

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Miércoles, 16 de enero, 2019 (2:00 pm a 5:00 pm)

EXAMEN DE CONOCIMIENTOS

Electrodinámica

2019-01

Duración del examen: Tres Horas

Nombre: _____ Código: _____

Pregunta	Puntos	Nota
1	20	
2	20	
3	30	
4	30	
Total	100	

Fundamente todas sus respuestas argumentando con leyes físicas donde corresponda. Justifique todos los pasos que realice. Sea claro y concreto en su redacción. Escriba con letra clara. No se permite el uso de ayudas, fórmulas ni calculadora.

Problema 1. Potencial de una distribución finita de cargas (20 puntos)

Considere N cargas puntuales q_i ($i = 1, 2, \dots, N$) colocadas en los vértices de un polígono regular de N lados, inserto en una circunferencia de radio a . El polígono está en el plano xy .

- a. (10/20). Obtenga el potencial $\phi(r)$ para puntos dentro y fuera de la circunferencia.
- b. (10/20). Considere que todas las cargas son iguales ($q_i = q$) y analice el caso límite cuando $N \rightarrow \infty$.

Problema 2. Potencial vector para un alambre infinito de corriente (20 puntos)

a.(13/20). Evaluar el potencial vector $\vec{A}(r)$ para un alambre rectilíneo infinito con corriente I , en coordenadas cartesianas. Asuma $\vec{J} = \hat{k}I\delta(x')\delta(y')$.

b.(7/20). Obtener el campo magnético $\vec{B}$

Problema 3. Haz polarizado. (30 puntos)

Un haz de radiación electromagnética polarizada plana, de frecuencia ω , amplitud de campo eléctrico E_0 , y polarización x , incide normalmente sobre una región del espacio que contiene un plasma de baja densidad ($\rho = 0$, n_0 electrones por unidad de volumen).

- a. (10/30). Calcule la conductividad como función de la frecuencia.
- b. (10/30). Usando las ecuaciones de Maxwell determine el índice de refracción dentro del plasma.
- c. (10/30). Calcule y grafique la magnitud del campo eléctrico E como función de la posición en la región del borde del plasma.

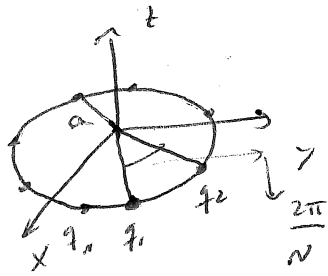
Problema 4. Partícula en un campo electromagnético (30 puntos)

Se libera una partícula de carga q y masa en reposo m , con velocidad inicial cero, en una región del espacio que contiene un campo eléctrico E en la dirección y , y un campo magnético B en la dirección z .

- a. (10/30). Describa las condiciones necesarias para la existencia de un marco de Lorentz en el que (1) $E = 0$ y (2) $B = 0$.
- b. (10/30). Describa el movimiento que se daría en el marco original en el caso en que se alcance la condición (1) del numeral (a).
- c. (10/30). Encuentre el momentum como función del tiempo en el marco con $B = 0$, para el caso (2) del numeral (a).

Muchos éxitos!

①



a) $\phi(\vec{r}) = \int_V \rho(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dV'$ Vemos que

$$\rho(\vec{r}') = \frac{d(r'-a) d(\cos\theta' - \cos\frac{2\pi i}{N})}{r'^2} \quad \sum_{i=1}^N q_i \delta(\phi' - \frac{2\pi i}{N})$$

② $r < a$,

Como $G(\vec{r}, \vec{r}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi')}{2l+1} \frac{r^l}{r'^{l+1}}$
 $\rightarrow$ el mayor entre r, r'

$\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{d(r'-a)}{r'^{l+1}} r^l dr' = \int_0^r + \int_r^{\infty} = \frac{r^l}{a^{l+1}}$
 por prop de d.

③ Para $r > a \rightarrow \int_0^{\infty} = \int_0^r + \int_r^{\infty} = \frac{a^l}{r^{l+1}}$ Así, ambos resultados

Se resumen como $\int_0^{\infty} = \frac{r^l}{r'^{l+1}}$ el $>$ entre r y a

Aplicando las definiciones de armónicos esféricos $Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi}$
 $\Rightarrow \phi(r) = \sum_i \sum_l \sum_m q_i \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos\theta) P_l^m(\cos\theta') e^{im(\phi - \frac{2\pi i}{N})}$
 $\frac{r^l}{r'^{l+1}}$

b) Si $N \rightarrow \infty$ y $q_i = q \Rightarrow$ el polígono se vuelve una espiral.

En este caso, el término $\sum_i q_i e^{im(\phi - \frac{2\pi i}{N})}$ se puede ver así:

$= \left(\sum_i q_i e^{im \frac{2\pi i}{N}} \right) e^{im\phi} \Rightarrow$ el término $\left[\sum_i q_i e^{-i(\frac{2\pi m i}{N})} \right]$ lo vemos

así: $\left[\sum_{i=0}^{N-1} (\Delta N) e^{-i \frac{2\pi m i}{N}} \right] e^{-i \frac{2\pi m}{N}}$, $\Delta N = 1$

Sea $\alpha = \frac{2\pi i}{N} \rightarrow \Delta\alpha = \frac{2\pi}{N} ((i+1) - i) = \frac{2\pi}{N} \Delta N \rightarrow \Delta N = \frac{N}{2\pi} \Delta\alpha$

$\Rightarrow$ Si $i=0, \alpha=0$ y si $i=N-1, \alpha = 2\pi(1 - \frac{1}{N})$ Así,
 $\left(\sum_{i=0}^{N-1} (\Delta N) e^{-i \frac{2\pi m i}{N}} \right) e^{-i \frac{2\pi m}{N}} = \left(\sum_{\alpha=0}^{2\pi(1-\frac{1}{N})} e^{-im\alpha} \frac{N}{2\pi} \Delta\alpha \right) e^{-i \frac{2\pi m}{N}}$

que en el caso $N \rightarrow \infty$
 $\Delta\alpha \rightarrow 0$

Se convierte en $e^{-i \frac{2\pi m}{N}} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{N}{2\pi} e^{-im\alpha} d\alpha = e^{-i \frac{2\pi m}{N}} \cdot \frac{N}{2\pi} 2\pi \delta(m) \quad (2)$

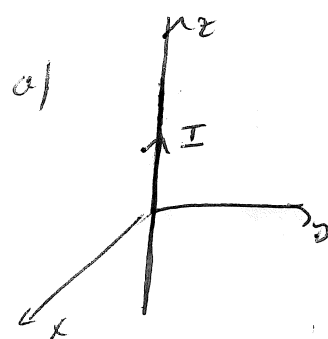
$= e^{-i \frac{2\pi m}{N}} \frac{N}{2\pi} \delta(m) \Rightarrow$

$\phi(\vec{r}) = Nq \sum_l P_l(\cos\theta) P_l(\cos\theta) \frac{r_l^l}{r^{l+1}}$, ó llamdo $Q = Nq$

$\phi(\vec{r}) = Q \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) P_l(\cos\theta) \frac{r_l^l}{r^{l+1}}$

Potencial debido a un anillo de carga uniforme.

