)}{6\pi c}$$

Taking the time average over a full cycle

$$P_1 = P_2 .$$

4. $$\partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\mu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = 0$$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = 0$ since $\mathcal{L} = -\frac{\epsilon_0}{2} \partial_\nu A^\mu \partial^\nu A_\mu$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\mu)} = -\frac{\epsilon_0}{2} \left[\partial_\nu A^\mu \frac{\partial(\partial^\nu A_\mu)}{\partial(\partial_\alpha A_\mu)} + \partial^\nu A_\mu \frac{\partial(\partial_\nu A^\mu)}{\partial(\partial_\alpha A_\mu)} \right]$$

$$= -\frac{\epsilon_0}{2} \left[\partial_\nu A^\mu \frac{\partial(g^{\nu\gamma} \partial_\gamma A_\mu)}{\partial(\partial_\alpha A_\mu)} + \partial^\nu A_\mu \frac{\partial(\partial_\nu g^{\mu\beta} A_\beta)}{\partial(\partial_\alpha A_\mu)} \right]$$

$$= -\frac{\epsilon_0}{2} \left[\partial_\nu A^\mu g^{\nu\gamma} \delta_\gamma{}^\alpha + \partial^\nu A_\mu g^{\mu\beta} \delta_\nu{}^\alpha \delta_\beta{}^\mu \right]$$

$$= -\frac{\epsilon_0}{2} \left[\partial^\alpha A^\mu + \partial^\alpha A^\mu \right] = -\frac{\epsilon_0}{2} (2 \partial^\alpha A^\mu)$$

$\Rightarrow$ the equation is

$$\partial_\alpha (\partial^\alpha A^\mu) = 0.$$

PROGRAMA DE DOCTORADO EN FÍSICA

EXAMEN DE CONOCIMIENTOS 201910:

MECÁNICA

NOMBRE(IMPRENTA)________________________________ CÓDIGO:________________ NOTA:____________/100

1. (20 puntos) Formule una teoría de gravitación no-relativista, tipo Newton, para un universo bidimensional, en el que naturalmente asumimos que se cumple la ley de Gauss en esa dimensionalidad: proporcionar la ley de la fuerza entre dos partículas de masas m_1 y m_2 separadas una distancia r, y el potencial de una partícula de masa m. Es de esperarse que la constante de gravitación cambie y su nuevo valor lo denotamos por G'.

2. (20 puntos) Una partícula de masa M choca elásticamente con otra partícula estacionaria de masa m menor que M. Encuentre el rango de valores de los ángulos de desviación o dispersión de la masa M, respecto a su dirección inicial de movimiento, debido a este choque en el sistema de laboratorio.

3. (30 puntos) Un alambre liso tiene forma de hélice dada, en coordenadas cilíndricas ρ, θ y z, por $z = a\theta$ y $\rho = b$, con a y b constantes, y con extensión L a lo largo de su eje, el eje z, con $-L/2 < z < L/2$. Sobre una cuenta de masa m, que desliza libremente a lo largo del alambre-resorte, actúa un campo de fuerzas centrales atractivas, que apuntan al origen del sistema coordenado ($\rho = 0$, $\theta = 0$, $z = 0$), y de magnitud directamente proporcional a la distancia r de la cuenta al origen con constante de proporcionalidad k. (a) ¿Cuántas coordenadas generalizadas (propias) tenemos en el sistema? (b) Halle el lagrangiano y (c) el hamiltoniano del sistema. (d) Encuentre las ecuaciones de movimiento a partir de los resultados en (b) y en (c). (e) Determine el movimiento de la cuenta en el alambre, con condiciones iniciales $\theta = 0$ ($z = 0$). (f) Según las teorías lagrangianas y hamiltonianas, ¿qué cantidades físicas se conservan?

4. (30 puntos) Para un cuerpo rígido, con momentos de inercia principales I_1, I_2 e I_3, demuestre, usando las ecuaciones de Euler, que el momento angular $\mathbf{L}$ y la energía cinética rotacional T se conservan en un movimiento libre de torques.

SOLUCIÓN:

PROGRAMA DE DOCTORADO EN FÍSICA

EXAMEN DE CONOCIMIENTOS: 201910

MECÁNICA

NOMBRE(IMPRENTA) Solución CÓDIGO: 201910 NOTA:________/100

1. (20 puntos) Formule una teoría de gravitación no-relativista, tipo Newton, para un universo bidimensional, en el que naturalmente asumimos que se cumple la ley de Gauss en esa dimensionalidad: proporcionar la ley de la fuerza entre dos partículas de masas m_1 y m_2 separadas una distancia r, y el potencial de una partícula de masa m. Es de esperarse que la constante de gravitación cambie y su nuevo valor lo denotamos por G'.

2. (20 puntos) Una partícula de masa M choca elásticamente con otra partícula estacionaria de masa m menor que M. Encuentre el rango de valores de los ángulos de desviación o dispersión de la masa M, respecto a su dirección inicial de movimiento, debido a este choque en el sistema de laboratorio.

3. (30 puntos) Un alambre liso tiene forma de hélice dada, en coordenadas cilíndricas ρ, θ y z, por $z = a\theta$ y $\rho = b$, con a y b constantes, y con extensión L a lo largo de su eje, el eje z, con $-L/2 < z < L/2$. Sobre una cuenta de masa m, que desliza libremente a lo largo del alambre-resorte, actúa un campo de fuerzas centrales atractivas, que apuntan al origen del sistema coordenado (ρ = 0, θ = 0, z = 0), y de magnitud directamente proporcional a la distancia r de la cuenta al origen con constante de proporcionalidad k. (a) ¿Cuántas coordenadas generalizadas (propias) tenemos en el sistema? (b) Halle el lagrangiano y (c) el hamiltoniano del sistema. (d) Encuentre las ecuaciones de movimiento a partir de los resultados en (b) y en (c). (e) Determine el movimiento de la cuenta en el alambre, con condiciones iniciales θ = 0 (z = 0). (f) Según las teorías lagrangianas y hamiltonianas, ¿qué cantidades físicas se conservan?

4. (30 puntos) Para un cuerpo rígido, con momentos de inercia principales I_1, I_2 e I_3, demuestre, usando las ecuaciones de Euler, que el momento angular **L** y la energía cinética rotacional T se conservan en un movimiento libre de torques.

SOLUCIÓN:

1. En 3 dimensiones la ley de Newton de gravitación es: $\vec F = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat r$

fuerza que m_1 ejerce sobre m_2: $m_1 \xrightarrow{\hat r} \overset{\vec F}{\longleftarrow} \xrightarrow{\hat r} m_2$

Y el campo gravitacional $\vec g$ debido a m_1, $\vec g = -G\frac{m_1}{r^2}\hat r$, donde $\vec F = m_2\vec g$, satisface

la ley de Gauss: $\oint_S \vec g\cdot d\vec s = -4\pi G m_1$, $d\vec s = \hat r\, ds$ (análogo al caso electrostático)

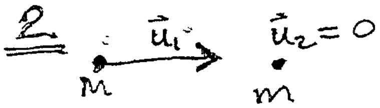
Por simetría esférica integramos sobre una esfera de radio r centrada en m_1:

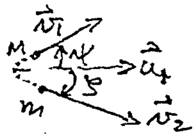
$$g\oint_S ds = 4\pi r^2 g = -4\pi G m_1 \Rightarrow g = -G\frac{m_1}{r^2} \Rightarrow \vec g = -G\frac{m_1}{r^2}\hat r$$

Luego en 2-dimensiones la ley de Gauss sería: $\oint_C \vec g\cdot \underbrace{dl}_{dl = \text{elemento de "superficie" en 2-dim.}}\hat r = -2\pi G' m_1 \Rightarrow g\oint_C dl = 2\pi r g = -2\pi G' m_1$

$\Rightarrow \vec g = -G'\frac{m_1}{r}\hat r \Rightarrow \boxed{\vec F = -G'\frac{m_1 m_2}{r}\hat r.}$ $\quad \vec g = -\vec\nabla\varphi(r) = -\hat r\frac{d\varphi(r)}{dr} = -G'\frac{m_1}{r}\hat r$

$\rightarrow \boxed{\varphi(r) = +G' m_1 \ln\frac{r}{r_0}}$ r_0: constante de integración, donde escogemos $\varphi = 0 = \varphi(r_0)$.





