Universidad de los Andes - Departamento de Física
Examen de conocimientos: Electrodinámica
17 de julio de 2018, 2pm - 5pm.

Nombres y apellidos:

Código:

Fundamente todas sus respuestas argumentando con leyes físicas donde corresponda. Justifique todos los pasos que realice. Sea claro y concreto en su redacción. Escriba con letra clara. No se permite el uso de fórmulas ni calculadora.
En este examen pts se usa como acrónimo de puntos.

Pregunta 1. Alambres transportando corriente (20 pts) Tres alambres conductores rectos de longitud infinita transportan cada uno una corriente I, yendo todas las corrientes en la misma dirección. Los alambres están separados una distancia b entre ellos y son paralelos entre sí. Todos tienen el mismo radio, el cual es despreciable comparado con las distancias de separación entre ellos.
a. (4 pts) Cuál es la forma y dirección de las líneas de campo magnético de esta configuración? Realice un dibujo claro que ilustre sus cálculos.
b. (6 pts) Calcule la localización de los dos puntos donde el campo magnético de esta configuración se anula. Realice un dibujo claro que apoye sus cálculos.
c. (10 pts) El alambre del medio es desplazado una distancia δ como se muestra en la Figura 1 y es dejado en libertad. Cuáles son las fuerzas sobre el? Realice un diagrama de cuerpo libre. Cuál es el movimiento resultante? Es periódico? Nota: mientras el alambre del medio se mueve los alambres de los extremos permanecen fijos.

Pregunta 2. Capacitor y relatividad (20 pts) Un capacitor de placas paralelas está en reposo en un sistema inercial S_0. En este sistema las placas del capacitor tienen densidad de carga $\pm\,\sigma_0$ y están inclinadas un ángulo de 45° respecto al eje x_0, como se muestra en la Figura 2. Un sistema inercial S se esta moviendo a la derecha del origen de S_0 con sus ejes x, y, z paralelos a los ejes x_0, y_0, z_0 de S_0. El sistema inercial S tiene una velocidad relativa v respecto al sistema inercial S_0. La velocidad v no es despreciable respecto a la velocidad de la luz.
a. (2 pts) Encuentre la magnitud y dirección del campo eléctrico $\vec{E_0}$ en S_0.
b. (5 pts) Encuentre la magnitud y dirección del campo eléctrico $\vec{E}$ en S.
c. (4 pts) Determine el valor del ángulo que cada placa del condensador forma con el eje x, en el sistema inercial S.
d. (9 pts) En el sistema inercial S, el campo eléctrico $\vec{E}$ es perpendicular a las placas? Determine el ángulo entre el vector normal a placas y el campo eléctrico $\vec{E}$ en el sistema inercial S.

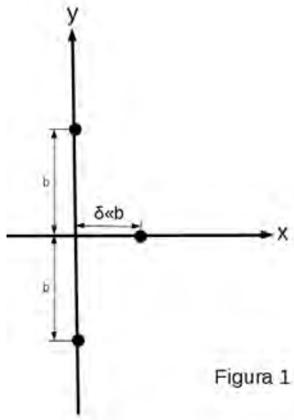


Figura 1

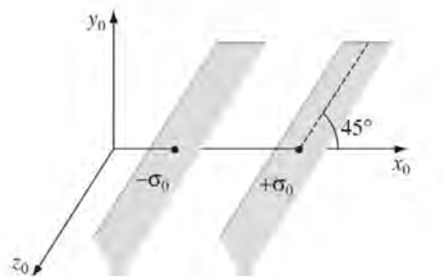


Figura 2

Pregunta 3. Esfera dieléctrica (30 pts) Una esfera dieléctrica de radio a y constante dieléctrica ϵ_1 es puesta en un líquido dieléctrico de extensión infinita y constante dieléctrica ϵ_2. Inicialmente en el líquido está presente un campo eléctrico que a grandes distancias (respecto a la esfera) tiende a un valor constante E.
a. (22 pts) Encuentre el potencial eléctrico dentro y fuera de la esfera.
b. (8 pts) Calcule el campo eléctrico resultante dentro y fuera de la esfera.

Pregunta 4. Campo magnético (30 pts) Un cascarón esférico de radio a con densidad de carga superficial σ uniforme, gira respecto a un eje que pasa por su centro con una velocidad angular ω.
a. (24 pts) Calcule el potencial vector $\vec{A}$ en todos los puntos al interior y al exterior del cascarón esférico.
b. (6 pts) Calcule el campo magnético $\vec{B}$ en todos los puntos al interior y al exterior del cascarón esférico.
Ayudas:
$\int_{-1}^{1} P_l^m(x)\, P_{l'}^m(x)\, dx = \dfrac{2}{2l+1}\dfrac{(l+m)!}{(l-m)!}\,\delta_{l,l'}$
$P_l^1(\cos\theta) = -\sin\theta$

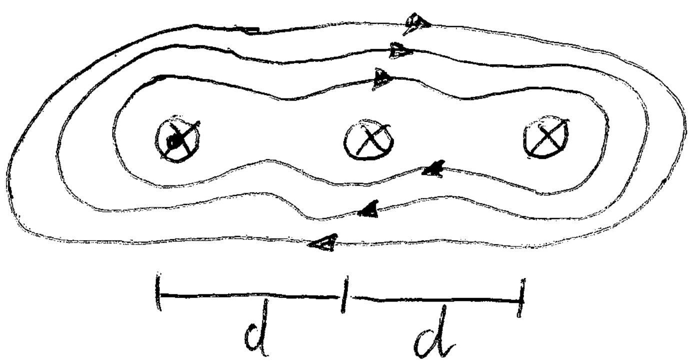
$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} = \mathbf{e}_1 \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_3) - \frac{\partial A_2}{\partial\phi}\right] + \mathbf{e}_2\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_1}{\partial\phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_3)\right] + \mathbf{e}_3\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_2) - \frac{\partial A_1}{\partial\theta}\right]$$

EXAMEN DE CONOCIMIENTOS SOLUCIÓN

ELECTRODINÁMICA JULIO 2018

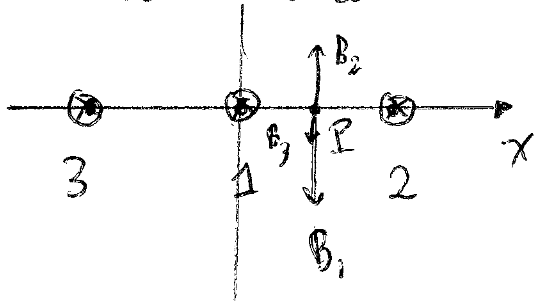
PROBLEMA 1.

1a. Supongamos que los tres alambres son perpendiculares al plano de esta hoja y que $\vec{J}$ va entrando a la hoja (dirección negativa). Usando la ley de Ampere y superponiendo los tres campos magnéticos, la configuración de las líneas de campo resultante, es la mostrada en la figura de abajo:



1.b. Para cada punto donde el campo magnético se anula, se satisface que: $\vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 = 0$

Tomando un sistema de coordenadas centrado en el alambre del medio, con el eje x a lo largo de los tres alambres como se muestra en la figura:



En el punto P se satisface que

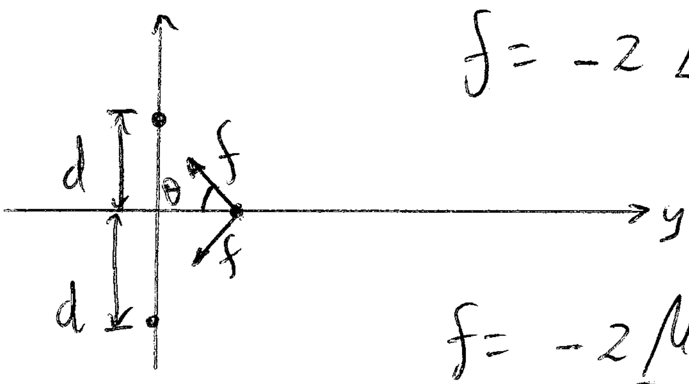
$B_1 + B_3 = B_2$

Así usando esta corrección y la ley de Ampere se tiene que en P:

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi x} + \frac{\mu_0 I}{2\pi (x+d)} = \frac{\mu_0 I}{2\pi (d-x)}$$

cuya solución es: $\boxed{x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} d}$

1.C. Cuando el alambre es desplazado una pequeña distancia en la dirección perpendicular a la línea que une los tres alambres, surge una fuerza restauradora por unidad de longitud, tal como se muestra en el siguiente gráfico:



$$f = -2 \frac{\mu_0 I^2}{2\pi \sqrt{d^2+y^2}} \cos\theta$$

$$f = -2 \frac{\mu_0 I^2}{2\pi \sqrt{d^2+y^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{d^2+y^2}}$$

$$f = -\frac{\mu_0 I^2}{\pi d^2} y$$ como $y \ll d$

Esta fuerza por unidad de longitud es proporcional y opuesta al desplazamiento. Así que bajo la condición de $y \ll d$ el sistema oscilará armónicamente con un periodo $P = 2\pi \sqrt{\frac{\pi m}{\mu_0}} \frac{d}{I}$

donde m es la masa por unidad de longitud del alambre.

PROBLEMA 2.