(2) a)



$\vec{J} = \hat{z} I \delta(x) \delta(y)$ Tomando

$G(\vec{r}|\vec{r}') = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}}{k^2} d^3k$ tenemos:

$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \vec{J}(\vec{r}') G(\vec{r}|\vec{r}') d^3r' \Rightarrow$

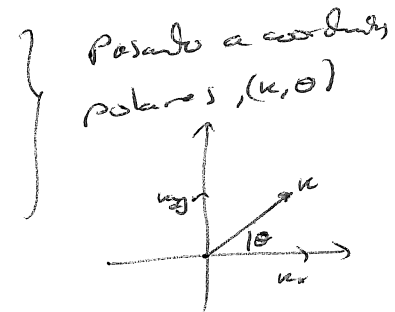
$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{I \hat{z}}{2\pi^2 c} \int \frac{\delta(x') \delta(y') e^{i(k_x(x-x') + k_y(y-y') + k_z(z-z'))}}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} dx' dy' dz'$

A) integrar en x', y', z' tenemos:

$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{I \hat{z}}{\pi c} \int \frac{\delta(k_z) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} dk_x dk_y dk_z$

$= \frac{I \hat{z}}{\pi c} \int \frac{e^{i(k_x x + k_y y)}}{k_x^2 + k_y^2} dk_x dk_y = \frac{I \hat{z}}{\pi c} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i k \rho \cos\theta}}{k^2} k dk d\theta$

$= \frac{\hat{z} I}{\pi c} \int_0^{\infty} \frac{1}{k} \left(\int_0^{2\pi} e^{i k \rho \cos\theta} d\theta \right) dk$



$$= \frac{2I\hat{n}}{c} \int_0^\infty \frac{J_0(k\rho)}{k} dk$$

pués $J_m(x) = \frac{1}{2\pi i^m} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos \theta - i m \theta} d\theta$ (3)

$$= \frac{2I\hat{n}}{c} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{J_0(k\rho)}{(k^2 + \alpha^2)^{1/2}} dk \quad \text{A ~~partir~~ de} = \frac{2I\hat{n}}{c} J_0(\rho \alpha/2) K_0(\frac{\rho \alpha}{2})$$

$$= \left[-\frac{2\hat{n}I}{c} \left[\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{\rho \alpha}{2} \right) - 0,55772 \right] \right] = \vec{A}(\vec{r})$$

b) Como $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{I\hat{n}}{\pi c} \iint \frac{e^{ik\rho \cos \theta}}{k} dk d\theta$

$$\gamma \vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\hat{e}_\phi I i}{\pi c} \iint e^{ik\rho \cos \theta} \cos \theta dk d\theta = -\frac{\hat{e}_\phi I i}{\pi c} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^\infty e^{ik\rho \cos \theta} dk \right] \cos \theta d\theta$$

Ahora, $\int_0^\infty e^{ikx} dk = \int_0^\infty \cos kx dk + i \int_0^\infty \sin kx dk$ γ

$$\int_0^\infty \cos kx dk = \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-ak} \cos kx dk = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a}{a^2 + x^2} = 0$$

$$\int_0^\infty \sin kx dk = \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-ak} \sin kx dk = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + a^2} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{ikx} dk = \frac{i}{x} \Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\hat{e}_\phi I i}{\pi c} \int_0^{2\pi} \frac{i}{\rho \cos \theta} \cos \theta d\theta$$

$$= \frac{\hat{e}_\phi I}{\pi c} \cdot 2\pi \Rightarrow \boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{2I}{c} \hat{e}_\phi}$$

③ a) Como el plasma es de baja densidad, se puede considerar el espacio como un espacio libre, con permitividad ϵ_0 y permeabilidad μ_0 . Las ecuaciones de Maxwell son

entonces:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}' = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{E}' = -\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}' = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{B}' = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t}$$

La ley de Ohm es $\vec{J} = -n_0 e \vec{v} = \sigma \vec{E}'$, donde $\vec{v}$ es la velocidad promedio de los electrones en el plasma. Para $v \ll c$, la magnitud de la fuerza ^{magnética} sobre un electrón es mucho menor que la fuerza eléctrica y puede ser despreciada. Entonces, la ecuación de movimiento para un electrón es:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{e}{m} \vec{E}'$$

Como $\vec{E}' = \vec{E}_0'(\omega) e^{-i\omega t}$, al desplazamiento del electrón desde el equilibrio es $\vec{r} = \vec{r}_0 e^{-i\omega t}$ en el estado estacionario. Por lo tanto,

$$\vec{r} = \frac{e}{m\omega^2} \vec{E}' \quad \text{y} \quad \vec{J} = \vec{J} = -\frac{ie}{\omega m} \vec{E}' \Rightarrow \vec{J} = i \frac{n_0 e^2}{m\omega} \vec{E}'$$

$$\sigma = i \frac{n_0 e^2}{m\omega}$$

b) el vector polarización del plasma es: $\vec{P} = -n_0 e \vec{r}$

$$= -\frac{n_0 e^2}{m\omega^2} \vec{E}' \quad \text{Así, el desplazamiento eléctrico será:}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}' = \epsilon_0 \vec{E}' + \vec{P} \quad \text{Así, la constante dieléctrica del plasma}$$

$$\text{es dada por: } \epsilon = \epsilon_0 + \frac{P}{E'} = \epsilon_0 - \frac{n_0 e^2}{m\omega^2} \Rightarrow \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2$$

con $\omega_p = \sqrt{n_0 e^2 / \epsilon_0 m}$, la llamada frecuencia angular del plasma.

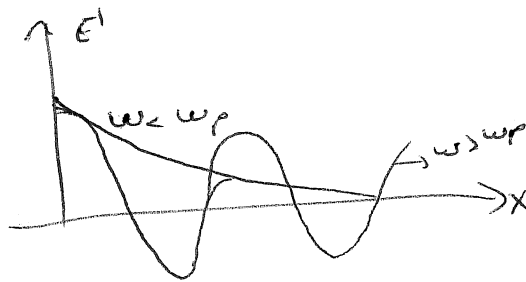
$$\Rightarrow n = \sqrt{\frac{\mu_0 \epsilon}{\mu_0 \epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$$

(5)

c) Consideremos la onda primaria $\vec{E}_0 = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \hat{z}$, donde $k = \frac{\omega}{c}$. Si ella incide sobre la frontera del plasma normalmente, la onda dentro del plasma también será polarizada plana, con amplitud $E_0' = \frac{2E_0}{1+n}$, con $k' = \frac{\omega}{c} n = kn$ el número de onda. Así,

$$\vec{E}' = \frac{2E_0}{1+n} e^{i(knz - \omega t)} \hat{z}$$

Notemos que para $\omega > \omega_p$, n y kn son reales y $\vec{E}'$ se propaga como una onda. Si $\omega < \omega_p$, n y kn son imaginarios y $\vec{E}'$ decae exponencialmente:



(4) a) Sea Σ el sistema o marco del laboratorio y Σ' el marco de referencia móvil, con velocidad relativa v en dirección x .