2. ψ: ángulo de dispersión
$\vec{u}_{1,2} = \vec{u}_{M,m}$ Velocidades iniciales en el Lab ($\equiv L$)
$\vec{v}_{1,2} = \vec{v}_{M,m}$ Velocidades finales en L
Nos piden $\psi_{min} < \psi < \psi_{max}$

Intuitivamente: $\psi_{min} = 0$. Si $m \to M^{(-)} \Rightarrow \psi_{max} \to \frac{\pi}{2}^{(-)}$ (Choque cuasi frontal: $\psi + \xi \to \frac{\pi}{2}^{(-)}$ con $\xi \to 0^{(+)}$ y $v_1 \to 0$, $m\vec{v}_2 \simeq M\vec{u}_1$). Luego esperamos que $\psi_{max} < \frac{\pi}{2}$ para toda $M > m$. Si $M >>> m$: $\psi_{max} \to 0$. Esperaríamos: $\psi_{max} = \psi_{max}\left(\frac{m}{M}\right)$. Lo más sencillo: $0 \le \psi < \operatorname{Sen}^{-1}\left(\frac{m}{M}\right)$ que satisface todo.

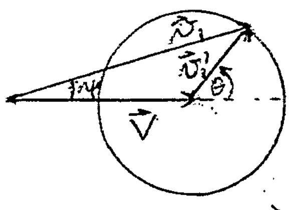
Ahora debemos calcular y confrontar: Conviene ver lo que ocurre en el c.m. ($\equiv C$): $\vec{u}_1' = \vec{u}_{M,m}'$ velocidades iniciales en C. $\vec{v}_{1,2}' = \vec{v}_{M,m}'$ velocidades finales en C.

La ecuación de velocidades relativas (transformación galileana de velocidades) es
$\vec{v}_{ML} = \vec{v}_{MC} + \vec{v}_{CL}$ (1) $\Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{V}_C \equiv \vec{v}_1' + \vec{V}$ (2). $\vec{V} = \dfrac{M\vec{u}_1 + m\vec{u}_2}{M+m} = \dfrac{M}{M+m}\vec{u}_1$ (3)

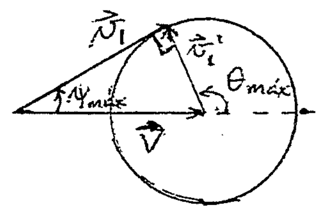
$\Rightarrow u_1 > V$. Por definición: $u_1' = u_1 - V$ (4)

Por conservación del momento $\vec{P}_{total}$ y de la energía cinética total T:
$u_1' = v_1' \overset{(4)}{\Longrightarrow} v_1' = u_1 - V \overset{(3)}{=} \dfrac{M+m}{M}V - V = \dfrac{m}{M}V \Rightarrow \dfrac{V}{v_1'} = \dfrac{M}{m}$ (5) $\Rightarrow V > v_1'$ (6)

Los resultados (2) y (6) nos llevan a la gráfica:



θ: ángulo de dispersión de M en C (c.m.)
y según esta gráfica, cuando $\psi = \psi_{máx}$ ($\theta = \theta_{máx}$) la gráfica es: $\longrightarrow$



y de esta última gráfica: $\operatorname{Sen}\psi_{máx} = \dfrac{v_1'}{V} \overset{(5)}{=} \dfrac{m}{M} \Rightarrow \psi_{máx} = \operatorname{Sen}^{-1}\left(\dfrac{m}{M}\right)$

$\Rightarrow \boxed{0 \le \psi < \operatorname{Sen}^{-1}\left(\frac{m}{M}\right)}$ que confirma nuestra intuición.
(obvio: $\psi_{mín} = \psi = \theta = 0$)

4. Movimiento de un cuerpo rígido sin torques: Las ecuaciones de Euler son: $I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 = N_1 = 0$ $\quad I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 = 0$ $\quad I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 = 0$

$$T = \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{2}I_i\omega_i^2 \Rightarrow \frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^{3} I_i\omega_i\dot{\omega}_i = I_1\dot{\omega}_1\omega_1 + I_2\dot{\omega}_2\omega_2 + I_3\dot{\omega}_3\omega_3$$

$$= (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3\omega_1 + (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1\omega_2 + (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2\omega_3 =$$

$$= (I_2 - I_3 + I_3 - I_1 + I_1 - I_2)\omega_1\omega_2\omega_3 = 0 \Rightarrow T = \text{const. q.e.d.}$$

$\vec{L} = \sum_{i=1}^{3} I_i\omega_i\hat{e}_i = \mathbb{I}\vec{\omega}$ ($\vec{\omega}$: vector columna) $\Rightarrow L_i = I_i\omega_i$ (No suma; ejes x_i coinciden con los ejes principales del cuerpo). Respecto a un sistema inercial (el fijo): $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \left(\dfrac{d\vec{L}}{dt}\right)_{cuerpo} + \vec{\omega}\times\vec{L} = \vec{N} = 0$ y $\vec{L}$ se conserva por las ec's de Euler. Explícitamente: $\dfrac{dL_1}{dt} = I_1\dot{\omega}_1 + (\vec{\omega}\times\mathbb{I}\vec{\omega})_1 = I_1\dot{\omega}_1 + (\omega_2 I_3\omega_3 - \omega_3 I_2\omega_2)$
$= I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 = 0$; idéntico resultado tenemos para las componentes 2 y 3.
$\Longrightarrow \vec{L}$ se conserva, q.e.d.

3. (a) Problema 3-dimensional para una partícula con 2 ligaduras: $\rho=b$, $z=a\theta$.
$\Rightarrow$ Problema unidimensional; un grado de libertad: una coordenada generalizada (por ejemplo θ o z).

(b) $L = T - U$. $T=\frac{1}{2}m(\dot\rho^2+\rho^2\dot\theta^2+\dot z^2) = \frac{1}{2}m(b^2\dot\theta^2+a^2\dot\theta^2)=\frac{1}{2}m(a^2+b^2)\dot\theta^2$

$F=-k\mathbf{r} \Rightarrow U=\frac{1}{2}kr^2$, $r^2=\rho^2+z^2=b^2+a^2\theta^2$

$$\Rightarrow \boxed{L=\frac{1}{2}m(a^2+b^2)\dot\theta^2-\frac{1}{2}k(b^2+a^2\theta^2)}$$

(c) $p_\theta=\dfrac{\partial L}{\partial\dot\theta}=m(a^2+b^2)\dot\theta$ (1), momento generalizado = momento angular.

$$H=H(q_i,p_i)=\sum_i \dot q_i p_i - L(q_i,\dot q_i) \quad \text{transformación de Legendre.}$$

$$\Rightarrow H=H(\theta,p_\theta)=\dot\theta p_\theta - L(\theta,\dot\theta)=\dot\theta m(a^2+b^2)\dot\theta-\frac{m}{2}(a^2+b^2)\dot\theta^2+\frac{k}{2}(b^2+a^2\theta^2)$$

$$=\frac{1}{2}m(a^2+b^2)\dot\theta^2+\frac{1}{2}k(b^2+a^2\theta^2)=E=T+U \;\checkmark$$

$$\dot\theta^2=\left(\frac{p_\theta}{m(a^2+b^2)}\right)^2 \Rightarrow \boxed{H=\frac{p_\theta^2}{2m(a^2+b^2)}+\frac{1}{2}k(b^2+a^2\theta^2)}$$