2.a La magnitud del campo eléctrico es $\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$, y el vector $\vec{E}_0$ está dirigido desde la placa positiva a la negativa. Así: $\vec{E}_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\left(-\cos 45\,\hat{i} + \sin 45\,\hat{j}\right)$

$$\vec{E}_0 = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2}\,\varepsilon_0}\left(\hat{i}+\hat{j}\right)$$

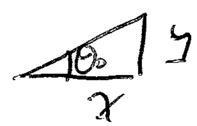
2.b. De las ecuaciones de la transformación de los campos eléctricos, se tiene que:

$$E_x = E_{x0} = -\frac{\sigma_0}{\sqrt{2}\,\varepsilon} \quad y \quad E_y = \gamma E_{y0} = \gamma\frac{\sigma_0}{\sqrt{2}\,\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2}\,\varepsilon_0}\left(-\hat{i}+\gamma\hat{j}\right)$$

2.c De la contracción de Lorentz se tiene que

$$x' = \frac{x}{\gamma} \quad y \quad \tan\theta = \frac{y}{x'} = \gamma\frac{y}{x}$$

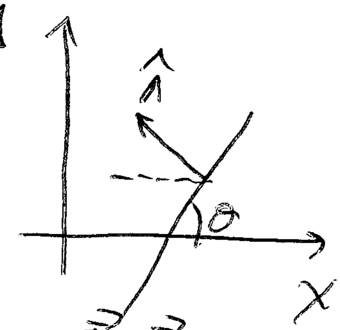


Como $\frac{y}{x} = \tan\theta_0 = \tan 45 = 1$ se tiene que

$$\tan\theta = \gamma \Rightarrow \boxed{\theta = \tan^{-1}\gamma}$$

2.d Sea $\hat{n}$ un vector unitario perpendicular a las placas en el sistema S. Así $\hat{n} = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}$

$$|\vec{E}| = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2}\,\varepsilon_0}\sqrt{1+\mu^2}$$



El ángulo entre $\hat{n}$ y $\vec{E}$ es $\quad \cos\phi = \dfrac{\vec{E}\cdot\vec{n}}{|\vec{E}|}$

$$\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}\left(\operatorname{sen}\theta + \mu\cos\theta\right) = \frac{\cos\theta}{\sqrt{1+\mu^2}}\left(\operatorname{tg}\theta + \mu\right)$$

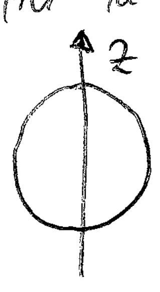
$= \dfrac{2\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\cos\theta$. Como $\mu = \operatorname{tg}\theta = \dfrac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta} \Rightarrow$

$\dfrac{1}{\cos^2\theta} = \mu^2+1 \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$ Así:

$\cos\phi = \left(\dfrac{2\mu}{1+\mu^2}\right)$ Evidentemente el campo no es perpendicular a las placas en S.

PROBLEMA 3

3.a Poniendo un sistema de coordenadas con el origen en el centro de la esfera y con el eje z orientado como muestra la figura, de tal manera que el campo eléctrico



presente en el líquido, está dirigido en la dirección del eje z.

Por la simetría del problema, se puede escribir el potencial en puntos al interior de la esfera (ϕ_1) y al exterior (ϕ_2) como:

$$\phi_1 = \sum_{n=0} \left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta)$$

$$\phi_2 = \sum_{n=0} \left(C_n r^n + \frac{D_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta)$$

A_n, B_n, C_n y D_n son coeficientes a determinar y P_n son los polinomios de Legendre.

Las condiciones de frontera del problema son:

1. ϕ_1 es finito en $r=0$
2. $\phi_2 \Big|_{r\to\infty} = -Er\cos\theta = -Er P_1(\cos\theta)$
3. $\phi_1 = \phi_2 \Big|_{r=a}$ y $\varepsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial r_1} = \varepsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial r} \Big|_{r=a}$

De las condiciones 1 y 2 se obtiene:

$B_n = 0$; $C_1 = -E$ y $C_n = 0$ $(n \neq 1)$

De la condiciones dadas en 3, se obtiene que:

$$-Ea P_1(\cos\theta) + \sum_n \frac{D_n}{a^{n+1}} P_n(\cos\theta) = \sum_n A_n a^n P_n(\cos\theta)$$

$$-\varepsilon_2 \left[E P_1(\cos\theta) + \sum_n (n+1) \frac{D_n}{a^{n+2}} P_n(\cos\theta) \right] = \varepsilon_1 \sum_n A_n a^{n-1} P_n(\cos\theta)$$

Estas ecuaciones deben satisfacerse para cada uno de los posibles ángulos θ. De esta forma los coeficientes de $P_n(\cos\theta)$ deben ser iguales (para cada n) a ambos lados de cada ecuación. Así se obtiene que:

$$A_1 = -\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}E \quad ; \quad D_1 = \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}Ea^3$$

$$A_n = D_n = 0 \quad (n \neq 1)$$

Así, podemos escribir el potencial dentro y fuera de la esfera como:

$$\phi_1 = -\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}Er\cos\theta$$

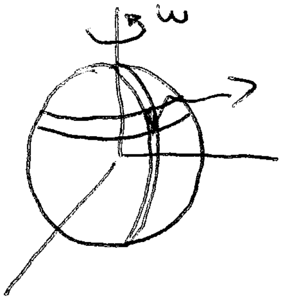
$$\phi_2 = -\left[1-\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}\left(\frac{a}{r}\right)^3\right]Er\cos\theta$$

3.b Por lo tanto los campos eléctricos dentro y fuera de la esfera son dados por:

$$\vec{E}_1 = -\vec{\nabla}\phi_1 = \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}\vec{E} \quad (r<a)$$

$$\vec{E}_2 = -\vec{\nabla}\phi_2 = \vec{E} + \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}a^3\left[\frac{3(\vec{E}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5}-\frac{\vec{E}}{r^3}\right] \quad (r>a)$$

PROBLEMA 4



$$dA = a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$\vec{J}\, dv = i\, d\vec{l} = \frac{dq}{dt} d\vec{l} = dq\, d\vec{v} = \sigma\, dA\, \vec{v}$$

$$\vec{J}\, dv = \sigma\, dA\, (\omega a \sin\theta)\, \hat{e}_\varphi$$

$$\int \vec{J}\, dv = \int \sigma \omega a \sin\theta\, \hat{e}_\varphi\, dA = \int \sigma \omega a^3 \sin^2\theta\, d\theta\, d\varphi\, \hat{e}_\varphi$$

$$= \int \sigma \omega a^3 \sin^2\theta\, d\theta\, d\varphi\, \hat{e}_\varphi = \int \sigma \omega a^3 \sin^2\theta\, d\theta\, d\varphi\, \hat{e}_\varphi \int \delta(r-a)\, dr$$

$$\vec{J}(\vec{r}\,') = \sigma a \omega \sin\theta'\, \delta(r'-a)\, \hat{e}_{\varphi'}$$

donde $\hat{e}_{\varphi'} = -\hat{i} \sin\varphi' + \hat{j} \cos\varphi'$ Así se obtiene que:

$$\vec{A}(r) = \frac{\pi \sigma a \omega}{c} \sum_l \frac{(l-1)!}{(l+1)!} P_l^1(\cos\theta) \int P_l^1(\cos\theta') \sin^2\theta'\, d\theta' \, *$$

$$\int_0^\infty \frac{r_<^l r'^2 \delta(r'-a)}{r_>^{l+1}} \times \frac{\left[\frac{-\hat{i}}{i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) + \hat{j}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})\right]}{2\hat{e}_\varphi}$$

Para integrar en r' tenemos:

$$\text{para } r < a \quad \int_0^\infty = \frac{r^l}{a^{l-1}} = a^2 \frac{r^l}{a^{l+1}}$$

$$\text{para } r > a \quad \int_0^\infty = \frac{a^{l+2}}{r^{l+1}} = a^2 \frac{a^l}{r^{l+1}}$$

$$\left.\right\} = \frac{a^2 r_<^l}{r_>^{l+1}}$$

con $r_>$ el mayor menor entre r y a

Así se tiene que:

$$\vec{A} = \frac{2\pi\sigma a^3\omega}{c}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{r_<^{l}}{r_>^{l+1}}\frac{(l-1)!}{(l+1)!}P_l^1[\cos\theta]\int_0^{\pi}P_l^1(\cos\theta')\,*$$

$$\operatorname{sen}^2\theta'\,d\theta'\,\hat{e}_\varphi$$ Así:

$$A_\varphi(\vec{r}) = \frac{4\pi\sigma\omega a^3}{3c}\frac{r_<}{r_>^2}\operatorname{sen}\theta$$

En el interior $$A_\varphi = \frac{4\pi\sigma\omega a}{3c}\,r\operatorname{sen}\theta$$

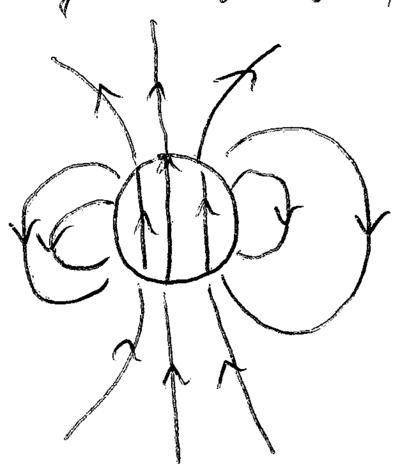
y $$\vec{B} = \frac{8\pi\sigma\omega a}{3c}(\hat{e}_r\cos\theta - \hat{e}_\theta\operatorname{sen}\theta)$$

$$\vec{B} = \frac{8\pi\sigma\omega a}{3c}\hat{k}$$

En el exterior $$A_\varphi = \frac{4\pi\sigma\omega a^4}{3c}\frac{\operatorname{sen}\theta}{r^2}$$

$$\vec{B} = \frac{4\pi\sigma\omega a^4}{3cr^3}\left[2\hat{e}_r\cos\theta + \hat{e}_\theta\operatorname{sen}\theta\right]$$

Un esquema de las líneas de campo es el siguiente:



Problema 1. Globo acelerado (20 puntos)

Es conocido que un péndulo que cuelga del techo de un carro que acelera hacia adelante se inclina hacia atrás. Por el contrario, si se tiene un globo de helio sujeto al piso de un carro por medio de una cuerda sin masa, se observa que si el carro se mueve hacia adelante con una aceleración A, el globo tiende a inclinarse hacia adelante.

a. (5 puntos). Dibuje el diagrama de cuerpo libre para el globo.
b. (10 puntos). Expique claramente por qué el globo se comporta de esta manera.
c. (5 puntos). Calcule el ángulo de inclinación del globo con respecto a la vertical en el caso de equilibrio.