En Σ tenemos: $\vec{E} = E \hat{y}$, $\vec{B} = B \hat{z}$

Las transformaciones de Lorentz nos dan el campo electromagnético en Σ' así: $E_x' = E_x = 0$ $E_y' = \gamma (E_y - v B_z) = \gamma [E - v B]$

$$E_z' = \gamma (E_z + v B_y) = 0$$

$$y \quad B_x' = B_x = 0 \quad B_y' = \gamma (B_y - \frac{v}{c^2} E_z) = 0$$

$$B_z' = \gamma (B_z - \frac{v}{c^2} E_y) = \gamma (B - \frac{v}{c^2} E)$$

⇒ (1) Para $E' = 0$ en Σ' se requiere que $E - vB = 0$, ó $\textcircled{G}$
 $v = \frac{E}{B}$. Pero como $v \leq c$, se requiere que $\boxed{E \leq cB}$

(2) Para $B' = 0$ en Σ' , se requiere que $B - \frac{v}{c^2} E = 0$ ó $v = \frac{c^2 B}{E}$
 ⇒ $\boxed{cB \leq E}$

b) Si $E' = 0$ el movimiento de la carga q en Σ' será descrito por:
 $\frac{d}{dt'} \left(\frac{m \vec{u}'}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} \right) = q \vec{u}' \times \vec{B}' \quad \textcircled{A}$ y $\frac{d}{dt'} \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} \right) = q (\vec{u}' \times \vec{B}') \cdot \vec{u}' = 0 \quad \textcircled{B}$

donde $\vec{u}'$ es la velocidad de la partícula en Σ' .
 La ec. $\textcircled{B}$ implica que $\frac{mc^2}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} = \text{cte.} \Rightarrow u' = \text{cte.} \Rightarrow$ sólo cambia la dirección de la velocidad de la partícula.

Como la velocidad inicial en Σ es 0, en Σ' , $t' > 0$, será dada por:
 $\vec{u}_x' = \frac{\vec{u}_x - \vec{v}}{1 - \frac{v u_x}{c^2}} = -\vec{v} \quad \vec{u}_y' = \frac{\vec{u}_y}{\gamma(1 - \frac{v u_x}{c^2})} = 0 \quad \vec{u}_z' = 0$

⇒ $\vec{u}_0' = -v \hat{x} = -\frac{E}{B} \hat{x}$. Así, la magnitud de la velocidad de la partícula será siempre $u' = \frac{E}{B}$, y tenemos que:
 $\sqrt{1 - u'^2/c^2} = \frac{\sqrt{B^2 c^2 - E^2}}{Bc} = \text{cte.}$ Así, la ecuación $\textcircled{A}$ se

reduce a $\vec{u}' = \frac{q}{m} \sqrt{1 - u'^2/c^2} \vec{u}' \times \vec{B}' \quad \textcircled{C}$

De las ecuaciones de transformación para $\vec{B}$ tenemos:

$\vec{B}' = \frac{1}{c} \sqrt{B^2 c^2 - E^2} \hat{x}$ y de la ecuación $\textcircled{C}$ se obtiene:

$$u_x' = w u_y' \quad (d) \quad \dot{u}_y' = -w u_x' \quad (e) \quad \dot{u}_z' = 0 \quad (f) \quad (+)$$

Donde $w = \frac{q B' \sqrt{1 - u^2/c^2}}{m} = \frac{q (c^2 B'^2 - E^2)}{c^2 m B}$

La ecuación (f) muestra que $u_z' = \text{cte} \Rightarrow$ como $u_z' = 0$ en $t' = 0$, $u_z' = 0$ en todo tiempo.

Las ecuaciones (d) y (e) dan: $\dot{u}_x' + i \dot{u}_y' = -i w (u_x' + i u_y')$

o llamando $z = u_x' + i u_y'$, $\dot{z} = -i w z$ La solución

a esta ecuación es: $z = -u_0' e^{-i w t'}$ o

$u_x' = u_0' \cos(w t')$; $u_y' = -u_0' \sin(w t')$, con $u_0' = \text{cte.}$

Como $u_0' = \frac{E}{B}$ en $t' = 0$, tenemos que:

$$u_x' = \frac{E}{B} \cos(w t'); \quad u_y' = -\frac{E}{B} \sin(w t')$$

Estas ecuaciones permiten ver que la partícula tendrá un movimiento circular en el plano xy , con un radio dado por

$$R = \frac{u}{w} = \frac{E}{B w} = \frac{c^2 m E}{q (c^2 B^2 - E^2)}$$

Por otro lado, en Σ , como la interacción de Lorentz es en dirección x , la órbita es una elipse con el eje menor a lo largo del eje x .

(c) Tomemos un marco de referencia Σ' en el cual $\vec{B}' = 0$.

Sea $\vec{p}'$ el momentum de la partícula. La ecuación de movimiento será: $\frac{d\vec{p}'}{dt'} = q \vec{E}'$. La cantidad $E^2 - c^2 B^2$

es un invariante Lorentz.

$\Rightarrow \vec{E}' = \sqrt{E^2 - c^2 B^2} \hat{j}$. La ecuación de movimiento (8) tiene entonces las componentes así:

$$\frac{dp_x'}{dt'} = \frac{dp_z'}{dt'} = 0 \quad (9) \quad \frac{dp_y'}{dt'} = q \sqrt{E^2 - c^2 B^2} \quad (10)$$

La ecuación (9) muestra que tanto p_x' como p_z' son etes. La partícula está inicialmente en reposo en Σ y su velocidad es opuesta a la de Σ' : $u_0 = -\frac{c^2 B}{E}$, como se vio en a).

$$\text{Así, } p_x' = \frac{m u_0}{\sqrt{1 - u_0^2/c^2}} = \frac{c^2 m B}{\sqrt{E^2 - c^2 B^2}}$$

$$p_z' = 0.$$

La ec. (10) da $p_y(t') = q \sqrt{E^2 - c^2 B^2} t'$, donde se usó la condición inicial $u_{0y}' = 0$ en $t' = 0$.

Antes de empezar tenga en cuenta:

- Fundamente todas sus respuestas argumentando con leyes físicas donde corresponda
- Explique claramente sus suposiciones. Justifique todos los pasos que realice.
- Muestre los detalles de su trabajo
- Sea claro y concreto en su redacción. Escriba con letra clara.
- No se permite el uso de ayudas, fórmulas o calculadora-estime lo mejor que pueda manualmente.
- pt es una abreviación de puntos. Enumere sus páginas

Problema 1. Barco varado (20pt)

El capitán de un barco ($M=1000\text{kg}$ sin el ancla) en un mar sin viento ni corriente sobre la línea ecuatorial decide usar el ancla ($m=200\text{kg}$) como medio de propulsión, subiéndola hasta arriba del mástil ($h=20\text{m}$).

- a) ¿Porqué se moverá el barco? (5 pt)
- b) ¿En qué dirección se moverá? Especifique el punto cardinal (6 pt)
- c) Suponiendo que no hay resistencia del agua, ¿qué tan rápido se moverá con respecto al mar? (9pt)

Problema 2. Estrellas múltiples (20pt)

Suponga que tiene estrellas múltiples rotando alrededor de ellas mismas separadas por L .

- a)Cuál es el periodo de una estrella binaria con dos estrellas de masas iguales?
- b)Cuál es el periodo de una estrella binaria con dos estrellas de masa distinta?
- c)Cuál es el periodo de una triple-estrella con tres estrellas de la misma masa en un triángulo equilátero? Recuerde que la distancia al centro en un triángulo equilátero es $1/\sqrt{3}$ del lado L .

Expresé sus resultados en términos de G , L y las masas de las estrellas (M_1 , M_2 , etc...)