(d) $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot q_i}-\dfrac{\partial L}{\partial q_i}=0 \longrightarrow \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot\theta}-\dfrac{\partial L}{\partial\theta}=0$ (2) (b) $\Rightarrow$

$\dfrac{\partial L}{\partial\theta}=-ka^2\theta$ (1) $\Rightarrow \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot\theta}=m(a^2+b^2)\ddot\theta$

Remplazando en (2): $m(a^2+b^2)\ddot\theta+ka^2\theta=0 \Rightarrow \boxed{\ddot\theta+\omega^2\theta=0}$ (3)

donde: $\omega^2=\dfrac{ka^2}{m(a^2+b^2)} \Rightarrow \boxed{\omega=\sqrt{\dfrac{ka^2}{m(a^2+b^2)}}}$

$\dot q_i=\dfrac{\partial H}{\partial p_i}$ $\dot p_i=-\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \Rightarrow \dot\theta=\dfrac{\partial H}{\partial p_\theta}$ $\dot p_\theta=-\dfrac{\partial H}{\partial\theta}$

(c) $\Rightarrow \dot\theta=\dfrac{p_\theta}{m(a^2+b^2)} \overset{(1)}{=} \dot\theta \checkmark$ $\dot p_\theta=-\dfrac{\partial H}{\partial\theta} \overset{(1)}{\Longrightarrow} m(a^2+b^2)\ddot\theta=-ka^2\theta$

$\Rightarrow \ddot\theta+\dfrac{ka^2}{m(a^2+b^2)}\theta=0 \Rightarrow \boxed{\ddot\theta+\omega^2\theta=0} \checkmark$ (3')

(e) Resolviendo la ec. de movimiento (3): $\theta(t)=\theta_0\cos(\omega t+\delta)$
Condición inicial $\theta(t=0)=\theta_0\cos\delta=0 \Rightarrow \delta=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\theta(t)=\theta_0\,\mathrm{Sen}(\omega t)}$

(f) Se conserva la <u>energía</u>, puesto que L, y por tanto H, no dependen del tiempo t explícitamente.

Universidad de los Andes: Qualifying Exam -Quantum Mechanics 2019 II

1. An electron in a potential well with infinite barriers (2 Points).

An electron is located in a rectangular potential well with infinite walls. The width of the well is $L = 10$ nm. Find the energies of stationary states of the electron for which at the well's boundary $x = L$ the derivatives of the wavefunction are negative and equal to $-\tau_n$ (here τ_n are arbitrary positive constants).
Note: The wave function of the electron in the potential well of the nth energy;

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) .$$

2. Josephson Junction (3 Points)

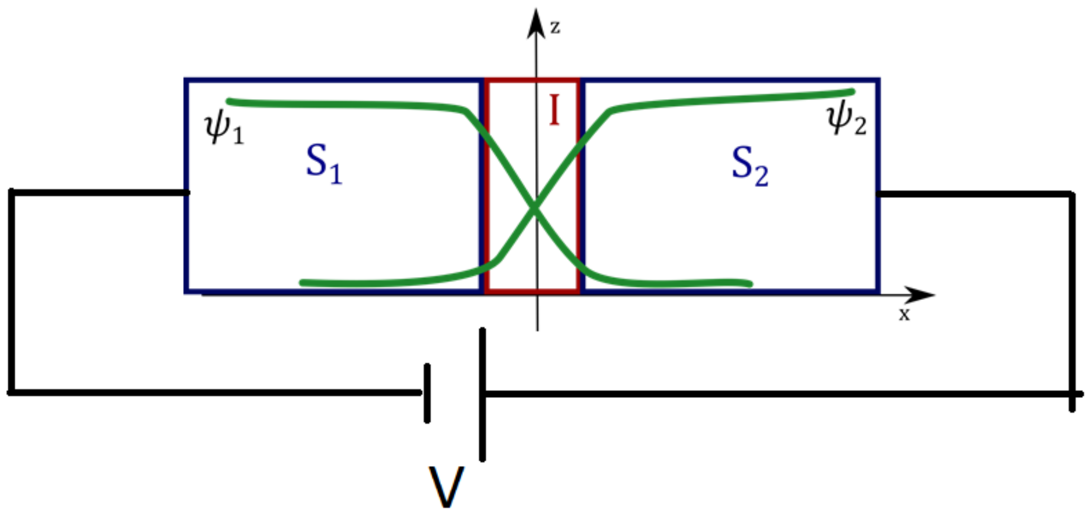
Consider superconducting metals I and II separated by a very thin insulating layer, such that the electron wave functions can overlap between metals as shown in the figure (Josephson junction). In addition, a battery V is connected across the junction to ensure an average charge neutrality. This situation can be described by means of the coupled Schrodinger equations:

$$i\hbar\frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = U_1\Psi_1 + K\Psi_2 + K\frac{\Psi_1\Psi_2^*}{\Psi_1^*}$$

$$i\hbar\frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = U_2\Psi_2 + K\Psi_1 + K\frac{\Psi_2\Psi_1^*}{\Psi_2^*}$$

Here Ψ_1 and Ψ_2 are the probability amplitudes for an electron in the metal I and II, U_1 and U_2 are the electric potential energies in I and II , K is the coupling constant due to the insulating layer, and $K\Psi_1 \Psi_2^*/ \Psi_1^*$ and $K\Psi_2 \Psi_1^*/ \Psi_2^*$ described the battery as a source of electrons.

a) Show that $\rho_1= |\Psi_1|^2$ and $\rho_2= |\Psi_2|^2$ are constant in time
b) Assuming $\rho_1= \rho_2= \rho_0$ (same metals) and, expressing the probability amplitudes in the form:



$$\psi_1 = \sqrt{\rho_0}\, e^{i\Theta_1}$$

$$\psi_2 = \sqrt{\rho_0}\, e^{i\Theta_2}$$

Find the differential equations for Θ_1 and Θ_2

c) Show that the battery current

$$I = \frac{K}{i\hbar}\,(\psi_1\psi_2{}^* - \psi_1{}^*\psi_2)$$

oscillates, and find the frequency of these oscillations.

3. **Particle confined in one dimensional box (2 Points)**

A particle is confined to a one-dimensional box of length L having infinitely high walls and is in its lowest quantum state. Calculate: $< x >, < x^2 >, < p > \; and \; < p^2 >$. Using the definition ; $\Delta A = (< A^2 > - < A >^2)^{1/2}$, to define the uncertainty , ΔA calculate Δx and Δp. Verify the Heisenberg uncertainty principle that $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$.