Ayuda: Recuerde que el globo flota debido a la fuerza de Arquímedes.

Problema 2. Aterrizando en Marte (20 puntos)

Una nave espacial de masa m se acerca al planeta Marte (de masa M y radio R_M) en una trayectoria parabólica, bajo la acción de la gravedad marciana. La nave alcanza el punto A de mínima distancia al planeta, ubicado a una distancia r_A de Marte, y en ese punto usa sus cohetes para frenar tangencialmente a la trayectoria, disminuyendo su velocidad instantáneamente. Esta frenada instantánea hace que la nave quede en el mismo punto A pero en una trayectoria elíptica, tal que aterriza en Marte tangencialmente, en la forma en que se muestra en la Figura 1.

a. (5 puntos). Obtenga la rapidez v_A de la nave justo antes de frenar.
b. (10 puntos). Obtenga el cambio de energía mecánica debido al frenado.
c. (5 puntos). Determine la rapidez con la que la nave llega a la superficie de Marte.

Ayuda: La energía de una partícula en una trayectoria dada viene dada por la ecuación $E = -\frac{1}{2}\frac{(GM)^2 m^3 (1-e)^2}{L^2}$, *donde* e *es la excentricidad de la órbita y* L *es el momento angular.*

Problema 3. Vigas en caída (30 puntos)

Dos vigas de masa M y longitud L están conectadas por una bisagra y un hilo, ambos de masas despreciables. El sistema descansa sobre una superficie sin rozamiento, en la forma mostrada en la Figura 2. En $t = 0$ el hilo es cortado y las vigas caen moviéndose solamente en el plano XY.

a. (5 puntos). Seleccione la(s) coordenada(s) generalizada(s) que describe(n) adecuadamente el movimiento del sistema. Justifique su selección.
b. (10 puntos). Obtenga el lagrangiano del sistema.
c. (10 puntos). Use las ecuaciones de Euler-Lagrange, para calcular la velocidad de la bisagra cuando golpea el piso.
d. (5 puntos). Obtenga una expresión para el tiempo que tarda la bisagra en caer al piso. Llegará a una integral que no es necesario calcular ni evaluar. Interprete este resultado describiendo, por ejemplo, cómo cambia este tiempo si L cambia, y a qué otro sistema físico se asemejaría el sistema.

Ayuda: El momento de inercia de una viga de masa M y longitud L con respecto a su centro de masa es $I = \frac{1}{12}ML^2$. La expresión $\ddot{\theta} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta}$ puede ser de utilidad.

Problema 4. Tubo de mercurio (30 puntos)

Un tubo liviano, en forma de U, de masa total M está parcialmente lleno de mercurio, de densidad de masa lineal λ. El tubo puede rotar sobre uno de sus extremos verticales, como se muestra en la Figura 3. Para los siguientes cálculos puede despreciar la fricción, la masa y el momento de inercia del tubo y el momento de inercia de la columna de mercurio sobre el eje de rotación.

a. (5 puntos). Calcule la energía potencial de la columna de mercurio y describa su movimiento cuando el tubo no está rotando (use el lagrangiano del sistema para fundamentar físicamente esta descripción).
b. (25 puntos). Considere que el tubo se pone ahora a rotar con una velocidad angular inicial ω_0, y con la columna de mercurio en reposo verticalmente, con un desplazamiento z_0 desde su posición de equilibrio.

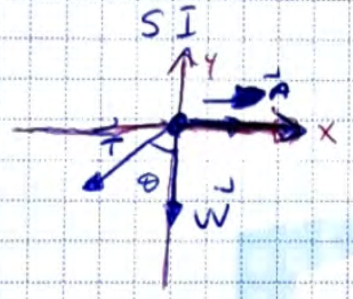
1. (6 puntos). Obtenga el lagrangiano del sistema.
2. (3 puntos). Obtenga la ecuación de movimiento.
3. (6 puntos). Obtenga el hamiltoniano del sistema
4. (5 puntos). Qué cantidades se conservan? Obtenga expresiones para cada una de ellas.
5. (5 puntos). Con base en los resultados obtenidos previamente, describa el movimiento cualitativamente, de la manera más detallada que pueda. Tenga en cuenta para esto las ecuaciones de movimiento y los posibles casos que se puedan dar a partir de estas.

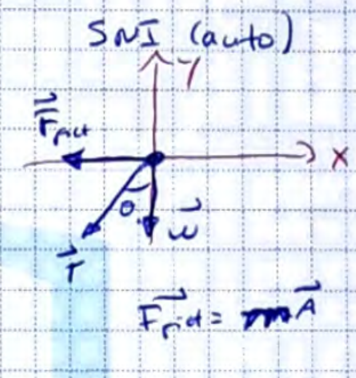
Muchos éxitos!

Solución Examen mecánica

Problema 1:

a)



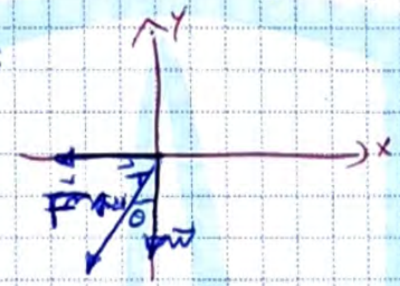


W = peso del globo. T = tensión de la cuerda

b) El principio de Arquímedes dice que el empuje que experimenta un objeto sumergido en un fluido es igual al peso del fluido desplazado por el objeto. Como la densidad del helio del globo es menor que la del aire, este ascenderá debido al empuje de Arquímedes hasta que el peso del globo se equilibre con el empuje. Por otro lado, cuando el carro avanza hacia adelante, se genera un gradiente de velocidad entre el aire fuera del carro y el interior al carro. Esto a su vez hace que haya

Un gradiente de presión, pues habrá menor presión fuera del vehículo (en su parte delantera) que en el interior. El globo tendrá a desplazarse hacia la zona de menor presión, es decir, hacia adelante.

(c) Tomando como sistema de referencia el no inercial tenemos:



$$\Sigma F_x = -mA - T\sin\theta = 0$$

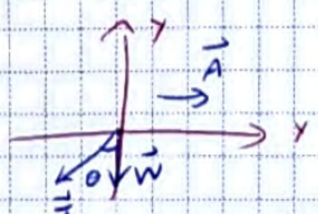
$$\Sigma F_y = -T\cos\theta - mg = 0 \Rightarrow T\cos\theta = -mg \Rightarrow T = -\frac{mg}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow -mA + mg\,tg\theta = 0 \Leftrightarrow \cancel{m}g\,tg\theta = \cancel{m}A \Rightarrow tg\theta = \frac{A}{g}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = tg^{-1}(A/g)}$$

Si se toma el SI como sistema de referencia

$\Rightarrow$



$$\Sigma F_x = mA = -T\sin\theta$$

$$\Sigma F_y = -T\cos\theta - mg = 0$$

$$T = -\frac{mg}{\cos\theta} \Rightarrow mA = mg\,tg\theta$$

$$\boxed{tg\theta = \frac{A}{g}}$$

Problema 2

a) Sabemos de la teoría de fuerzas centrales que si la nave viene con trayectoria parabólica, su energía viene dada por $E = -\frac{1}{2}\frac{(GM)^2 m^3 (1-e^2)}{L^2}$

donde $e = 1$ (órbita parabólica) y por ende

$$\boxed{E = 0}$$

Como E antes de frenar es:

$$E = \frac{1}{2} m v_A^2 - \frac{GMm}{r_A} = 0 \Rightarrow \frac{v_A^2}{2} = \frac{GM}{r_A}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_A = \sqrt{\frac{2GM}{r_A}}}$$

b) Debido a que la fuerza existente sobre la nave es la gravitacional, que es conservativa, se conservan la energía mecánica y el momento angular de la nave.