Problema 3. Oscilador (6 x 5pt)

El Lagrangiano de un movimiento en una dimensión está dado por:

$$L = e^{\gamma t} \left(\frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{kq^2}{2} \right)$$

Donde γ , m , k son constantes positivas.

- a) Encuentre la ecuación de Lagrange para este movimiento
- b) Encuentre las constantes de movimiento, si las hay
- c) Describa en detalle el movimiento bajo las distintas condiciones posibles

Suponga que se hace una transformación a otro sistema generalizado de coordenadas
 $S = e^{\gamma t/2} q$

- d) Exprese el Lagrangiano en términos de S.
- e) Encuentre la ecuación de Lagrange
- f) Encuentre las constantes de movimiento, si las hay
- g) ¿Cuál es la relación entre las dos soluciones en las distintas coordenadas?

Problema 4. Hamiltoniano clásico de van der Waals (3 x 10pt)

La interacción entre dos moléculas iguales de gas inerte de masa m se puede escribir como:

$$U(r) = -\frac{2A}{r^6} + \frac{B}{r^{12}}$$

donde $A, B > 0$, y $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ es la separación entre las dos moléculas de gas que son idénticas.

- a) Encuentre el hamiltoniano del sistema de dos átomos en 3D. (son 8 términos) (4pt)
- b) Encuentre el valor del estado clásico mínimo de energía del sistema. (2pt)
- c) Si la energía del sistema es ligeramente mayor al estado en b), y suponiendo que la energía se concentra en el movimiento en la coordenada r , ¿cuál(es) es/son la(s) posible(s) frecuencia(s) de movimiento del sistema en función de A, B y m la masa de las moléculas? (4pt)

Termino y Mecánica estadística. Solución. 2018-1

Problema 1: a) Las partículas no interactúan $\Rightarrow Z = (z_p)^n$

$$z_p = \sum_i e^{-\beta E_i} = e^{\frac{+\mu_0 B \beta}{k_B T}} + e^{\frac{-\mu_0 B \beta}{k_B T}}$$

$$Z = \left(e^{\frac{+\mu_0 B \beta}{k_B T}} + e^{\frac{-\mu_0 B \beta}{k_B T}} \right)^n$$

$\rightarrow$ si consideramos Gibbs, sería $\star \frac{1}{n!}$

$$S \equiv k_B \left(\ln Z - \beta \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right)$$

$$\rightarrow = \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \left(e^{+\alpha} + e^{-\alpha} \right)^n$$

$$\alpha = \mu_0 B \beta$$

$$= n \mu_0 B \frac{\partial \ln \left(e^{+\alpha} + e^{-\alpha} \right)}{\partial \beta}$$

$$\frac{d}{dx} \ln(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$= n \mu_0 B \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}} = n \mu_0 B \tanh(\alpha)$$

$$S = k_B \left(\ln \left(e^{+\alpha} + e^{-\alpha} \right)^n - n \mu_0 B \beta \tanh(\alpha) \right)$$

$$= k_B n \left(\ln \left(e^{+\alpha} + e^{-\alpha} \right) - \alpha \tanh(\alpha) \right)$$

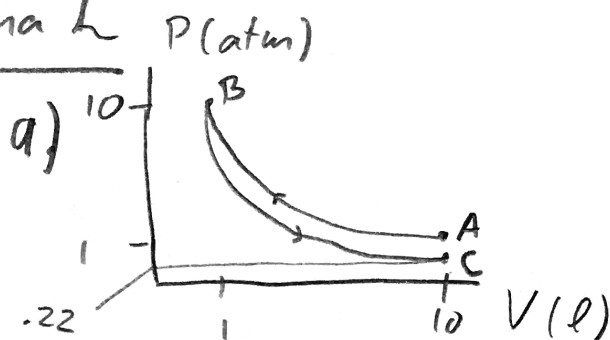
b) proceso adiabático $\Rightarrow S$ no cambia. S depende de $\alpha \Rightarrow \alpha_i = \alpha_f$

$$\frac{\mu_0 B_i}{k_B T_i} = \frac{\mu_0 B_f}{k_B T_f} \Rightarrow T_f = \frac{B_f}{B_i} T_i = \frac{10^{-2}}{1} \times 1 = 10^{-2} \text{ K}$$

c) ^{25}Ti $\mu_0 T_f \rightarrow$ Se pueden enfriar los iones a muy bajas temperaturas.

Solución Termo y Mecánica Estadística

Problema 2



- para la compresión isotérmica:
 $PV = nRT = \text{cst} \quad (T = \text{cst})$

$$\Rightarrow P_A V_A = P_B V_B$$

$$P_B = \frac{P_A V_A}{V_B}$$

$$= \frac{1 \times 10}{1} = 10 \text{ atm.}$$

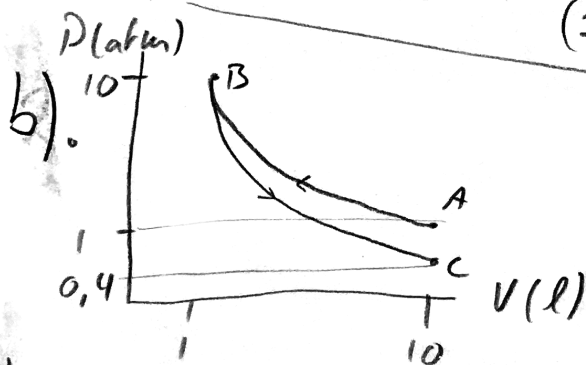
- para la expansión adiabática:

$$P V^\gamma = \text{cst} \quad \text{donde } \gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{l+2}{l}$$

$$P_c^{\text{mono}} = P_B \left(\frac{V_B}{V_c} \right)^\gamma$$

$l = 3$ grados de lib.

$$P_c^{\text{mono}} = 10 \left(\frac{1}{10} \right)^{\frac{5}{3}} = 10^{-\frac{2}{3}} \text{ atm} \\ (\approx 0.22 \text{ atm})$$



- compresión igual a mono

- expansión: $\gamma = \frac{5+2}{5}$

$$P_c = 10 \left(\frac{1}{10} \right)^{\frac{7}{5}} = \frac{10^{-2}}{5} \\ = 10^{-2/5} \text{ atm}$$

$$(\approx 0.4 \text{ atm})$$

c). en ambos casos el calor fluye del reservorio al gas

d). mayor para el monoatómico



Problema 3

gas de fotones a V, T

a) $\mu = 0$ dado que los fotones no se conservan.

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_{T, V} = 0$$

b) estadística de Bose-Einstein.

$\bar{N}$ a T ?

$$\bar{N} = \int \underbrace{\frac{1}{e^{\frac{(\epsilon_i - \mu)}{k_B T}} - 1}}_{\text{ocupación}} d\rho \quad \mu = 0$$

densidad de estados.
para gas de fotones.

$$\rho = \frac{8\pi V p^2}{h^3} = V \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \quad \rightarrow \text{ver p. 2 para detalles.}$$

$$\Rightarrow \bar{N} = \int_0^\infty \frac{8\pi V}{h^3} \cdot \frac{p^2}{e^{\frac{pc}{k_B T}} - 1} dp$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{pc}{k_B T} \\ p &= \frac{k_B T \alpha}{c} \\ dp &= \frac{k_B T}{c} d\alpha \\ &= \frac{8\pi V}{h^3} \left(\frac{k_B T}{c} \right)^2 \frac{\alpha^2}{e^\alpha - 1} \cdot \left(\frac{k_B T}{c} \right) d\alpha \\ &= \frac{8\pi V}{h^3} \left(\frac{k_B T}{c} \right)^3 \int_0^\infty \frac{\alpha^2 d\alpha}{e^\alpha - 1} \cdot T^3 \end{aligned}$$

derivación densidad de estados fotones.