4. Two coupled spins in a magnetic field (3Points)

Consider two spins, **L** and **R** , in a magnetic field along the z -axis, i.e. B = (0, 0, B). The magnetic moments of the two spins are coupled to each other so that the total Hamiltonian reads

$$\hat{H} = g\mu_B \mathbf{B} \cdot (\hat{\mathbf{S}}_L + \hat{\mathbf{S}}_R) + J\hat{\mathbf{S}}_L \cdot \hat{\mathbf{S}}_R.$$

a. Write this Hamiltonian in the basis; $\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$.

b. Diagonalize this Hamiltonian. What are its eigenstates?

c. Express the density matrix $\hat{\rho}(T)$ as a function of temperature, assuming that the system is in thermodynamic equilibrium. Use the following expression where β = $1/k_b T$;

$$\hat{\rho} = \frac{\exp(-\hat{H}/k_B T)}{\mathrm{Tr}\left[\exp(-\hat{H}/k_B T)\right]}.$$

Solutión

1) Solving schrodinger equation:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\tilde{\psi}_n(x) = E\,\tilde{\psi}_n(x)$$

gives: $E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{n}{L}\right)^2$

$$\frac{d\tilde{\psi}_n}{dx} = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{2}{L}}\left(\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right) = -\tau_n \; ; \tau_n > 0$$

for $x = L \rightarrow \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{2}{L}}\underbrace{\left(\cos(n\pi)\right)}_{\text{iff } \cos(n\pi) = -1} = -\tau_n \; ; \tau_n > 0$

$\Rightarrow n = 1, 3, 5, \ldots$

$$\rightarrow -\frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{2}{L}} = -\tau_n$$

$$\boxed{n = \tau_n \frac{L}{\pi}\sqrt{\frac{L}{2}}}$$

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{\tau_n}{\pi}\sqrt{\frac{L}{2}}\right)^2$$

$$E_n = \frac{\cancel{\pi^2}\hbar^2}{2m}\frac{\tau_n^2}{\cancel{\pi^2}}\frac{L}{2}$$

$$\boxed{E_n = \frac{\hbar^2 L\,\tau_n^2}{4m}}$$

take the first eq:

2) a) $i\hbar \frac{\partial \tilde{\psi}_1}{\partial t} = U_1 \tilde{\psi}_1 + K \tilde{\psi}_2 + \frac{K \tilde{\psi}_1 \tilde{\psi}_2^*}{\tilde{\psi}_1^*}$

and complex conjugate times $\tilde{\psi}_1^*$ and $\tilde{\psi}_1$

$$i\hbar \tilde{\psi}_1^* \frac{\partial \tilde{\psi}_1}{\partial t} = U_1 \tilde{\psi}_1^* \tilde{\psi}_1 + K \tilde{\psi}_1^* \tilde{\psi}_2 + K \tilde{\psi}_1 \tilde{\psi}_2^*$$

$$-i\hbar \tilde{\psi}_1 \frac{\partial \tilde{\psi}_1^*}{\partial t} = U_1 \tilde{\psi}_1^* \tilde{\psi}_1 + K \tilde{\psi}_1 \tilde{\psi}_2^* + K \tilde{\psi}_1^* \tilde{\psi}_2$$

Subtracting $-i\hbar \frac{\partial |\tilde{\psi}_1|^2}{\partial t} = \boxed{i\hbar \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = 0}$

Similarly from second equation

$$i\hbar \frac{\partial |\tilde{\psi}_2|^2}{\partial t} = \boxed{i\hbar \frac{\partial \rho_2}{\partial t} = 0}$$

b) Substituting solutions: $\tilde{\psi}_1 = \sqrt{\rho_0}\, e^{i\theta_1}$ and $\tilde{\psi}_2 = \sqrt{\rho_0}\, e^{i\theta_2}$

in $i\hbar \frac{\partial \tilde{\psi}_1}{\partial t} = U_1 \tilde{\psi}_1 + K \tilde{\psi}_2 + K \frac{\tilde{\psi}_1 \tilde{\psi}_2^*}{\tilde{\psi}_1^*}$

$$\dot{\theta}_1 = -\frac{U_1}{\hbar} - \frac{2K}{\hbar} \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\dot{\theta}_2 = -\frac{U_2}{\hbar} - \frac{2K}{\hbar} \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

$$\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1 = \frac{U_1 - U_2}{\hbar}$$

c) $$J_1 = \frac{K}{i\hbar}\left(\psi_1 \psi_2^* - \psi_1^* \psi_2\right)$$

$$= \frac{K}{i\hbar}\left(\sqrt{\rho_0}\right)^2 \left[e^{i(\theta_1-\theta_2)} - e^{-i(\theta_1-\theta_2)}\right]$$

$$= -\frac{2K\rho_0}{\hbar}\sin(\theta_2-\theta_1)$$

3) $$\langle x \rangle = \frac{2}{L}\int_0^L x \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{2}L \quad //$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2}{L}\int_0^L x^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = L^2\,\frac{2n^2\pi^2-3}{6n^2\pi^2} \quad //$$

$$\langle p \rangle = \langle \psi^* | \hat{p} | \psi \rangle$$

$$= \int_0^L \psi^* \hat{p}\, \psi \, dx$$

$$= \int_0^L \left(\sqrt{\frac{2}{L}}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\left\{\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right\}\right]dx$$

$$= \frac{2}{L^2}\, i\hbar\, n\pi \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$= \frac{i\hbar\, n\pi}{L^2}\sin^2(n\pi L) \quad //$$

$$\langle p^2 \rangle = \frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left[i^2\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)\right]dx$$

$$= \cancel{\frac{2\hbar^2}{L}}\ \frac{2}{L}\,\frac{\hbar^2\pi^2}{L^2}\int_{-L/2}^{+L/2} \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx$$

$$\vdots$$

$$= \frac{\pi^2\hbar^2}{L^2} \quad //$$

$$\Delta x = \left(\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{L^2}{3} - \frac{L^2}{2\pi^2} - \frac{L^2}{4} \right)^{1/2}$$

$$= L \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2} \right)^{1/2}$$

$$\Delta p = \left(\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 \right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{\pi^2 \hbar^2}{L^2} - 0 \right)^{1/2}$$

$$= \frac{\pi \hbar}{L}$$

$$\Delta x \, \Delta p = \pi \hbar \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2} \right)^{1/2} = \frac{\hbar}{2} \left(\frac{\pi^2}{3} - 2 \right)^{1/2}$$

$$\approx \frac{\hbar}{2} \left(\frac{3^2}{3} - 2 \right)^{1/2}$$

$$\approx \frac{\hbar}{2} (1)$$

//

$$\vec{\sigma} \doteq \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_y &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \text{Pauli Matrices}$$

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\,\vec{\sigma} \quad (\text{Spin observable})$$

$$\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) \leftarrow \text{vector of Matrices}$$

4 * Two coupled spins in a magnetic field

a) $\hat{H} = g \mu_B \vec{B} \cdot (\hat{S}_L + \hat{S}_R) + J \hat{S}_L \cdot \hat{S}_R$

Setting $g\mu_B = 1$ for simplicity

$$\hat{H} = \vec{B} \cdot (\hat{S}_L + \hat{S}_R) + J \hat{S}_L \cdot \hat{S}_R$$

$$= \vec{B} \cdot \hat{S}_L + \vec{B} \cdot \hat{S}_R + J \hat{S}_L \cdot \hat{S}_R$$

on board

spin angular momentum operator

$$* \boxed{\hat{S}_L = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}} = \frac{\hbar}{2} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$$

$$\hat{S}_L = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z)$$

$$\vec{B} \cdot \hat{S}_L = \underset{1\times 3}{(0, 0, B)} \cdot \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix}}$$

$$\vec{B} \cdot \hat{S}_L = B \cdot \hat{S}_{Lz}$$

$E_s(1) \leftarrow$ two dim state space of particle (1)

$E_s(2) \leftarrow$ two dim state of particle 2

$E_s = E_s(1) \mathring{\ddot{A}} E_s(2) \Leftarrow$ state space of the system of two particles. E_s is four dimensional

the vectors $(|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle)$ form the basis for E_s

where most general normalized state in E_s is: $|\psi\rangle = \alpha|\uparrow\uparrow\rangle + \beta|\uparrow\downarrow\rangle + \gamma|\downarrow\uparrow\rangle$