El cambio de energía es $\Delta E = E_{\text{Justo después de frenar}} - E_{\text{Justo antes de frenar}}$

$$\Delta E = E_{\text{órbita elíptica}} - \cancel{E_{\text{órbita parabólica}}}^{\,0} = E_{\text{órb. elíptica}}$$

Sea V_A' la rapidez de la nave justo después de frenar $\Rightarrow E_{\substack{orb\\ elip}} = \frac{1}{2} m V_A'^2 - \frac{GMm}{r_A} = \Delta E$

Calculamos V_A'! Sea V_B la rapidez justo al aterrizar. Como E se conserva, $\underset{\substack{\text{justo}\\ \text{después de}\\ \text{frenar}}}{E_{A'}} = \underset{\substack{\text{justo}\\ \text{antes de}\\ \text{aterrizar.}}}{E_B}$

$$\rightarrow \boxed{\frac{1}{2} m V_A'^2 - \frac{GMm}{r_A} = \frac{1}{2} m V_B^2 - \frac{GMm}{R_M}} \quad . \text{ I}$$

Por otro lado, L se conserva $\Rightarrow L_{A'} = L_B \rightarrow m r_A V_A' = m R_M V_B$ pues la nave se mueve tangencialmente a la trayectoria.

Así, tenemos: $\boxed{V_B = \frac{r_A}{R_M} V_A'}$ II

Remplazando II en I:

$$\frac{1}{2} \cancel{m} V_A'^2 - \frac{1}{2} \cancel{m} \left(\frac{r_A}{R_M}\right)^2 V_A'^2 = GM\cancel{m} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{R_M}\right)$$

$$\rightarrow \frac{V_A'^2}{2} \left[1 - \left(\frac{r_A}{R_M}\right)^2\right] = GM \left(\frac{R_M - r_A}{r_A R_M}\right)$$

$$\Rightarrow V_A'^2 = \frac{2GM\,(R_m - r_A)}{r_A \cancel{R_m}} \cdot \Big/ \frac{R_m^2 - r_A^2}{R_m^2}$$

$$V_A'^2 = \frac{2GM\,(\cancel{R_m - r_A}) \cdot R_m}{r_A\,(\cancel{R_m - r_A})(R_m + r_A)} = 2GM\,\frac{R_m}{r_A}\,\frac{1}{(R_m + r_A)}$$

$$\Rightarrow \Delta E = \frac{1}{\cancel{2}}\, m \cdot \cancel{2}GM\,\frac{R_m}{r_A}\,\frac{1}{(R_m + r_A)} - \frac{GMm}{r_A}$$

$$\Delta E = GMm\left[\frac{R_m}{r_A}\,\frac{1}{R_m + r_A} - \frac{1}{r_A}\right]$$

$$\Delta E = \frac{GMm}{r_A}\left[\frac{\cancel{R_m} - \cancel{R_m} - r_A}{R_m + r_A}\right]$$

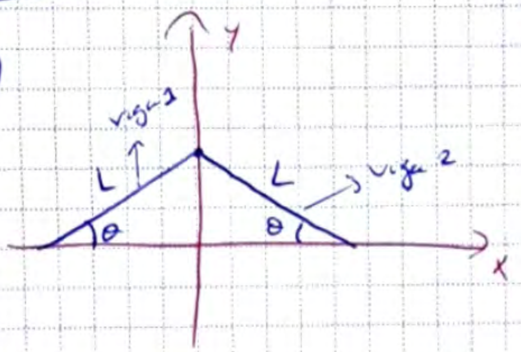
$$\boxed{\Delta E = -\frac{GMm}{R_m + r_A}}$$

c) De (II) $V_B = \frac{r_A}{R_m}\sqrt{2GM\,\frac{R_m}{r_A}\,\frac{1}{(R_m + r_A)}}$

$$\boxed{V_B = \sqrt{\frac{2GM\,r_A}{R_m}\,\frac{1}{(R_m + r_A)}}}$$

Problema 3

a)



Tenemos 2 cuerpos de masa M, longitud L ⇒ 6 grados de libertad. Veamos las ligaduras o restricciones:

- El movimiento es en el plano x,y ⇒ $z_1 = z_2 = cte$, donde 1 y 2 corresponde a las vigas 1 y 2, respectivamente. ⇒ 2 Ligaduras.

- Debido a la unión de ambas vigas por la bisagra, pasan varias cosas, entre ellas:
  1) La longitud es $cte = L + L = 2L$. ⇒ 1 ligadura.
  2) Como las vigas están simétricas respecto a la bisagra, esta cae verticalmente haciendo que $\theta_1 = \theta_2$ en todo tiempo. ⇒ 1 ligadura.

- Los extremos inferiores de las vigas tienen siempre $y_1 = y_2 = 0$ ⇒ 1 ligadura.

En total, tenemos 5 ligaduras. ⇒ sólo se requiere 1 coordenada generalizada. En este caso, elegimos θ, pues describirá perfectamente el movimiento de las vigas. En particular, los centros de masa de las vigas tienen las siguientes coordenadas:

$$x_1 = -\frac{L}{2}\cos\theta \qquad y_1 = L/_2 \sin\theta$$

$$x_2 = +\frac{L}{2}\cos\theta \qquad y_2 = \frac{L}{2}\sin\theta$$

Las componentes de velocidad son:

$$\dot{x}_1 = \frac{L}{2}\sin\theta\,\dot{\theta} \qquad \dot{y}_1 = \frac{L}{2}\cos\theta\,\dot{\theta}$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{L}{2}\sin\theta\,\dot{\theta} \qquad \dot{y}_2 = \frac{L}{2}\cos\theta\,\dot{\theta}$$

b) $$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}M\left[\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2\right] + \frac{1}{2}\left(I_{viga\,1} + I_{viga\,2}\right)\dot{\theta}^2 - Mg\left[y_1 + y_2\right]$$

$$\mathcal{L} = \frac{M}{2}\left[\frac{L^2}{4}\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2 + \frac{L^2}{4}\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2 + \frac{L^2}{4}\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2 + \frac{L^2}{4}\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2\right] + \frac{1}{2}\frac{M}{12}L^2\left[2\right]\dot{\theta}^2 - Mg\left[\frac{L}{2}\sin\theta + \frac{L}{2}\sin\theta\right]$$

$$= \frac{M L^2}{2\cdot 4}\dot{\theta}^2 \cdot 2\left[\sin^2\theta + \cos^2\theta\right]$$

$$+ \frac{M}{12} L^2 \dot{\theta}^2 - MgL\sin\theta$$

$$L = \frac{1}{4} ML^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{12} ML^2\dot{\theta}^2 - MgL\sin\theta$$

$$L = \left(\frac{3+1}{12}\right) ML^2\dot{\theta}^2 - MgL\sin\theta$$

$$\boxed{L = \frac{1}{3} ML^2\dot{\theta}^2 - MgL\sin\theta}$$

c) $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ Ec. Euler-Lagrange.

$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{2}{3} ML^2\dot{\theta}$ $\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{2}{3} ML^2\ddot{\theta}$ $\quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -MgL\cos\theta$

$\Rightarrow \frac{2}{3} \cancel{M} L^{\cancel{2}}\ddot{\theta} + \cancel{M}g\cancel{L}\cos\theta = 0$

$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{3}{2}\frac{g}{L}\cos\theta = 0}$ (A) Queremos calcular v tal que $v = L\dot{\theta}$ $\Rightarrow$

Integramos la ec. (A). Como $\ddot{\theta} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} + \frac{3}{2}\frac{g}{L}\cos\theta = 0 \Rightarrow \frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} = -3\frac{g}{L}\cos\theta$

$$\Rightarrow \int_0^{\dot\theta} d\dot\theta^2 = \int_{30^\circ}^{\theta} -3\frac{g}{L}\cos\theta \, d\theta$$

Pues $\dot\theta = 0$ en $\theta = 30^\circ$, al inicio del movimiento.

$$\Rightarrow \dot\theta^2 = -\frac{3g}{L}\sin\theta \Big|_{30}^{\theta} = -\frac{3g}{L}\left[\sin\theta - \frac{1}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \dot\theta^2 = \frac{3g}{L}\left[\frac{1-2\sin\theta}{2}\right]$$

$$\dot\theta^2 = \frac{3}{2}\frac{g}{L}(1-2\sin\theta) \qquad \boxed{\dot\theta = -\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{L}(1-2\sin\theta)}}$$

donde se elige el signo "−" porque las vigas caen (θ disminuye en t).

$\Rightarrow$ Cuando la bisagra golpea el piso $\theta = 0$

$$\rightarrow \dot\theta = -\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{L}} \quad \text{y} \quad v = \sqrt{\frac{3g}{2L}\cdot L^2}$$

$$\rightarrow \boxed{v = -\sqrt{\frac{3gL}{2}}}$$

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Computación DMA

d) Como $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$

$$\Rightarrow dt = \frac{d\theta}{\dot{\theta}} \Rightarrow t_{\text{caída al piso}} = \int_{30°}^{0} -\frac{d\theta}{\sqrt{\frac{3g}{2L}(1-2\sin\theta)}}$$

$$\Rightarrow t = -\sqrt{\frac{2L}{3g}} \int_{30°}^{0} \frac{d\theta}{\sqrt{1-2\sin\theta}}.$$

Este sistema es similar a un péndulo simple, de modo que si L aumenta, el tiempo de caída aumenta también

Problema 4

a) Siguiendo la figura, llamemos z la distancia desde el extremo superior de la columna de mercurio a la posición de equilibrio. Sea F la fuerza externa sobre las columnas de mercurio que las hace descender $\Rightarrow F = 2\lambda g z$. El trabajo hecho para que el mercurio descienda una longitud dz es

$$dW = F\,dz = 2\lambda g z\,dz \Rightarrow \boxed{V = \lambda g z^2.}$$

Si el sistema no rota $\Rightarrow L = T - V \Rightarrow$ Tomando z como coordenada generalizada, $T = \frac{1}{2}\lambda s \dot{z}^2$, donde $s = l + 2h$ = longitud total de la columna de mercurio.