P3²

$$\# \text{ estados } N = \frac{V}{\lambda^3}$$

al igual que con el gas de fermi, con hamiltoniano:

$N = (2) \left(\frac{1}{8} \right) \frac{4}{3} \pi R^3$ donde

 $R = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi E}{hc}$
 2 polarizaciones condiciones "borde" $E = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{E}$

So' los valores $\oplus$ de n , dado que k_x y k_y son el mismo estado de energía.

$$\Rightarrow N = \frac{2}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi \left(\frac{1}{2} \frac{hc}{E} \right)^3$$

$$= \frac{8\pi}{3} L^3 \left(\frac{E}{hc} \right)^3$$

$$\Rightarrow \frac{N}{V} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{E}{hc} \right)^3 \quad E = pc$$

$$\Rightarrow \frac{8\pi}{3} \left(\frac{pc}{h} \right)^3 = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{p}{h} \right)^3 \quad \text{ok}$$

densidad de estados = $\frac{d(\# \text{ estados})}{dE} \cdot V$

pero en momento $\rho(p) = \frac{d}{dp} \left(\frac{8\pi}{3} \left(\frac{p}{h} \right)^3 \right) = 8\pi \frac{p^2}{h^3} \cdot V$

$$c) \quad \frac{\bar{E}}{V} = \int_0^\infty p(\omega) d\omega$$

$$E = \hbar \omega = pc \\ \Rightarrow p = \omega \frac{\hbar}{c}$$

$$= \int_0^\infty \frac{V}{V} \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar \omega}{e^{\frac{\hbar \omega}{k_B T}} - 1} d\omega$$

$$\Rightarrow \frac{8\pi V p^2 dp}{h^3}$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega}{k_B T}} - 1} \right) d\omega = p(\omega).$$

$$= \frac{8\pi V \omega^2 \cdot \hbar^2 \cdot \frac{\hbar}{c}}{h^3} d\omega$$

$$= \frac{8\pi}{8\pi^3} \frac{V \omega^2}{c^3} d\omega$$

$$= \frac{V \omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega$$

Si definiamo $\xi = \frac{\hbar \omega}{k_B T}$

$$d) \quad d\xi = \frac{\hbar}{k_B T} d\omega$$

$$\omega = \frac{k_B T}{\hbar} \xi$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{E}}{V} = \int \left(\frac{k_B T}{\hbar} \right)^3 \frac{\xi^3}{\pi^2 c^3} \cdot \left(\frac{k_B T}{\hbar} \right) \frac{\hbar}{e^\xi - 1} d\xi$$

$$= \left(\frac{k_B T}{\hbar} \right)^4 \cdot \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \int \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi - 1}$$

$$\bar{E} \propto T^4.$$

Problema 4 $\rightarrow$ hay muchas maneras de resolver a)
esta es una.

P4 1

$$H = -J \sum_{i,j} S_i S_j - \mu H_0 \sum_i S_i$$

para el spin i

$$E(S_i) = -\mu H S_i - J S_i \sum_j^{\text{vecinos}} S_j$$

aproximando la contribución vecinal S_j por su valor promedio

$$E_{mf}(S_i) = -\mu H S_i - J S_i \sum_j^{\text{vec}} \langle S_j \rangle$$

$$m = \frac{1}{N} \sum_i \langle S_i \rangle$$

$$= -\mu H S_i - J S_i m$$

$$= -(\mu H + J m) S_i$$

$$= -h_{mf} S_i$$

entonces
aver

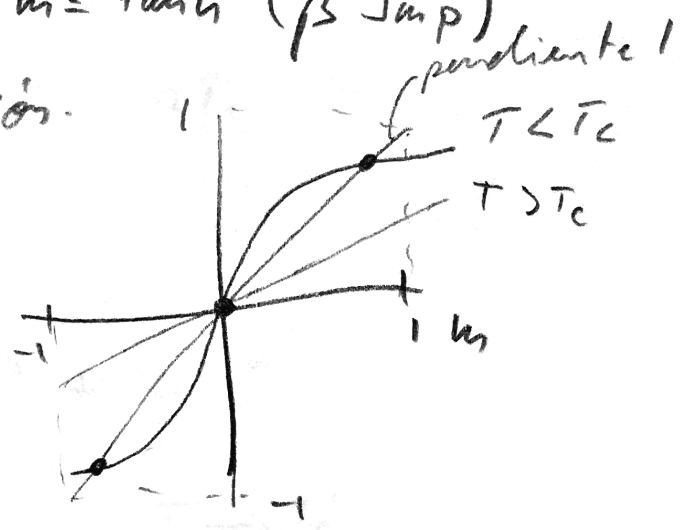
$$(6) \quad P(S_j) = \frac{e^{-\beta E_{mf}(S_j)}}{\sum_{S_j = \pm 1} e^{-\beta E_{mf}(S_j)}} = \frac{e^{\beta h_{mf} S_j}}{e^{\beta h_{mf}} + e^{-\beta h_{mf}}}$$

(6) deducir en general a m en equilibrio

$$m = \sum_{S_j = \pm 1} P(S_j) S_j = \frac{e^{\beta h_{mf}} - e^{-\beta h_{mf}}}{e^{\beta h_{mf}} + e^{-\beta h_{mf}}} = \tanh(\beta h_{mf})$$

con lo que $m = \tanh(\beta J_{\text{tot}} + \beta J_{\text{imp}})$

cuando $H_0 = 0 \Rightarrow m = \tanh(\beta J_{\text{imp}})$
 $m=0$ es solución.



y hay otras 2 soluciones cuando la pendiente es > 1 para $m=0$.

la pendiente es: $\left. \frac{d}{dm} \tanh \beta J_{\text{imp}} \right|_{m=0} = \frac{1}{\cosh^2 \beta J_{\text{imp}}} (\beta J_P) \Big|_{m=0}$
 $= \beta J_P$

la f. crítica es entonces cuando $\beta J_P = 1$

$$J_P = k_B T_c$$

$$\boxed{T_c = \frac{PJ}{k_B}}$$

b)

$$m(T, m_0=0) \sim A \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^\beta$$

$$\beta = ? \quad T \rightarrow T_c$$

$$m = \tanh\left(\frac{T_c}{T} m\right)$$

expandiendo $\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \dots$

Suponiendo que $T < T_c \quad T \rightarrow T_c^- \Rightarrow m_0 \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \frac{T_c}{T} m \rightarrow 0 \text{ y expandemos}$$

$$T_c = \frac{PJ}{k_B}$$

$$\tanh\left(\frac{T_c}{T} m\right) = \tanh\left(\frac{PJ}{k_B T} m\right) = \tanh(JmP\beta)$$

$$m_0 = \beta JmP - \frac{(\beta JmP)^3}{3} + \dots$$

dividiendo por m_0 : $1 = \beta JP - \frac{1}{3} (\beta JP)^3 m^2$

$$m^2 = \frac{(-1 + \beta JP)3}{(\beta JP)^3} = \frac{1 - \frac{1}{\beta JP}}{(\beta JP)^2}$$

$$m^2 = \frac{1}{(\beta JP)^2} \left(1 - \frac{1}{\beta JP}\right)$$

$$m^2 = \left(\frac{k_B T}{JP}\right)^2 \left(1 - \frac{k_B T}{JP}\right) = \left(\frac{T}{T_c}\right)^2 \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)$$

$$m = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{T}{T_c} \right) \left(1 - \frac{T}{T_c} \right)^{\frac{1}{2}}$$