$+ \delta|\downarrow\downarrow\rangle.$

The matrix $\hat{S}_{Lz}$ in this basis is therefore in the 4 dimensional space of the two particles

$$S_{1z} = S_{Lz}(1) \otimes I(2)$$

spin operators for higher spin systems (using Kronecker products)

$$= \frac{\hbar}{2} \sigma_z \otimes I(2)$$ Kronecker Product

$$= \frac{\hbar}{2} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1\, I(2) & 0\, I(2) \\ 0\, I(2) & -1\, (I(2)) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{S_{1z} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{4 \times 4}}$$

only operates on the part of the wave function connected with the first spin

* $S_{2z} = I(1) \otimes S_{2z}(2)$

$$= \frac{\hbar}{2} \left(I(1) \otimes \sigma_z \right)$$

$$= \frac{\hbar}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1\, \sigma_z & 0\, \sigma_z \\ 0\, \sigma_z & 1\, \sigma_z \end{pmatrix}$$

$$\boxed{S_{2z} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2 = S_{1x} S_{2x} + S_{1y} S_{2y} + S_{1z} S_{2z}}$$

$$S_{1x} = S_{1x}(1) \otimes I(2)$$

$$= \frac{\hbar}{2} \sigma_x \otimes I(2)$$

$$= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_{2x} = I(1) \otimes S_{2x}(2)$$

$$= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_{1y} = S_{1y}(1) \otimes I(2)$$

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \otimes I(2)$$

$$S_{1y} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_{2y} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{S_1 \cdot S_2 = \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$H = g\mu_B B S_{1z} + g\mu_B B S_{2z} + J\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2$$

$$= g\mu_B B \frac{\hbar}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right] + J\frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= g\mu_B B \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} + J\frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$ 1

Si $\hbar \sim 1$? ; $g\mu_B = 1$

$=$

$$= \frac{B}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \frac{J}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{H = \begin{pmatrix} B + \frac{J}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{J}{4} & +\frac{J}{2} & 0 \\ 0 & \frac{J}{2} & -\frac{J}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B + \frac{J}{4} \end{pmatrix}}$$

c)

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\beta \hat{H}}}{\mathrm{Tr}\{e^{-\beta \hat{H}}\}} = \frac{\begin{pmatrix} e^{\beta B} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\beta J} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\beta B} \end{pmatrix}}{e^{-\beta B} + 1 + e^{-\beta J} + e^{\beta B}}$$

for a diagonal matrix

$\uparrow$ trace

$$2\boxed{\frac{\left(e^{\beta B} + e^{-\beta B}\right)}{2}} = 2\,\boxed{\cosh \beta B}$$

$$\boxed{\hat{\rho} = \frac{1}{1 + e^{+\beta J} + 2\cosh \beta B} \begin{pmatrix} e^{-\beta B} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\beta J} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\beta B} \end{pmatrix}}$$

d) $$\mathrm{Tr}\left\{\left(S_R^z + S_L^z\right)\rho\right\} = \left\langle S_R^z + S_L^z \right\rangle$$

$$\left(S_{1z} + S_{2z}\right)\rho = \left[\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right]\rho$$

$$= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{1 + e^{\beta J} + 2\cosh \beta B} \begin{pmatrix} e^{-\beta B} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\beta J} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\beta B} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\frac{\hbar}{2}}{1 + e^{\beta J} + 2\cosh \beta B} \begin{pmatrix} 2e^{-\beta B} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2e^{\beta B} \end{pmatrix}$$

Universidad de los Andes - Dpto. de Física
Mecánica Estadística - Julio 2019

Examen de Conocimientos - Doctorado

1. **Nota: 1.5/5.-** Un cierto tipo de átomos, cada uno de masa m, forma un gas ideal clásico en equilibrio termodinámico a la temperatura T. Los átomos emiten luz que pasa (en la dirección x) a través de una ventana del recipiente que contiene el gas. Esta luz puede ser analizada espectroscópicamente. Un átomo en reposo emitiría luz a la frecuencia ω_0. Sin embargo, debido al efecto Doppler, la frecuencia de la luz emitida por un átomo que se desplaza con una componente v_x de velocidad resulta ser $\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{v_x}{c}\right)$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío. Entonces, la luz detectada debe caracterizarse por una distribución de intensidad $I(\omega)d\omega$ que representa la intensidad de la luz con frecuencia entre ω y $\omega + d\omega$. Calcule:

   (a) La frecuencia promedio $< \omega >$ de la luz detectada por el espectroscopio.
   (b) Las fluctuaciones de frecuencia, es decir la desviación standard $\Delta\omega$.
   (c) La distribución en frecuencias de la intensidad de la luz detectada $I(\omega)$. Ayuda: $I(\omega)d\omega = P(v_x)dv_x$ donde $P(v_x)$ es la probabilidad de encontrar un átomo con componente de velocidad v_x.

2. **Nota: 1/5.- Sistema de spins no-interactuantes.-** Considere un sistema de N partículas cada una de ellas de spin-1/2 en presencia de un campo magnético B. Sólo nos vamos a interesar por el grado de libertad de spin y no por otros grados de libertad espaciales. Cada partícula puede entonces encontrarse con energía $-\frac{\epsilon}{2}$ si apunta su spin en la dirección de B o con energía $\frac{\epsilon}{2}$ si apunta su spin en la dirección opuesta a B, con $\epsilon > 0$.

   (a) Si $n_\uparrow$ representa el número de partículas con spin paralelo a B y $n_\downarrow$ representa el número de partículas con spin anti-paralelo a B, con $N = n_\uparrow + n_\downarrow$, determinar la energía total del sistema, E.
   (b) Calcular el número de micro-estados del sistema para un valor dado de E. Deducir el valor de la entropía en términos de N y $n_\uparrow$.
   (c) Calcular la temperatura absoluta del sistema.
   (d) Expresar $n_\uparrow$, $n_\downarrow$ y E en términos de la temperatura, ϵ y N.

3. **Nota: 1/5.- Movimiento Browniano y Ecuación de Langevin.-** Considere una partícula de masa m mucho mayor que la masa de las moléculas de un fluído sobre el que reposa. Al instante $t = 0$ se sabe que la posición y velocidad de la partícula Browniana vienen dadas por x_0 y v_0, respectivamente.

(a) Justifique cada uno de los términos en la ecuación de movimiento de esta partícula en una dimensión (eje x), conocida como Ec. de Langevin y dada por:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\gamma}{m}v + \frac{\xi(t)}{m} \tag{1}$$

donde v es la velocidad (aleatoria), γ depende de la viscosidad del fluído y $\xi(t)$ describe la fuerza aleatoria que experimenta la partícula Browniana caracterizada por su promedio y correlación a dos tiempos:

$$\begin{aligned} \langle \xi(t) \rangle &= 0 \\ \langle \xi(t_2)\xi(t_1) \rangle &= g\delta(t_2 - t_1) \end{aligned} \tag{2}$$

(b) Resuelva formalmente la Ec.(1), o su versión equivalente para la posición aleatoria $x(t)$, y calcule las función de correlación a dos tiempos de la velocidad, $\langle v(t_2)v(t_1) \rangle_\xi$, y la varianza de la posición, $\langle (x(t) - x_0)^2 \rangle_\xi$, repectivamente.
(c) Para la función de correlación de la velocidad tome el límite estacionario, es decir $t_1 = t_2 \to \infty$. Haciendo uso del resultado previsto por el teorema de equipartición de la energía en este límite estacionario, encuentre la relación que debe tener g con la temperatura T del fluído.