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}\lambda s \dot{z}^2 - \lambda g z^2$$

Podemos obtener la ecuación de movimiento: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0$ a partir de Ec. de Euler-Lagrange:

$$\Rightarrow \lambda s \ddot{z} + 2\lambda g z = 0 \rightarrow \ddot{z} + \frac{2g}{s} z = 0$$

Sea $\omega^2 = \frac{2g}{s}$

$\Rightarrow \ddot{z} + \omega^2 z = 0$ que es la ecuación de un oscilador armónico.

Así, si el tubo no rota, el movimiento de la columna de mercurio será oscilatorio respecto a la posición de equilibrio, con una frecuencia angular

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{l+2h}}$$

b) Tubo rota con $\omega_0 = \omega_0$, columna desplazada z_0.

(1) Tenemos otro grado de libertad debido a la rotación, y por ende otra coordenada que llamaremos θ. Así,

$$L = T - V \Rightarrow T = \frac{1}{2}\lambda s \dot{z}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

En este caso, I corresponde al del mercurio en forma horizontal (longitud l) + el del mercurio vertical de longitud $h+z$. $\Rightarrow$ El componente horizontal tiene I semejante al de una barra respecto a un eje en su extremo, que es $I = \frac{1}{3} M l^2 = \frac{1}{3}\lambda l^3$

La otra componente tiene momento de inercia $I = \frac{1}{2} M' \ell^2$ donde M' sería equivalente a $\lambda.(h+z)$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\lambda(h+z)\ell^2$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}\lambda s \dot{z}^2 + \frac{1}{2}\lambda\left(\frac{\ell}{3}+h+z\right)\ell^2\dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow \boxed{L = \frac{1}{2}\lambda s \dot{z}^2 + \frac{1}{2}\lambda\left(\frac{\ell}{3}+h+z\right)\ell^2\dot{\theta}^2 - \lambda g z^2}$$

② Tenemos que: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ y $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0$

$\frac{d}{dt}\left(\lambda\left(\frac{\ell}{3}+h+z\right)\ell^2\dot{\theta}\right) = 0$

$\frac{d}{dt}\left(\lambda s \dot{z}\right) - \frac{\lambda}{2}\ell^2\dot{\theta}^2 + 2\lambda g z$

$\lambda s \ddot{z} - \frac{\lambda}{2}\ell^2\dot{\theta}^2 + 2\lambda g z =$

$s\ddot{z} + 2 g z - \frac{1}{2}\ell^2\dot{\theta}^2 = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda\left(\frac{\ell}{3}+h+z\right)\ell^2\dot{\theta} = cte}$$

(A)

$$\boxed{\ddot{z} + \frac{2g}{s}z - \frac{1}{2s}\ell^2\dot{\theta}^2 = 0}$$

(B)

4) De (A) vemos que

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \lambda \left(\frac{l}{3} + h + z\right) l^2 \dot{\theta} = \cancel{cte} \Rightarrow$ Como $P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$,

$\Rightarrow \boxed{P_\theta = cte}$

Como $\dot{\theta} = \omega_0$ a $t=0$ y $\dot{z}=0$ y $z = z_0 \Rightarrow$

$$\boxed{P_\theta = \lambda \left[\frac{l}{3} + h + z_0\right] l^2 \omega_0}$$

Es una cantidad que se conserva,

y De (3) vemos que H es cte.

$\Rightarrow$ Las ctes del movimiento son

$\boxed{P_\theta}$ y $\boxed{H = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{l}{3} + h + z_0\right) l^2 \omega_0^2 + \lambda g z_0^2}$

(3) Como $H = \sum_i \dot{q}_i P_i - L(q_i, \dot{q}_i, t)$,

$$H = P_z \dot{z} + P_\theta \dot{\theta} - L(z, \dot{z}, \theta, \dot{\theta}) \qquad P_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \lambda s \dot{z}$$

$$\rightarrow H = \frac{\lambda s \dot{z}^2}{2} + \frac{\lambda}{2}\left(\frac{l}{3} + h + z\right) l^2 \dot{\theta}^2 + \lambda g z^2$$

$\rightarrow H = T + V =$ Energía total del sistema.

En términos sólo de variables canónicas,

$$\rightarrow \boxed{H = \frac{P_z^2}{2\lambda s} + \frac{P_\theta^2}{2\left(\frac{l}{3} + h + z\right)} + \lambda g z^2}$$

$\rightarrow$ H no depende explícitamente de t $\rightarrow$ $\boxed{H = cte}$ de movimiento. La Energía total se conserva.

Usando condiciones iniciales:

$$H = \frac{\lambda}{2}\left(s \cancel{\dot{z}_0^2} + \left(\frac{l}{3} + h + z_0\right) l^2 w_0^2\right) + \lambda g z_0^2$$

$$\boxed{H = \frac{\lambda}{2}\left[\frac{l}{3} + h + z_0\right] l^2 w_0^2 + \lambda g z_0^2}$$

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Computación D M A

(18) El movimiento de la columna de mercurio tiene 2 componentes.

La primera es asociada a la rotación debida a la rotación del tubo. De la ecuación (A) del numeral (2) vemos que la velocidad angular $\dot{\theta}$ cambia en conexión con el movimiento de la columna hacia arriba y abajo en el tubo (z). Si z aumenta ó decrece y la rotación se afecta, y viceversa, para conservar el momento angular en el eje vertical.

La otra componente del movimiento es la de la columna de mercurio en el tubo, cuya ecuación de movimiento es (B)

$$S\ddot{z} + 2gz - \frac{1}{2}\ell^2\dot{\theta}^2 = 0 \quad (B) \qquad \text{Sea } A = \frac{P_\theta^{\,2}}{2\lambda^2\ell^2} = cte$$

$$= \frac{\lambda^2\left(\frac{\ell}{3}+h+z\right)^2\ell^4\dot{\theta}^2}{2\lambda^2\ell^2} = \frac{\left(\frac{\ell}{3}+h+z\right)^2\ell^2\dot{\theta}^2}{2}$$

$$\Rightarrow (B) \text{ queda: } \quad S\ddot{z} + 2gz - \frac{A}{\left(\frac{\ell}{3}+h+z\right)^2} = 0$$

ó $S\ddot{z} + 2gz = \dfrac{A}{\left(\frac{l}{3}+h+z\right)^2}$ (c) Esta ecuación

es similar a la de un movimiento oscilatorio, pero la posición de equilibrio no será $z=0$, sino la solución a la ecuación:

$$2gz = \frac{A}{\left(\frac{l}{3}+h+z\right)^2}$$

Esta ecuación tiene 3 raíces, por lo tanto, el movimiento tendrá 3 posibles posiciones de equilibrio y alrededor de estas posiciones la columna de mercurio ~~realizará~~ realizará pequeñas oscilaciones.

Por ejemplo, si llamamos z_1 a una de las posiciones de equilibrio, entonces $2gz_1 = \dfrac{A}{\left(\frac{l}{3}+h+z_1\right)^2}$ (d) Así, el movimiento será en términos de $z = z_1 + z'$, con z' un desplazamiento muy pequeño. Así, (c) queda:

$$S(\ddot{z}_1 + \ddot{z}') + 2g(z_1 + z') = \frac{A}{\left(\frac{l}{3}+h+z_1+z'\right)^2}$$

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Computación D M A

$$\Rightarrow S\ddot{z}' + 2gz' = \frac{A}{\left[\left(\frac{l}{3}+h+z_1\right)+z'\right]^2} - 2gz_1$$

$$\boxed{z' \ll 1}$$

Usando (8):

$$S\ddot{z}' + 2gz' = \frac{A}{\left[\left(\frac{l}{3}+h+z_1\right)+z'\right]^2} - \frac{A}{\left(\frac{l}{3}+h+z_1\right)^2}$$

$$= A\left[\frac{\left(\frac{l}{3}+h+z_1\right)^2 - \left[\left(\frac{l}{3}+h+z_1\right)+z'\right]^2}{\left[\frac{l}{3}+h+z_1+z'\right]^2\left[\frac{l}{3}+h+z_1\right]^2}\right]$$

$$= A\left[\frac{\left(\frac{l}{3}+h+z_1\right)^2 - \left[\left(\frac{l}{3}+h+z_1\right)^2 + 2\left(\frac{l}{3}+h+z_1\right)z' + z'^2\right]}{\left[\frac{l}{3}+h+z_1+z'\right]^2\cdot\left[\frac{l}{3}+h+z_1\right]^2}\right]$$

$\to 0$ pues z' pequeño.

$$= A\left[\frac{-2\left(\frac{l}{3}+h+z_1\right)z' - z'^2}{\left[\frac{l}{3}+h+z_1+z'\right]^2\left[\frac{l}{3}+h+z_1\right]^2}\right] = \frac{-2Az'}{\left[\frac{l}{3}+h+z_1+z'\right]^2\left[\frac{l}{3}+h+z_1\right]}$$

Dado que z' es pequeño, aproximadamente tenemos:

$$S\ddot{z}' + 2gz' = \frac{-2Az'}{\left[\left(\frac{l}{3}+h+z_1\right)^3 + 2\left[\frac{l}{3}+h+z_1\right]^2 z' + \left[\frac{l}{3}+h+z_1\right]z'^2\right]} =$$

$$= \frac{-2Az'}{\left[\frac{l}{3}+h+z_1\right]^3\left[1+\frac{2z'}{\left(\frac{l}{3}+h+z_1\right)}+\frac{z'^2}{\left(\frac{l}{3}+h+z_1\right)^2}\right]}$$

$$\simeq \frac{-2Az'}{\left(\frac{l}{3}+h+z_1\right)^3}$$ para $z' << \frac{l}{3}+h+z_1$

$$\Rightarrow \ddot{z}' + \left[\frac{2g}{5}+\frac{2A}{5\left(\frac{l}{3}+h+z_1\right)^3}\right]z' = 0$$

$\Rightarrow$ movimiento armónico oscilatorio, con frecuencia angular

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{5}+\frac{2A}{5\left(\frac{l}{3}+h+z_1\right)^3}}$$

. Se puede agregar que este ω es siempre un valor real, por lo tanto, estas posiciones de equilibrio son estables.