↑
'Limiter' $T \rightarrow T_c$
↑
Singular $T \rightarrow T_c \Rightarrow$ domina

$$\Rightarrow \beta = \frac{1}{2}$$

Ph. D. Qualifiers Exam, QUANTUM MECHANICS (2019-I)
Total marks 100

I(25 marks)

- (i) For operators A, B, C , prove that, $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$ and find the commutator $[x, p_x]$.
(ii) Find an expression for the time derivative of the expectation value

$$\frac{d}{dt}\langle x p_x \rangle$$

where x and p_x are the position and momentum operators. The answer should be in terms of $\langle [\mathcal{H}, x p_x] \rangle$
(remember that $\mathcal{H}$ is a Hermitian operator and $(\mathcal{H}\Psi)^* = \Psi^*\mathcal{H}$)

II(15 marks)

Show that in case of **stationary states**, the virial theorem, namely,

$$\langle 2T \rangle = \left\langle x \frac{dV}{dx} \right\rangle$$

follows.

III(30 marks) Using the representation,

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger), \quad p = i \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (a^\dagger - a),$$

where $a, a^\dagger$ are annihilation and creation operators having the properties

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

find

$$\langle \Delta x^2 \rangle_n \langle \Delta p^2 \rangle_n$$

for a one-dimensional harmonic oscillator in the state $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$.

IV(30 marks) Consider the Dirac equation in one dimension

$$H\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

where

$$H = c\alpha p_z + \beta mc^2 + V(z) = c\alpha \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \right) + \beta mc^2 + V(z)$$

where

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

I being the 2×2 unit matrix.

Show that σ commutes with H and use the result to show that the one-dimensional Dirac equation can be written as two coupled first order differential equations.

7

Solution

Examen de Conocimiento 2019-1

$$\begin{aligned} \text{I. (i)} \quad [A, B, C] &= ABC - CAB \\ &= A(BC - CB) + (AC - CA)B \\ &= A[B, C] + [A, C]B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad [x, p_x] f(x) &= x p_x f(x) - p_x (x f(x)) \\ &= x i\hbar \frac{\partial f}{\partial x} - i\hbar \frac{\partial}{\partial x} (x f) \\ &= x i\hbar \frac{\partial f}{\partial x} - i\hbar f - i\hbar x \frac{\partial f}{\partial x} \\ \Rightarrow [x, p_x] &= -i\hbar \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II. (i)} \quad \langle x, p_x \rangle &= \int \psi^*(x, t) x p_x \psi(x, t) dx \\ \frac{d}{dt} \langle x, p_x \rangle &= \int \left\{ \frac{\partial \psi^*}{\partial t} x p_x \psi(x, t) + \psi^* x p_x \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\} dx \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -\frac{i}{\hbar} H \psi & \frac{\partial \psi^*}{\partial t} &= \frac{i}{\hbar} (H \psi)^* \\ \frac{d}{dt} \langle x, p_x \rangle &= \frac{i}{\hbar} \int \left\{ (H \psi)^* x p_x \psi - \psi^* x p_x H \psi \right\} dx \end{aligned}$$

✓ H is Hermitian so $(H\psi)^* = \psi^* H$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \langle x p_x \rangle &= \frac{i}{\hbar} \int \psi^* [H x p_x - x p_x H] \psi dx \\ &= \frac{i}{\hbar} \int \psi^* [H, x p_x] \psi dx \\ &= \frac{i}{\hbar} \langle [H, x p_x] \rangle\end{aligned}$$

(II) $[H, x p_x] = -[x p_x, H]$

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + V$$

$$[x p_x, H] = x [p_x, H] + [x, H] p_x$$

p_x commutes with p_x^2 and x with $V(x)$

Hence, $[x p_x, H] = x [p_x, V] + \left[x, \frac{p_x^2}{2m} \right] p_x$

$$\begin{aligned}\text{Also } [x, \frac{p_x^2}{2m}] &= 2i\hbar p_x \\ [p_x, V(x)] &= \frac{\hbar}{i} \frac{dV}{dx}\end{aligned} \rightarrow [x p_x, H] = -i\hbar x \frac{dV}{dx} + 2i\hbar p_x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \langle x p_x \rangle = \left\langle 2 \left(\frac{p_x^2}{2m} \right) - x \frac{dV}{dx} \right\rangle$$

For stationary states the left hand side is zero
 $\Rightarrow \langle 2T \rangle = \left\langle x \frac{dV}{dx} \right\rangle$

$$3/ \quad \underline{\text{II}} \quad x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger) \quad p = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (a^\dagger - a)$$

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

Using these operators, we have

$$\langle n|x|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle n|a + a^\dagger|n\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sqrt{n} \langle n|n-1\rangle + \sqrt{n+1} \langle n|n+1\rangle = 0$$

$$\langle n|x^2|n\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \langle n|(a + a^\dagger)(a + a^\dagger)|n\rangle$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega} \left(\sqrt{n} \langle n|a + a^\dagger|n-1\rangle + \sqrt{n+1} \langle n|a + a^\dagger|n+1\rangle \right)$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega} \left[\sqrt{n(n-1)} \langle n|n-2\rangle + n \langle n|n\rangle + (n+1) \langle n|n\rangle + \sqrt{(n+1)(n+2)} \langle n|n+2\rangle \right]$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega} (2n+1)$$

Similarly $\langle n|p|n\rangle = 0$, $\langle n|p^2|n\rangle = \frac{m\hbar\omega}{2} (2n+1)$

$$= D(\Delta x^2)_n = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle_n = \frac{\hbar}{2m\omega} (2n+1)$$

$$4/ \quad (\Delta p^2)_n = \langle p^2 \rangle_n - \langle p \rangle_n^2 = \frac{m\hbar\omega(2n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow \langle \Delta x^2 \rangle_n \langle \Delta p^2 \rangle_n = \hbar^2 \left(n + \frac{1}{2}\right)^2.$$

IV

$$H\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$$H = c\alpha p_z + \beta mc^2 + V(z)$$

$$= c\alpha \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial z}\right) + \beta mc^2 + V(z)$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}$$

To show that σ commutes with H :

$$[\sigma, \alpha] = \left[\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$[\sigma, \beta] = \left[\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \right] = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Therefore, } [\sigma, H] &= [\sigma, c\alpha p_z + \beta mc^2 + V] \\ &= c[\sigma, \alpha] p_z + [\sigma, \beta] mc^2 = 0 \end{aligned}$$

Since $[\sigma, H] = 0$, σ and H have common eigenfunctions.