4. **Nota: 1.5/5.- Campo medio de un sistema de Heisenberg clásico.-** El modelo de Heisenberg clásico ferromagnético ($J > 0$) está descrito por el Hamiltoniano:

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j - \sum_i \vec{h} \cdot \vec{S}_i \tag{3}$$

donde ahora los spins son representados por los vectores clásicos tri-dimensionales $\vec{S}_i$, el campo magnético aplicado se representa por el vector $\vec{h}$ y la notación $\langle i,j \rangle$ indica que sólo contribuyen a la primera suma spins primeros vecinos.

(a) Derive la expresión de campo medio H_{MF} para el Hamiltoniano de este sistema.
(b) Calcule la función de partición canónica en equilibrio a T, para una orientación cualquiera del campo $\vec{h}$, en la aproximación de campo medio.
(c) La magnetización espontánea para este sistema será siempre paralela a $\vec{h}$ que de ahora en adelante se va a suponer en la dirección z. Derive la ecuación auto-consistente para la magnetización m_z (campo medio).
(d) Se hace ahora $\vec{h} = 0$. Encuentre la temperatura crítica de este modelo y compárela con la del modelo de Ising.
(e) Calcule los exponentes críticos β, γ y δ, y compárelos con los del modelo de Ising. Recuerde

que β es el exponente crítico de la magnetización (a campo $h = 0$), γ es el exponente crítico de la susceptibilidad y δ es el exponente crítico de la magnetización a $T = T_c$ como función del campo aplicado $m \sim h^{1/\delta}$.

****

Ayudas:

1- Aproximación de Stirling: Si $N \gg 1$ entonces $Ln[N!] \approx NLn[N] - N$.

2- La distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann, $\mathcal{P}(\vec{v})$ (normalizada), para un gas ideal formado por moléculas de masa m, en equilibrio a la temperatura T, viene dada por

$$\mathcal{P}(v_x, v_y, v_z)d\vec{v} = \left(\frac{m}{2\pi\, k_B\, T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)}{2\, k_B\, T}} d\vec{v} \tag{4}$$

donde $\mathcal{P}(\vec{v})d\vec{v}$ representa la **probabilidad** de encontrar una molécula alrededor del elemento de volumen $d\vec{v}$ (en el espacio de velocidades) centrado en $\vec{v}$.

3- Algunas integrales útiles:

(i) $\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-az^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}}$
(ii) $\int_0^{\infty} z e^{-az^2} dz = \frac{1}{2a}$
(iii) $\int_0^{\infty} z^3 e^{-az^2} dz = \frac{1}{2a^2}$
(iv) $\int_0^{\infty} z^4 e^{-az^2} dz = \frac{3\sqrt{\pi}}{8a^{5/2}}$

Universidad de los Andes - Dpto. de Física
Mecánica Estadística - Julio 2019

Solución Examen de Conocimientos - Doctorado

1. **Nota: 1.5/5.-** *Un cierto tipo de átomos, cada uno de masa m, forma un gas ideal clásico en equilibrio termodinámico a la temperatura T. Los átomos emiten luz que pasa (en la dirección x) a través de una ventana del recipiente que contiene el gas. Esta luz puede ser analizada espectroscópicamente. Un átomo en reposo emitiría luz a la frecuencia ω_0. Sin embargo, debido al efecto Doppler, la frecuencia de la luz emitida por un átomo que se desplaza con una componente v_x de velocidad resulta ser $\omega = \omega_0\left(1+\frac{v_x}{c}\right)$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío. Entonces, la luz detectada debe caracterizarse por una distribución de intensidad $I(\omega)d\omega$ que representa la intensidad de la luz con frecuencia entre ω y $\omega + d\omega$. Calcule:*

(a) *La frecuencia promedio $<\omega>$ de la luz detectada por el espectroscopio.*

Como $\omega = \omega_0\left(1+\frac{v_x}{c}\right)$ se puede entonces fácilmente obtener:

$$\begin{aligned}\langle\omega\rangle &= \omega_0\left(1+\frac{\langle v_x\rangle}{c}\right)\\ &= \omega_0 \end{aligned} \tag{1}$$

dado que $\langle v_x\rangle = 0$.

(b) *Las fluctuaciones de frecuencia, es decir la desviación standard $\Delta\omega$.*

La desviación standard de la frecuencia viene dada por $\Delta\omega = \sqrt{\langle\omega^2\rangle - \langle\omega\rangle^2}$. Calculemos primero $\langle\omega^2\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle\omega^2\rangle &= \omega_0^2\Big\langle 1+2\frac{v_x}{c}+\frac{v_x^2}{c^2}\Big\rangle\\ &= \omega_0^2\left(1+\frac{K_BT}{mc^2}\right)\end{aligned} \tag{2}$$

donde se ha usado $\langle v_x\rangle = 0$ y, por el teorema de equipartición de la energía, $\langle v_x^2\rangle = \frac{k_BT}{m}$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\Delta\omega &= \sqrt{\omega_0^2\left(1+\frac{k_BT}{mc^2}\right) - \omega_0^2}\\ &= \omega_0\sqrt{\frac{k_BT}{mc^2}}\end{aligned} \tag{3}$$

(c) *La distribución en frecuencias de la intensidad de la luz detectada $I(\omega)$. Ayuda: $I(\omega)d\omega = P(v_x)dv_x$ donde $P(v_x)$ es la probabilidad de encontrar un átomo con componente de velocidad v_x.*

Recordar que la distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann permite escribir:

$$\mathcal{P}(v_x)dv_x = \sqrt{\frac{m}{2\pi\, k_B\, T}} e^{-\frac{mv_x^2}{2\, k_B\, T}} dv_x \tag{4}$$

Como $I(\omega)d\omega = \mathcal{P}(v_x)dv_x$ se debe tener que:

$$I(\omega) = \mathcal{P}(v_x)\frac{dv_x}{d\omega} \tag{5}$$

De la ecuación $\omega = \omega_0\left(1 + \frac{v_x}{c}\right)$ se despeja v_x:

$$v_x = c\left(\frac{\omega}{\omega_0} - 1\right) \tag{6}$$

para obtener que:

$$\frac{dv_x}{d\omega} = \frac{c}{\omega_0} \tag{7}$$

Finalmente llegamos a una distribución Gaussiana centrada en $\omega = \omega_0$ para la intensidad de luz detectada y de ancho dependiente de la temperatura del gas:

$$I(\omega)d\omega = \frac{1}{\omega_0}\sqrt{\frac{mc^2}{2\pi\, k_B\, T}}\; e^{-\frac{mc^2}{2\, k_B\, T}\left(1-\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} d\omega \tag{8}$$

2. **Nota: 1/5.- Sistema de spins no-interactuantes.-** Considere un sistema de N partículas cada una de ellas de spin-1/2 en presencia de un campo magnético B. Sólo nos vamos a interesar por el grado de libertad de spin y no por otros grados de libertad espaciales. Cada partícula puede entonces encontrarse con energía $-\frac{\epsilon}{2}$ si apunta su spin en la dirección de B o con energía $\frac{\epsilon}{2}$ si apunta su spin en la dirección opuesta a B.