Examen de conocimientos sobre Mecánica Cuántica

Departamento de Física, Universidad de los Andes

Lunes Julio 16, 2018

1. En el tiempo $t = 0$ una partícula en el potencial $V(x) = m\omega^2 x^2/2$ está descrita por la función de onda

$$\psi(x, 0) = A \sum_n (1/\sqrt{2})^n \psi_n(x), \tag{1}$$

donde $\psi_n(x)$ son autoestados de la energía con autovalores $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$.

   a) (10 puntos) Encuentre la constante de normalización A.

   b) (10 puntos) Encuentre una expresión para $\psi(x, t)$ para $t > 0$.

2. (20 puntos)

   Usando la relación de conmutación entre posición y momentum pruebe que

$$\sum_n (E_n - E_0)|\langle n|x|0\rangle|^2 = \text{constante}, \tag{2}$$

donde E_n es la energía correspondiente al autoestado $|n\rangle$. Obtenga el valor de la constante. El Hamiltoniano tiene la forma $H = p^2/2M + V(x)$.

3. (30 puntos) Una pozo infinito unidimensional de ancho L contiene dos partículas de masa m sin espín. La intereacción entre las partículas está descrita por un potencial de energía $V(x_1, x_2) = a\delta(x_1 - x_2)$. Calcule el estado base de energía a primer orden en a.

   Ayuda: recuerde que los autoestados para una partícula en un pozo de potencial infinito de ancho L es $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ para los autovalores $E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$ con $n = 1, 2, \cdots$.

4. Considere un sistema de tres niveles descrito por el Hamiltoniano hermítico

$$H = H_0 + \lambda H_1, \tag{3}$$

donde λ es un número real. Los autoestados de H_0 son $|1\rangle$, $|2\rangle$ y $|3\rangle$, y

$$H_0|1\rangle = 0, \tag{4}$$

$$H_0|2\rangle = \Delta|2\rangle, \tag{5}$$

$$H_0|3\rangle = \Delta|3\rangle. \tag{6}$$

   a) (5 puntos) Escriba la matriz 3×3 más general posible para representar H_1 en la base $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$

b) (25 puntos) Cuando se calcula el espectro de H usando teoría de la perturbación, se encuentra que los autoestados (al menor orden en λ) son $|1\rangle$, $|+\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle + |3\rangle)$, $|-\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle - |3\rangle)$ y los autovalores correspondientes son:

$$E_1 = -\frac{\lambda^2}{\Delta} + O(\lambda^3), \tag{7}$$

$$E_+ = \Delta + \lambda + \frac{\lambda^2}{\Delta} + O(\lambda^3), \tag{8}$$

$$E_- = \Delta - \lambda + O(\lambda^3). \tag{9}$$

Encuentre la mayor cantidad posible de elementos de la matriz H_1 tal como la planteó en el literal a). Ayuda: para facilitar los cálculos exprese H_1 en la representación de la base $|1\rangle$, $|+\rangle$, $|-\rangle$.

(1) La condición de normalización es:

(a)

$$\langle \psi(x,0), \psi(x,0) \rangle = |A|^2 \sum_{m,n} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{(n+m)}{2}} \langle \psi_n, \psi_m \rangle$$

$$= |A|^2 \sum_m \left(\frac{1}{2}\right)^m = 2|A|^2 = 1$$

esto da $\boxed{A = \frac{1}{\sqrt{2}}}$

(b) La función de onda dependiente del tiempo es.

$$\psi(x,t) = e^{-\frac{iHt}{\hbar}} \psi(x,0)$$

$$= \boxed{\sum_n \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1} e^{-i\omega t(n+\frac{1}{2})} \psi_n(x)}$$

(2)

Como $H = \frac{p^2}{2M} + V(x)$

tenemos:

$$[H, x] = \frac{1}{2M}[p^2, x] = -i\hbar \frac{p}{M}$$

y de esta manera:

$$[[H, x], x] = -\frac{i\hbar}{M}[p, x] = \frac{-\hbar^2}{M}$$

con esto tenemos:

$$\langle m | [[H, x], x] | m \rangle = \frac{-\hbar^2}{M}.$$

por otro lado

$$\langle m|\, [[H,x],x]\, |m\rangle$$

$$= \langle m|\, Hx^2 - 2xHx + x^2H\, |m\rangle$$

$$= \langle m|Hx^2|m\rangle - 2\langle m|xHx|m\rangle + \langle m|x^2H|m\rangle$$

$$= E_m \langle m|x^2|m\rangle - 2\langle m|xHx|m\rangle + \langle m|x^2|m\rangle E_m$$

$$= 2E_m \langle m|x^2|m\rangle - 2\langle m|xHx|m\rangle$$

Usando $\langle m|x^2|m\rangle = \sum_n \langle m|x^2|n\rangle\langle n|x|m\rangle$

$$= \sum_n |\langle m|x|n\rangle|^2$$

$$\langle m|xHx|m\rangle = \sum_n \langle m|xH|n\rangle \langle n|x|m\rangle$$

$$= \sum_n E_n \langle m|x|n\rangle\langle n|x|m\rangle$$

$$= \sum_n E_n |\langle m|x|n\rangle|^2$$

$$= 2E_m \sum_n |\langle m|x|n\rangle|^2 - 2\sum_n E_n|\langle m|x|n\rangle|^2$$

$$= 2\sum_n (E_m - E_n)\, |\langle m|x|n\rangle|^2$$

Usando estos dos resultados

$$2\sum_n (E_m - E_n)\, |\langle m|x|n\rangle|^2 = -\frac{\hbar^2}{M}$$

con $m=0$.

$$\sum_n (E_n - E_0)\, |\langle 0|x|n\rangle|^2 = \frac{\hbar^2}{2M}$$

③ ⓐ Dado que λ es real, la matriz hermítica de perturbación tiene la forma

$$H_1 = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d^* & b & f \\ e^* & f^* & c \end{pmatrix}$$

Donde a, b, c deben ser números reales.

ⓑ A primer orden, el autovalor de la energía es el valor de expectación de H con respecto a los estados que se desean calcular.

$$E_+ = \langle + | H_0 + \lambda H_1 | + \rangle$$
$$= \langle + | H_0 | + \rangle + \lambda \langle + | H_1 | + \rangle$$
$$= \Delta + \lambda + \frac{\lambda^2}{\Delta} + O(\lambda^3)$$

así que $\langle + | H_1 | + \rangle = 1.$

con la misma lógica: $\langle - | H_1 | - \rangle = -1$

Los niveles de energía $|2\rangle$ y $|3\rangle$ son degenerados, pero en la transformación $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle - |3\rangle)$ se rompe esa degeneración. Con esto podemos transformar H_1 en la base $|1\rangle, |+\rangle, |-\rangle$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & e \\ d^* & b & f \\ e^* & f^* & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & \frac{d+e}{\sqrt{2}} & \frac{d-e}{\sqrt{2}} \\ \frac{d^*+e^*}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ \frac{d^*-e^*}{\sqrt{2}} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donde sin pérdida de generalidad usamos $b=c=0$, $f=f^*=1$.