5/ Let the eigenfunction be $\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$

$$\sigma \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ -\psi_2 \\ \psi_3 \\ -\psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ 0 \\ \psi_3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_2 \\ 0 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

It is easy to check that $\begin{pmatrix} \psi_1 \\ 0 \\ \psi_3 \\ 0 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} 0 \\ \psi_2 \\ 0 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$

are eigenfunctions of σ

with eigenvalues $+1$ and -1 respectively.

Substituting these in the Dirac equation and after some algebra we get,

$$\left(-i\hbar c \frac{\partial}{\partial z} + V\right) \begin{pmatrix} \psi_3 \\ 0 \\ \psi_1 \\ 0 \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ 0 \\ -\psi_3 \\ 0 \end{pmatrix} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ 0 \\ \psi_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

and

$$6) \left(-i\hbar c \frac{\partial}{\partial z} + V \right) \begin{pmatrix} 0 \\ -\psi_4 \\ 0 \\ -\psi_2 \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_2 \\ 0 \\ -\psi_4 \end{pmatrix} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_2 \\ 0 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

Each of these represents two coupled differential equations.

If we now choose $\psi_3 \rightarrow -\psi_4$
and $\psi_1 \rightarrow \psi_2$

$$\left(-i\hbar c \frac{\partial}{\partial z} + V \right) \begin{pmatrix} -\psi_4 \\ 0 \\ \psi_2 \\ 0 \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} \psi_2 \\ 0 \\ \psi_4 \\ 0 \end{pmatrix} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi_2 \\ 0 \\ -\psi_4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Thus the one-dimensional Dirac-equation can be written as two coupled first order differential equations.

EXAMEN DE CONOCIMIENTOS DEL PROGRAMA DE DOCTORADO EN FÍSICA MECÁNICA ESTADÍSTICA Y TERMODINÁMICA

Enero 15 de 2019

1. Podemos modelar la dependencia de la temperatura T de la contribución $C_s(T)$ del spin a la capacidad calorífica $C(T)$ de un sólido, con N átomos magnéticos de spin $\frac{1}{2}$, en su fase ferromagnética con temperatura de Curie T_c , mediante la expresión,

$$C_s(T) = C_m[(2T/T_c) - 1],$$

aproximación que tomamos como válida en el intervalo $\frac{1}{2}T_c < T < T_c$.

(a) Calcule la constante C_m , igual a la máxima contribución magnética C_s a la capacidad calorífica C del sólido, explícitamente. (Ayuda: la respectiva contribución S_s , del spin, a la entropía total S del sólido puede ser útil). (15 pts.)

(b) De manera más precisa, ¿puedes decir algo sobre el comportamiento de C_s por fuera del intervalo considerado, específicamente para temperaturas muy altas y para $T \rightarrow 0$? (5 pts.)

2. Una nevera se usa para congelar una cantidad adicional de agua de masa m que está en equilibrio térmico con hielo a una temperatura T_0 . Siendo L el calor latente de fusión del hielo por unidad de masa, el calor extraído por el refrigerador en este proceso se aprovecha para calentar un cuerpo de capacidad calorífica C , inicialmente a la misma temperatura T_0 de equilibrio de la mezcla. ¿Cuál es la mínima cantidad de calor que la nevera puede entregar a dicho cuerpo? (20 pts.)

3. El modelo de Ising 1-dimensional es un sistema de N spins s_i , sobre una red periódica unidimensional, que interactúan magnéticamente solo entre los vecinos más cercanos, a través de su componente z (se asume que las interacciones a través de las componentes x , y , son despreciables, y se toma $s_{iz} = s_i$) y bajo la acción de un campo magnético externo $\mathbf{B}$. El hamiltoniano del sistema está dado por:

$$H = -j \sum s_i s_{i+1} - B \sum s_i$$

donde las sumatorias van desde $i = 1$ hasta $i = N$, el sistema es homogéneo ($j_{i, i+1} = -j$, $B_i = B$), $s_i = \pm 1$, en las constantes j y B se absorben otras constantes como las de Planck, momento magnético, numéricas, etc., y se asumen condiciones periódicas de frontera: $s_{N+1} = s_1$.

(a) Hallar la función de partición Z_N del sistema. Considerar el límite termodinámico, $N \rightarrow \infty$. (20 pts.)

(b) ¿Presenta el sistema magnetización espontánea? Demostrar en el límite termodinámico. (10 pts.)

4. En su teoría de los sólidos de 1906, Einstein considera los N átomos del sólido, de volumen V 3-dimensional, como un conjunto de $3N$ osciladores armónicos simples cuánticos, independientes, distinguibles y vibrando a una frecuencia fija ω .

(a) Halle la función de partición Z_N como una función de la temperatura T y del volumen V . (15 pts.)

(b) Halle la energía libre de Helmholtz. (2.5 pts.). Obtenga la entropía del sólido de Einstein. (2.5 pts.)

(d) Encuentre el calor específico por átomo y esquematice gráficamente la curva correspondiente desde $T = 0$ hasta T alta ambiental. ¿Cómo es su comportamiento para $T \rightarrow 0$, y cómo se compara con la realidad experimental? (10 pts.)

SOLUCIÓN:

EXAMEN DE CONOCIMIENTOS DEL PROGRAMA DE DOCTORADO EN FÍSICA MECÁNICA ESTADÍSTICA Y TERMODINÁMICA

Enero 15 de 2019

NOMBRE: Profesor: José Rolando Roldán CÓDIGO: _____ NOTA: _____ /100

1. Podemos modelar la dependencia de la temperatura T de la contribución $C_s(T)$ del spin a la capacidad calorífica $C(T)$ de un sólido, con N átomos magnéticos de spin $\frac{1}{2}$, en su fase ferromagnética con temperatura de Curie T_c , mediante la expresión,

$$C_s(T) = C_m[(2T/T_c) - 1],$$

aproximación que tomamos como válida en el intervalo $\frac{1}{2}T_c < T < T_c$.

- (a) Calcule la constante C_m , igual a la máxima contribución magnética C_s a la capacidad calorífica C del sólido, explícitamente. (Ayuda: la respectiva contribución S_s , del spin, a la entropía total S del sólido puede ser útil). (15 pts.)
- (b) De manera más precisa, ¿puedes decir algo sobre el comportamiento de C_s por fuera del intervalo considerado, específicamente para temperaturas muy altas y para $T \rightarrow 0$? (5 pts.)

2. Una nevera se usa para congelar una cantidad adicional de agua de masa m que está en equilibrio térmico con hielo a una temperatura T_0 . Siendo L el calor latente de fusión del hielo por unidad de masa, el calor extraído por el refrigerador en este proceso se aprovecha para calentar un cuerpo de capacidad calorífica C , inicialmente a la misma temperatura T_0 de equilibrio de la mezcla. ¿Cuál es la mínima cantidad de calor que la nevera puede entregar a dicho cuerpo? (20 pts.)

3. El modelo de Ising 1-dimensional es un sistema de N spins s_i , sobre una red periódica unidimensional, que interaccionan magnéticamente solo entre los vecinos más cercanos, a través de su componente z (se asume que las interacciones a través de las componentes x , y , son despreciables, y se toma $s_{iz} = s_i$) y bajo la acción de un campo magnético externo constante H_0 . El hamiltoniano del sistema está dado por:

$$H = -j \sum_i s_i s_{i+1} - B \sum_i s_i$$

donde las sumatorias van desde $i = 1$ hasta $i = N$; el sistema es homogéneo ($j_{i+1} = -j$, $B_i = B$); $s_i = \pm 1$; en las constantes j y B se absorben otras constantes como las de Planck, H_0 , momento magnético, numéricas, etc.; y se asumen condiciones periódicas de frontera: $s_{N+1} = s_1$.