   (a) *Si $n_\uparrow$ representa el número de partículas con spin paralelo a B y $n_\downarrow$ representa el número de partículas con spin anti-paralelo a B, con $N = n_\uparrow + n_\downarrow$, determinar la energía total del sistema, E.*

La energía total se puede escribir como:

$$\begin{aligned} E &= n_\uparrow \left(-\frac{\epsilon}{2}\right) + n_\downarrow \left(\frac{\epsilon}{2}\right) \\ &= -\frac{\epsilon}{2}\,(n_\uparrow - n_\downarrow) \\ &= -\epsilon\left(n_\uparrow - \frac{N}{2}\right) \end{aligned} \tag{9}$$

(b) *Calcular el número de micro-estados del sistema para un valor dado de E. Deducir el valor de la entropía en términos de N y $n_\uparrow$.*

El número de micro-estados correspondientes a un macro-estado con energía total E es:

$$\begin{aligned} \Omega(E,N) &= \binom{N}{n_\uparrow} \\ &= \frac{N!}{n_\uparrow!(N-n_\uparrow)!} \end{aligned} \tag{10}$$

de donde se obtiene la entropía:

$$\begin{aligned} S(E,N) &= K_B Ln\left[\Omega(E,N)\right] \\ &= K_B\left\{N\,Ln[N] - n_\uparrow\,Ln[n_\uparrow] - (N-n_\uparrow)\,Ln[N-n_\uparrow]\right\} \end{aligned} \tag{11}$$

al haber hecho uso de la aproximación de Stirling.

(c) *Calcular la temperatura absoluta del sistema.*

Empleamos la relación termodinámica

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_N \tag{12}$$

junto con (ver Ec.(9))

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial S}{\partial n_\uparrow}\frac{\partial n_\uparrow}{\partial E} = -\frac{1}{\epsilon}\frac{\partial S}{\partial n_\uparrow} \tag{13}$$

para llegar a:

$$\frac{\partial S}{\partial E} = -\frac{1}{\epsilon}\frac{\partial}{\partial n_\uparrow} K_B\left\{N\,Ln[N] - n_\uparrow\,Ln[n_\uparrow] - (N-n_\uparrow)\,Ln[N-n_\uparrow]\right\} \tag{14}$$

Se obtiene así la ecuación de estado del sistema de spins:

$$\begin{aligned}\frac{1}{T} &= \frac{K_B}{\epsilon}\left(Ln[n_\uparrow] - Ln[N - n_\uparrow]\right) \\ &= \frac{K_B}{\epsilon} Ln\left[\frac{n_\uparrow}{n_\downarrow}\right] \end{aligned} \tag{15}$$

(d) *Expresar $n_\uparrow$, $n_\downarrow$ y E en términos de la temperatura, ϵ y N.*

De la Ec.(15) se deduce que

$$e^{\frac{\epsilon}{K_B T}} = \frac{n_\uparrow}{N - n_\uparrow} \tag{16}$$

o en forma equivalente

$$n_\uparrow = \frac{N}{1 + e^{-\frac{\epsilon}{K_B T}}} \tag{17}$$

y de lo anterior se llega a

$$n_\downarrow = N - n_\uparrow = \frac{N}{1 + e^{\frac{\epsilon}{K_B T}}} \tag{18}$$

La energía total del sistema se puede entonces escribir como (ver Ec.(9)):

$$E = -\frac{N\,\epsilon}{2}\,\mathrm{Tanh}\left(\frac{\epsilon}{2\,K_B\,T}\right) \tag{19}$$

Es importante notar los siguientes límites:
(i) Si $T \to 0$ todos los spins deben apuntar paralelos al campo B (su estado de menor energía), por lo tanto $n_\uparrow \to N$ y $E \to -\frac{N\,\epsilon}{2}$.
(ii) Si $T \to \infty$ se tiene que $n_\uparrow \approx n_\downarrow \approx \frac{N}{2}$ y $E \to 0$, es decir se encontrarán tantos spins paralelos como anti-paralelos al campo B.

3. **Nota: 1/5.- Movimiento Browniano y Ecuación de Langevin.-** *Considere una partícula de masa m mucho mayor que la masa de las moléculas de un fluído sobre el que reposa. Al instante $t = 0$ se sabe que la posición y velocidad de la partícula Browniana vienen dadas por x_0 y v_0, respectivamente.*

   (a) *Justifique cada uno de los términos en la ecuación de movimiento de esta partícula en una dimensión (eje x), conocida como Ec. de Langevin y dada por:*

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\gamma}{m} v + \frac{\xi(t)}{m} \tag{20}$$

donde v es la velocidad (aleatoria), γ depende de la viscosidad del fluído y $\xi(t)$ describe la fuerza aleatoria que experimenta la partícula Browniana caracterizada por su promedio y correlación a dos tiempos:

$$\begin{aligned} \langle \xi(t) \rangle &= 0 \\ \langle \xi(t_2)\xi(t_1) \rangle &= g\delta(t_2 - t_1) \end{aligned} \tag{21}$$

Esta ecuación no es otra cosa que la formulación de la segunda Ley de Newton para un movimiento uni-dimensional donde la partícula Browniana está sometida a dos tipos de fuerzas: (i) una fuerza de rozamiento o viscosidad que depende de la velocidad, y se opone a ésta, que viene dada por $-\gamma v$; (ii) una fuerza aleatoria, dada por $\xi(t)$, que da cuenta de las múltiples colisiones que experimenta la partícula Browniana con las moléculas del fluído.

(b) *Resuelva formalmente la Ec.(44), o su versión equivalente para la posición aleatoria $x(t)$, y calcule las función de correlación a dos tiempos de la velocidad, $\langle v(t_2)v(t_1)\rangle_\xi$, y la varianza de la posición, $\langle (x(t) - x_0)^2 \rangle_\xi$, repectivamente.*

Como $v = \frac{dx}{dt}$ la Ec.(44) es equivalente a:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\gamma}{m}\frac{dx}{dt} = \frac{\xi(t)}{m} \tag{22}$$

con solución formal:

$$x(t) = x_0 + \frac{v_0}{\Gamma}\left(1 - e^{-\Gamma t}\right) + \frac{1}{m\Gamma}\int_0^t ds\, \xi(s)\left(1 - e^{-\Gamma(t-s)}\right) \tag{23}$$

y $\Gamma = \frac{\gamma}{m}$. De la Ec.(23) obtenemos la expresión formal para la velocidad:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{dx}{dt} \\ &= v_0 e^{-\Gamma t} + \frac{1}{m}\int_0^t ds\, \xi(s) e^{-\Gamma(t-s)} \end{aligned} \tag{24}$$

La función de correlación a dos tiempos para la velocidad de la partícula Browniana resulta ser:

$$\langle v(t_2)v(t_1)\rangle_\xi = v_0^2 e^{-\Gamma(t_1+t_2)} + \frac{g}{2m^2\Gamma}\left[e^{-\Gamma(t_2-t_1)} - e^{-\Gamma(t_2+t_1)}\right] \tag{25}$$

De la Ec.(23) obtenemos la variancia de la posición de la partícula Browniana:

$$\langle (x(t) - x_0)^2 \rangle_\xi = \left(\frac{v_0}{\Gamma}\right)^2 \left(1 - e^{-\Gamma t}\right)^2 + \frac{g}{m^2\Gamma^3}\left[e^{-\Gamma(t_2-t_1)} - e^{-\Gamma(t_2+t_1)}\right] \tag{26}$$

(c) *Para la función de correlación de la velocidad tome el límite estacionario, es decir* $t_1 = t_2 \to \infty$. *Haciendo uso del resultado previsto por el teorema de equipartición de la energía en este límite estacionario, encuentre la relación que debe tener* g *con la temperatura* T *del fluído.*

Como el equilibrio termodinámico es un estado estacionario, entonces la función de correlación a dos tiempos de la velocidad sólo puede depender de la diferencia de tiempos, y no de cada tiempo por separado. Por lo tanto, la Ec.(25) en este límite lleva a:

$$\langle v(t)^2 \rangle_{\xi,T} = \frac{g}{2m^2\Gamma} \tag{27}$$

que de acuerdo al teorema de equipartición de la energía también debe cumplir con:

$$\langle v^2 \rangle_{\xi,T} = \frac{1}{2} K_B T \tag{28}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} g &= m^2 \Gamma K_B T \\ &= m\gamma K_B T \end{aligned} \tag{29}$$

lo que indica finalmente que en el movimiento Browniano los términos de viscosidad y fuerza aleatoria deben estar relacionados, es decir tienen el mismo origen físico, las colisiones con las moléculas del fluído. Esta conexión también es conocida como una consecuencia del teorema de fluctuación-disipación en el régimen de no-equilibrio.