Perturbaciones para los estados no degenerados da:

$$E_m = E_m^{(0)} - \lambda H'_{mm} + \lambda^2 \sum_{n \neq m'} \frac{|H'_{mn}|^2}{E_m - E_n} + O(\lambda^3)$$

$$E_1 = 0 + \lambda a + \frac{\lambda^2 |d+e|^2}{2(0-\Delta)} + \frac{\lambda^2 |d-e|^2}{2(0-\Delta)} + O(\lambda^3)$$

$$= \lambda a - \lambda^2 \left(\frac{|d+e|^2}{2\Delta} + \frac{|d-e|^2}{2\Delta} \right) + O(\lambda^3)$$

$$E_2 = \Delta + \lambda + \frac{\lambda^2 |d+e|^2}{2\Delta} + O(\lambda^3)$$

$$E_3 = \Delta - \lambda + \frac{\lambda^2 |d-e|^2}{2\Delta} + O(\lambda^3)$$

Comparando los coeficientes con los valores del enunciado.

tenemos $a=0$. y

$$|d+e|^2 + |d-e|^2 = 2$$

$$|d+e|^2 = 2$$

$$|d-e|^2 = 0.$$

podemos decir:

$d+e = \sqrt{2}e^{i\delta}$, con δ arbitrario y $d-e=0$, así que

$a=0$, $d=e=\frac{e^{i\delta}}{\sqrt{2}}$

de esta manera

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\delta} & \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\delta} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\delta} & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\delta} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

④ Despreciando el potencial de interacción tenemos:

$$V(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x_1, x_2 \leq L \\ \infty, & \text{por fuera del intervalo } [0, L] \end{cases}$$

tenemos el hamiltoniano

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx_1^2} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx_2^2} + V(x_1, x_2)$$

Usando los resultados para el pozo de potencial infinito.

$$\psi_{nl}(x_1, x_2) = \psi_n(x_1)\psi_l(x_2)$$

$$= \frac{2}{L}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x_1\right)\sin\left(\frac{l\pi}{L}x_2\right)$$

donde $$E_{nl} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}(n^2 + l^2), \quad n, l = 1, 2, \ldots$$

para el estado base $n = l = 1$

$$E_{11} = \frac{\hbar^2\pi^2}{mL^2}$$

Considerando el potencial como una perturbación.

$$\hat{H}' = a\delta(x_1 - x_2)$$

la corrección ~~al es~~ a la energía del estado base:

$$H' = \langle 11 | \hat{H} | 11 \rangle$$

$$= \int_0^L \int_0^L a\,\delta(x_1 - x_2) \sin^2\left(\frac{\pi}{L}x_1\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{L}x_2\right)\left(\frac{2}{L}\right)^2 dx_1\, dx_2$$

$$= a\left(\frac{2}{L}\right)^2 \int_0^L \sin^4\left(\frac{\pi}{L}x_1\right) dx_1 = \frac{3a}{2L},$$

así que

$$E_{11}' = E_{11} + H' = \frac{\pi^2 \hbar^2}{mL^2} + \frac{3a}{2L}$$

Examen de conocimientos de Mecánica Estadística y Termodinámica Código
Universidad de los Andes, Nombre
Miércoles, 18 de julio, 2018 (9:00 am a 12:00 m)

Antes de empezar tener en cuenta:

- Fundamente todas sus respuestas argumentando con leyes físicas donde corresponda
- Explique claramente sus suposiciones.
- Justifique todos los pasos que realice.
- Sea claro y concreto en su redacción.
- Escriba con letra clara.
- No se permite el uso de ayudas, fórmulas o calculadora-estime lo mejor que pueda manualmente.
- pt es una abreviación de puntos.

Problema 1 (20 pt)

Considere un sistema de N iones idénticos que no interactúan, de spin ½ y momento magnético μ_0 en un cristal a temperatura T en un campo magnético B. Calcule:

a) La función de partición Z (4 pt) y la entropía S en base a Z (6 pt)
b) El cristal está inicialmente en equilibrio térmico con un reservorio a temperatura T=1K en un campo magnético $B_i = 1$ T. Se aísla el cristal del reservorio y el campo magnético se reduce a $B_f = 10^{-2}$ T. ¿Cuál sería la temperatura final? (6 pt)
c) Interprete: Teniendo en cuenta b) , ¿para qué sería posiblemente útil este proceso? (4 pt)

Problema 2 (20 pt)

Un gas está inicialmente a presión atmosférica y tiene un volumen de 10 litros. Es comprimido de manera isotérmica hasta un volumen de 1 litro y vuelto a expandir de manera adiabática hasta 10 litros.

a) Dibuje el proceso en un diagrama PV para un gas monoatómico, calculando la presión final (6 pt)
b) Dibuje un diagrama similar para un gas diatómico, calculando la presión final (6 pt)
c) ¿En qué dirección fluye el calor para ambos casos? (4 pt)
d) ¿Es la magnitud del trabajo sobre el gas durante la compresión y expansión mayor para el gas diatómico o el monoatómico? (4 pt)

Problema 3 (30 pt)

Considere un gas de fotones en un volumen V y en equilibrio a temperatura T.

a) ¿Cuál es el potencial químico del gas? Interprete . (5pt)
b) Determine cómo el número de fotones en el volumen depende de la temperatura (15pt). Se puede empezar por establecer cuál es el número de fotones dada una densidad de estados del gas en un volumen V, y otro(s) parámetro(s) necesario(s) si es el caso.
c) La densidad de energía se puede escribir como:

$$\frac{\bar{E}}{V} = \int_0^\infty \rho(\omega) d\omega$$

Determine la forma de $\rho(\omega)$, la densidad espectral de energía en base al resultado anterior. (5pt)

d) ¿Cómo depende la energía $\bar{E}$ de la temperatura? (5pt)

Problema 4 (30 pt)

Considere una red cristalina de spins de Ising S_i . En presencia de un campo magnético H_0 en la dirección z, el Hamiltoniano del sistema se puede escribir como:

$$H = -J \sum_{i,j} s_i s_j - \mu_0 H_0 \sum_i s_i$$

Donde J > 0 es una constante y $\sum_{i,j} s_i s_j$ es sobre los vecinos cercanos (S_i tiene p vecinos cercanos)

a) Usando la aproximación de campo medio, derive una ecuación para la magnetización m cuando $H_0 = 0$ y calcule la temperatura crítica bajo la cual m ≠ 0. (22 pt)

b) Calcule β definido como $m(T, H_0 = 0) \sim A\,(1 - \frac{T}{T_c})^{\beta}$ a medida que T -> T_c, (A es una constante). (8 pt) Pistas: Tanh(x) = x - x^3/3 + O(x^5), y puede ser útil definir la dirección de la cual se acerca a T_c.

Termo y Mecánica estadística. Solución. 2018-1

Problema 1:

a) Las partículas no interactúan $\Rightarrow Z = (Z_p)^n$

$$Z_p = \sum_i e^{-\frac{\beta E_i}{k_B T}} = e^{+\frac{\mu_0 B}{k_B T}} + e^{-\frac{\mu_0 B}{k_B T}}$$

$$Z = \left(e^{\mu_0 B \beta} + e^{-\mu_0 B \beta}\right)^n$$

$\rightarrow$ si consideramos Gibbs, sería $* \frac{1}{n!}$

$$S = k_B \left(\ln Z - \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z\right).$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \left(e^{+\alpha} + e^{-\alpha}\right)^n$$

$\alpha = \mu_0 B \beta$

$\frac{d}{dx} \ln(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}$

$$= n \mu_0 B \frac{\partial \ln}{\partial \beta}\left(e^{+\alpha} + e^{-\alpha}\right)$$

$$= n \mu_0 B \quad \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}} = n \mu_0 B \tanh(\alpha).$$

$$S = k_B \left(\ln\left(e^{\alpha} + e^{-\alpha}\right)^n - n \mu_0 B \cdot \beta \tanh(\alpha)\right)$$

$$= k_B n \left(\ln\left(e^{\alpha} + e^{-\alpha}\right) - \alpha \tanh(\alpha)\right)$$

b) proceso adiabático $\Rightarrow$ S no cambia. S depende de $\alpha \Rightarrow \alpha_i = \alpha_f$

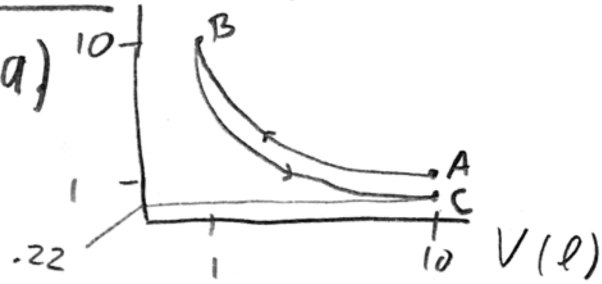
$$\frac{\mu_0 B_i}{k_B T_i} = \frac{\mu_0 B_f}{k_B T_f} \Rightarrow T_f = \frac{B_f}{B_i} T_i = \frac{10^{-2}}{1} \times 1 = 10^{-2}\ K.$$

c) $\rightarrow$ Se pueden enfriar los iones a muy bajas temperaturas.

Solución Termo y Mecánica Estadística

Problema 2

a)



- para la compresión isotérmica:

$pV = nRT = cst \quad (T = cst)$

$\Rightarrow \quad P_A V_A = P_B V_B$

$P_B = \frac{P_A V_A}{V_B}$

$= \frac{1 \times 10}{1} = 10$ atm.

- para la expansión adiabática:

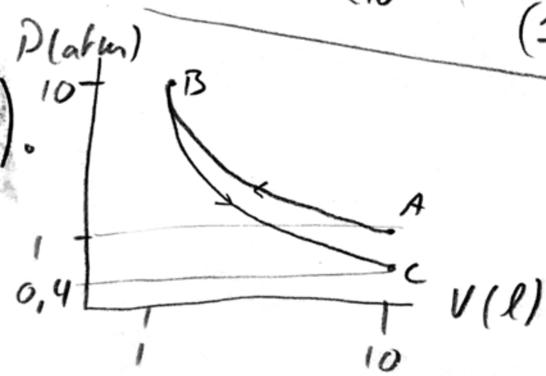
$pV^\gamma = cst$ donde $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{\ell+2}{\ell}$

$P_C^{mono} = P_B \left(\frac{V_B}{V_C}\right)^\gamma$ $\qquad \ell = 3$ grados de lib.

$P_C^{mono} = 10 \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{5}{3}} = 10^{-\frac{2}{3}}$ atm

$(\simeq 0.22$ atm$)$

b).