- (a) Hallar la función de partición Z_N del sistema. Considerar el límite termodinámico, $N \rightarrow \infty$. (20 pts.)
- (b) ¿Presenta el sistema magnetización espontánea? Demostrar en el límite termodinámico. (10 pts.)

4. En su teoría de los sólidos de 1906, Einstein considera los N átomos del sólido, de volumen V 3-dimensional, como un conjunto de $3N$ osciladores armónicos simples cuánticos, independientes, distinguibles y vibrando a una frecuencia fija ω .

- (a) Halle la función de partición Z_N como una función de la temperatura T . (15 pts.)
- (b) Halle la energía libre de Helmholtz. Obtenga la entropía del sólido de Einstein. (5 pts.)
- (c) Encuentre el calor específico por átomo y esquematice gráficamente la curva correspondiente desde $T = 0$ hasta T alta ambiental. ¿Cómo es su comportamiento para $T \rightarrow 0$, y cómo se compara con la realidad experimental? (10 pts.)

SOLUCIÓN:

1(a) El cambio en la entropía de los espines S_s se puede calcular fácilmente según el cambio en el número de estados de espín Ω_s accesibles al sistema. Este cambio en la entropía S_s también se puede calcular térmicamente mediante $C_s(T)$; de lo anterior debe surgir una relación para C_m :

Para $T > T_c$: $\Omega_s = 2^N$ (para espín $\frac{1}{2}$).

Para $T = \frac{1}{2}T_c$ asumimos, aproximadamente, alineación máxima de espines: $\Omega_s = 1$.

$$\Rightarrow \Delta S_s = k \ln \Omega_s(T_c) - k \ln \Omega_s(\frac{1}{2}T_c) = k \ln 2^N - k \ln 1 \Rightarrow \Delta S_s = Nk \ln 2 \quad (1)$$

Térmicamente: $\Delta S_s = S_s(T_c) - S_s(\frac{1}{2}T_c) = \int_{\frac{1}{2}T_c}^{T_c} \frac{dQ_s}{T} = \int_{\frac{1}{2}T_c}^{T_c} \frac{C_s(T)dT}{T} =$

$$= C_m \int_{\frac{1}{2}T_c}^{T_c} \left(2\frac{T}{T_c} - 1\right) \frac{dT}{T} = \frac{2C_m}{T_c} \left(T_c - \frac{1}{2}T_c\right) - C_m \ln\left(\frac{T_c}{\frac{1}{2}T_c}\right) = C_m(1 - \ln 2) \quad (2)$$

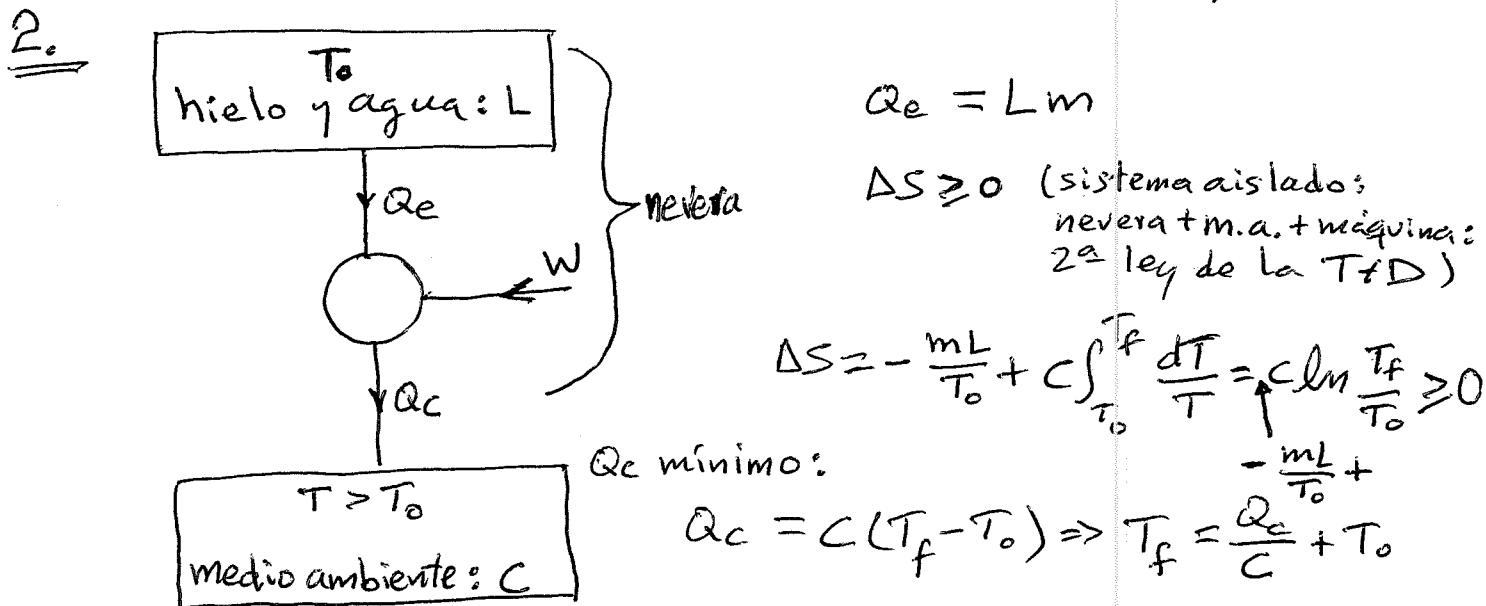
Iguando (1) y (2) $\Rightarrow C_m(1 - \ln 2) = Nk \ln 2$

$$\Rightarrow \boxed{C_m = \frac{\ln 2}{1 - \ln 2} Nk}$$

$$[\Rightarrow C_m = \frac{0.693}{0.307} Nk = 2.27 Nk]$$

(b) Para temperaturas muy altas: $T \gg T_c$, las orientaciones de los espines son totalmente aleatorias, desorden total debido a que la energía térmica kT es mucho mayor que la energía magnética de orientación de los espines, luego en ese régimen $C_s = 0$.

Para temperaturas muy bajas, específicamente: $T \rightarrow 0$, en fase ferromagnética, los espines se orientan todos en una misma dirección, orden total, la entropía es nula constantemente ($T \ll T_c$) y $C_s = 0$.



$$\Rightarrow -\frac{mL}{T_0} + C \ln\left(\frac{Q_c}{CT_0} + 1\right) \geq 0 \Rightarrow \frac{Q_c}{CT_0} + 1 \geq e^{\frac{mL}{CT_0}}$$

$$\Rightarrow Q_c \geq CT_0 e^{\frac{mL}{CT_0}} - CT_0 \Rightarrow \boxed{Q_{c \min} = CT_0 (e^{\frac{mL}{CT_0}} - 1)}$$

3. y 4. : Consultar diversos textos de Mecánica Estadística con toda una variedad de enfoques y métodos de solución.