4. **Nota: 1.5/5.- Campo medio de un sistema de Heisenberg clásico.-** *El modelo de Heisenberg clásico ferromagnético* ($J > 0$) *está descrito por el Hamiltoniano:*

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j - \sum_i \vec{h} \cdot \vec{S}_i \tag{30}$$

donde ahora los spins son representados por los vectores clásicos tri-dimensionales $\vec{S}_i$, *el campo magnético aplicado se representa por el vector* $\vec{h}$ *y la notación* $\langle i, j \rangle$ *indica que sólo contribuyen a la primera suma spins primeros vecinos.*

(a) *Derive la expresión de campo medio* H_{MF} *para el Hamiltoniano de este sistema.*

Escribir cada término de interacción en la Ec.(30) como:

$$\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j = \vec{S}_i \cdot \langle \vec{S}_j \rangle + \vec{S}_j \cdot \langle \vec{S}_i \rangle - \langle \vec{S}_i \rangle \cdot \langle \vec{S}_j \rangle + \left(\vec{S}_i - \langle \vec{S}_i \rangle \right) \cdot \left(\vec{S}_j - \langle \vec{S}_j \rangle \right) \tag{31}$$

En esta última ecuación despreciar el término de fluctuaciones $\left(\vec{S}_i - \langle \vec{S}_i \rangle\right) \cdot \left(\vec{S}_j - \langle \vec{S}_j \rangle\right)$, en esto consiste hacer campo medio, y para un sistema homogéneo hacer $\vec{m} = \langle \vec{S}_i \rangle$ para todo spin i. De esta forma obtenemos el Hamiltoniano del sistema en aproximación de campo medio como:

$$\begin{aligned} H_{MF} &= -\sum_i \left(zJ\vec{m} + \vec{h}\right) \cdot \vec{S}_i \\ &= -\sum_i \vec{h}_{ef} \cdot \vec{S}_i \end{aligned} \tag{32}$$

donde z es el número de coordinación y se ha ignorado el término constante proporcional a m^2. El campo magnético efectivo resulta ser:

$$\vec{h}_{ef} = zJ\vec{m} + \vec{h} \tag{33}$$

(b) *Calcule la función de partición canónica en equilibrio a T, para una orientación cualquiera del campo $\vec{h}$, en la aproximación de campo medio.*

Se va a calcular la función de partición canónica $Z(T, N)$. Como $Z(T, N) = [Z(T, 1)]^N$,

$$\begin{aligned} Z(T, 1) &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \, \mathrm{sen}(\theta) \, e^{\beta h_{ef} S \cos(\theta)} \\ &= \frac{4\pi}{\beta h_{ef} S} \sinh\left(\beta h_{ef} S\right) \end{aligned} \tag{34}$$

donde $\beta = 1/(k_B T)$ y S es la magnitud de un spin clásico.

(c) *La magnetización espontánea para este sistema será siempre paralela a $\vec{h}$ que de ahora en adelante se va a suponer en la dirección z. Derive la ecuación auto-consistente para la magnetización m_z (campo medio).*

Para calcular la magnetización $m = m_z/S$ usar:

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{\beta} \frac{\partial \, Ln\left(Z(T, 1)\right)}{\partial \, h_{ef}} \\ &= \mathrm{Coth}\left(\beta h_{ef} S\right) - \frac{1}{\beta h_{ef} S} \end{aligned} \tag{35}$$

(d) *Se hace ahora $\vec{h} = 0$. Encuentre la temperatura crítica de este modelo y compárela con la del modelo de Ising.*

Al hacer $\vec{h} = 0$, la Ec.(35) se convierte en:

$$m = \text{Coth}\left(\beta z J m S\right) - \frac{1}{\beta z J m S} \tag{36}$$

que no es otra cosa que la ecuación auto-consistente típica de la aproximación de campo medio. Para encontrar la temperatura crítica hacer una expansión de Taylor alrededor de $m \approx 0$ para lo cual es apropiado usar la expansión:

$$\text{Coth}\left(x\right) = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \cdots \tag{37}$$

con la cual se obtiene:

$$m = \frac{\beta_c z J m S}{3} \tag{38}$$

o de manera equivalente

$$T_c = \frac{1}{3}\frac{zJS}{k_B} \tag{39}$$

Para el modelo de Ising ($S = 1$) en campo medio se obtiene para la temperatura crítica:

$$T_c^{Ising} = \frac{zJ}{k_B} \tag{40}$$

(e) *Calcule los exponentes críticos β, γ y δ, y compárelos con los del modelo de Ising. Recuerde que β es el exponente crítico de la magnetización (a campo $h = 0$), γ es el exponente crítico de la susceptibilidad y δ es el exponente crítico de la magnetización a $T = T_c$ como función del campo aplicado $m \sim h^{1/\delta}$.*

Usar la expansión dada por la Ec.(37) en el desarrollo de la Ec.(35) para $m \approx 0$ y $h \approx 0$:

$$m \simeq \frac{1}{3}\left(\beta z J m S + \beta h\right) - \frac{1}{45}\left(\beta z J m S + \beta h\right)^3 \tag{41}$$

que se puede re-organizar como, despreciando términos de orden mayor que 1 en h:

$$\beta h \simeq 3m\left(1 - \frac{T_c}{T}\right) + \frac{1}{15}\left(\beta z J m S\right)^3 \tag{42}$$

Al hacer $h = 0$ en la Ec.(42) se obtiene para el comportamiento crítico de la magnetización:

$$m \sim \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{1/2} \tag{43}$$

que coincide con el exponente crítico $\beta = 1/2$ de la magnetización en el modelo de Ising.

Al hacer $T = T_c$ en la Ec.(42) se obtiene:

$$h \sim m^3 \tag{44}$$

que coincide con el exponente crítico $\delta = 3$ en el modelo de Ising.

La susceptibilidad χ se obtiene de la Ec.(42) al calcular:

$$\chi = \left(\frac{\partial\, m}{\partial\, h}\right)_{h=0} \sim \left|1 - \frac{T}{T_c}\right|^{-1} \tag{45}$$

que coincide con el exponente crítico $\gamma = 1$ en el modelo de Ising.

****

Ayudas:

1- Aproximación de Stirling: Si $N \gg 1$ entonces $Ln[N!] \approx NLn[N] - N$.

2- La distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann, $\mathcal{P}(\vec{v})$ (normalizada), para un gas ideal formado por moléculas de masa m, en equilibrio a la temperatura T, viene dada por

$$\mathcal{P}(v_x, v_y, v_z) d\vec{v} = \left(\frac{m}{2\pi\, k_B\, T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)}{2\, k_B\, T}} d\vec{v} \tag{46}$$

donde $\mathcal{P}(\vec{v})d\vec{v}$ representa la **probabilidad** de encontrar una molécula alrededor del elemento de volumen $d\vec{v}$ (en el espacio de velocidades) centrado en $\vec{v}$.

3- Algunas integrales útiles:

(i) $\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-az^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}}$
(ii) $\int_0^{\infty} z e^{-az^2} dz = \frac{1}{2a}$
(iii) $\int_0^{\infty} z^3 e^{-az^2} dz = \frac{1}{2a^2}$
(iv) $\int_0^{\infty} z^4 e^{-az^2} dz = \frac{3\sqrt{\pi}}{8a^{5/2}}$