- compresión igual a mono
- expansión: $\gamma = \frac{5+2}{5} = 7/5$

$P_C = 10 \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{7}{5}}$

$= 10^{-2/5}$ atm

$(\simeq 0,4$ atm$)$

c). en ambos casos el calor fluye del reservorio al gas

d). mayor para el monoatómico

Problema 3

gas de fotones @ V, T

a) $\mu = 0$ dado que los fotones no se conservan.

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V} = 0$$

b) estadística de Bose-Einstein.

$\bar{N} \propto T$?

ocupación

$$\bar{N} = \int g \, \frac{1}{e^{(\varepsilon_i/k_B T - \mu)} - 1} \, dp_\omega \qquad \mu = 0$$

densidad de estados. para gas de fotones.

$$\rho = \frac{8\pi}{h^3} V p^2 = V \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega$$

→ ver p. 3.2 para detalles.

$$\Rightarrow \bar{N} = \int_0^\infty \frac{8\pi}{h^3} V \cdot \frac{p^2}{e^{\frac{pc}{k_B T}} - 1} \, dp$$

$$\alpha = \frac{pc}{k_B T}$$

$$p = \frac{k_B T \alpha}{c}$$

$$dp = \frac{k_B T \, d\alpha}{c}$$

$$= \frac{8\pi V}{h^3} \int \left(\frac{k_B T}{c}\right)^2 \frac{\alpha^2}{e^\alpha - 1} \cdot \left(\frac{k_B T}{c}\right) d\alpha$$

$$= \frac{8\pi V}{h^3} \left(\frac{k_B T}{c}\right)^3 \int_0^\infty \frac{\alpha^2 \, d\alpha}{e^\alpha - 1} \propto T^3.$$

derivación densidad de estados fotones.

$=$ # estados/~~Vol~~ $= \frac{N}{\cancel{V}}$

al igual que con el gas de Fermi, contamos estados:

$N = (2)\left(\frac{1}{8}\right)\frac{4}{3}\pi R^3$ donde

$R = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = \frac{2L}{\lambda} = \frac{2EL}{hc}$

2 polarizaciones

condiciones "borde"

$E = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{E}$

→ Sólo valores ⊕ de n, dado que n_+ y n_- son el mismo estado de energía.

$$\Rightarrow N = \frac{2}{8}\cdot\frac{4}{3}\pi\left(\cancel{2}L\frac{E}{hc}\right)^3$$

$$= \frac{8\pi}{3}L^3\left(\frac{E}{hc}\right)^3$$

~~$\Rightarrow \frac{N}{V} = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{E}{hc}\right)^3$~~ ~~$E = pc$~~

~~$\Rightarrow = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{pc}{hc}\right)^3 = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{p}{h}\right)^3$~~ ← ok

densidad de estados $= \frac{d}{dE}$(# estados/Vol)$\cdot L^3$

pero en momento $\rho(p) = \frac{d}{dp}\left(\frac{8\pi}{3}\left(\frac{p}{h}\right)^3\right) = 8\pi\frac{p^2}{h^3}\cdot V.$

P_3^3

c) $$\frac{\bar{E}}{V} = \int_0^{b} \rho(\omega)\, d\omega$$

$E = \hbar\omega = pc$

$\Rightarrow p = \omega \frac{\hbar}{c}$

$$= \int \frac{\cancel{V}}{\cancel{V}} \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_BT} - 1}\, d\omega$$

$\Rightarrow \frac{8\pi V p^2 dp}{h^3}$

$$= \int \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_BT} - 1}\, d\omega \qquad \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_BT} - 1} = \rho(\omega).$$

$= \frac{8\pi V \omega^2}{\cancel{h^3}} \cdot \frac{\cancel{\hbar^2}}{c^2} \cdot \frac{\cancel{\hbar}}{c}\, d\omega$

$= \frac{8\pi}{8\pi^3} \frac{V\omega^2}{c^3}\, d\omega$

$= \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3}\, d\omega$

d) Si definimos $\xi = \frac{\hbar\omega}{k_BT}$

$\Rightarrow d\xi = \frac{\hbar}{k_BT}\, d\omega$

$y\ \omega = \frac{k_BT}{\hbar} \xi$

$$\Rightarrow \frac{\bar{E}}{V} = \int \left(\frac{k_BT}{\hbar}\right)^3 \frac{\xi^3}{\pi^2 c^3} \cdot \left(\frac{k_BT}{\hbar}\right) \frac{\hbar}{e^{\xi} - 1}\, d\xi$$

$$= \left(\frac{k_BT}{\hbar}\right)^4 \cdot \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \int \frac{\xi^3\, d\xi}{e^{\xi} - 1}$$

$\bar{E} \propto T^4.$

Problema 4 → hay muchas maneras de resolver a) esta es una.

$$H = -J \sum_{ij} S_i S_j - \mu_0 H_0 \sum_i S_i$$

para el spin i

$$\epsilon(S_i) = -\mu_0 H S_i - J S_i \sum_j^{\text{vecinos}} S_j$$

aproximamos la contribución reemplazando S_j por su valor promedio

$$\epsilon_{mf}(S_i) = -\mu_0 H S_i - J S_i \overbrace{\sum_j^{\text{vec}} \langle S_j \rangle}^{mp}$$

$$m = \frac{1}{N} \sum_i \langle S_i \rangle$$

$$= -\mu_0 H S_i - J S_i mp$$

$$= -(\mu_0 H + J mp) S_i$$

~~dondes~~ $= -h_{mf} S_j$

entonces ~~AVEZ~~

(6) $$p(S_j) = \frac{e^{-\beta \epsilon_{mf}(S_i)}}{\sum_{S_j = \pm 1} e^{-\beta \epsilon_{mf}(S_j)}} = \frac{e^{\beta h_{mf} S_i}}{e^{\beta h_{mf}} + e^{-\beta h_{mf}}}$$

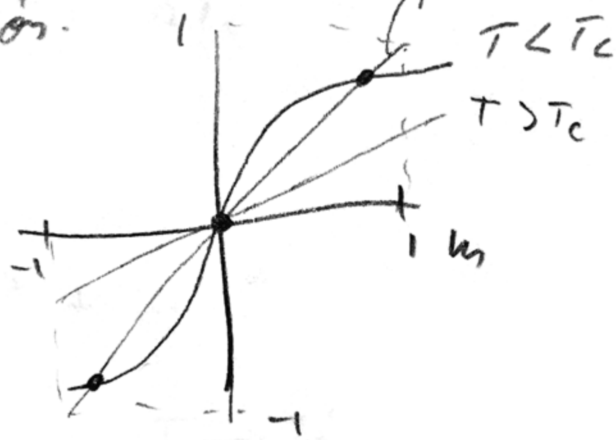
(6) debería ser igual a ~~OOO~~ m arriba

$$m = \sum_{S_j = \pm 1} p(S_j) S_j = \frac{e^{\beta h_{mf}} - e^{-\beta h_{mf}}}{e^{\beta h_{mf}} + e^{-\beta h_{mf}}} = \tanh(\beta h_{mf})$$

con lo que $m = \tanh(\beta \mu_0 H + \beta J m p)$

cuando $H_0 = 0 \Rightarrow$ $m = \tanh(\beta J m p)$

$m=0$ es solución.



y hay otras 2 soluciones cuando la pendiente es > 1 para $m=0$.

la pendiente es: $\frac{d}{dm} \tanh \beta J m p \Big|_{m=0} = \frac{1}{\cosh^2 \beta J m p} (\beta J P) \Big|_{m=0}$

$= \beta J P$

la Tª crítica es entonces cuando $\beta J P = 1$

$J P = k_B T_c$

$$\boxed{T_c = \frac{P J}{k_B}}$$

b)

$$m(T, H_0=0) \sim A\left(1-\frac{T}{T_c}\right)^{\beta}$$

$\beta = ?$ $\qquad T \to T_c$

$$m = \tanh\left(\frac{T_c}{T} m\right)$$

expandiendo $\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \dots$

Suponiendo que $T < T_c$ $\qquad T \to T_c^-$ $\Rightarrow$ $m_0 \to 0$

$\Rightarrow \frac{T_c}{T} m \to 0$ y expandemos

$$T_c = \frac{PJ}{k_B}$$

$$\tanh\left(\frac{T_c}{T} m\right) = \tanh\left(\frac{PJ}{k_B T} m\right) = \tanh(J m P \beta)$$

$$m_0 = \beta J m_0 P - \frac{(\beta J m_0 P)^3}{3} + \dots$$

dividiendo por m_0: $\quad 1 = \beta J P - \frac{1}{3}(\beta J P)^3 m^2$

$$m^2 = \frac{(-1+\beta JP)3}{(\beta JP)^3}$$

$$m^2 = 3\left(\frac{1}{(\beta JP)^2} - \frac{1}{(\beta JP)^3}\right) = 3\frac{1}{(\beta JP)^2}\left(1-\frac{1}{\beta JP}\right)$$

$$m^2 = 3\left(\frac{k_B T}{JP}\right)^2\left(1-\frac{k_B T}{JP}\right) = 3\left(\frac{T}{T_c}\right)^2\left(1-\frac{T}{T_c}\right)$$

b) $$m = \pm \frac{\sqrt{3}}{[illegible]} \left(\frac{T}{T_c}\right) \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{\frac{1}{2}}$$

'bonito' $T \to T_c$

singular $T \to T_c \Rightarrow$ domina

$$\Rightarrow \beta = \frac{1}{2}.$$