UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

EXAMEN DE CONOCIMIENTOS

MECÁNICA ESTADÍSTICA

2018-01

Tiempo de lectura: 15 Minutos

Duración del examen: TRES Horas

Material permitido: Lápiz, borrador y lapicero únicamente.

Nombre: ______________________ Código: ______________________

Pregunta	Puntos	Nota
1	20	
2	20	
3	30	
4	30	
Total	100	

Responda ***todas*** *las preguntas usando únicamente el material provisto por el instructor. Procure responder de forma ordenada indicando todos los pasos en su procedimiento. Incluya diagramas e identifique los parámetros a tener en cuenta.*

Pregunta 1 (20 puntos) Un sistema que contiene n moles de un gas ideal monoatómico se conduce a través del siguiente ciclo: (1) Partiendo de un volumen V_o y una temperatura T_o, se aumenta la presión, manteniendo el volumen constante, hasta alcanzar una temperatura $3T_o$. (2) Se aumenta el volumen hasta $2V_o$, manteniendo la temperatura constante. (3) Se disminuye la presión, manteniendo constante el volumen, hasta retornar a la temperatura inicial. (4) Finalmente, se disminuye el volumen, manteniendo la temperatura constante, hasta retornar al volumen inicial. Calcule la eficiencia de este ciclo.

Solución: Llamando A, B, C y D a los 4 puntos que determinan el ciclo, tenemos que $B \to C$ y $D \to A$ son curvas isotermas, mientras que $A \to B$ y $C \to D$ son curvas isocóricas. El trabajo neto es $W = W_{B\to C} + W_{D\to A}$. Calculando su valor absoluto, obtenemos:

$$\begin{aligned} |W| &= \int_{V_o}^{2V_o} nR(3T_o)\frac{dV}{V} - \int_{V_o}^{2V_o} nRT_o\frac{dV}{V} \\ &= 2nRT_o \ln 2. \end{aligned}$$

El flujo de calor hacia el sistema es

$$\begin{aligned} Q_{in} &= Q_{A\to B} + Q_{B\to C} \\ &= C_V(3T_o - T_o) + \int_{V_o}^{2V_o} nR(3T_o)\frac{dV}{V} \\ &= 3nRT_o(1 + \ln 2). \end{aligned}$$

Se sigue entonces que la eficiencia está dada por:

$$e = \frac{|W|}{|Q_{in}|} = \frac{2}{3}\left(\frac{\ln 2}{1 + \ln 2}\right).$$

Pregunta 2 (20 puntos) En el contexto de la física estadística clásica (y en el ensamble canónico), el valor esperado de un observable $f(q,p)$ en el espacio de fase está definido como

$$\langle f \rangle = \frac{1}{Z}\int \mathrm{d}q\mathrm{d}p f(q,p)e^{-\beta H(q,p)}, \tag{1}$$

donde Z es la función de partición canónica y $H = H(q,p)$ el Hamiltoniano del sistema. Muestre que

$$\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2 = k_B T^2 C_V.$$

Solución: Teniendo en cuenta que $Z = \int dq\, dp\, e^{-\beta H(q,p)}$, podemos reescribir el valor esperado de la energía, como es usual, de la siguiente forma:

$$\langle H \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta}\ln Z.$$

De aquí se sigue facilmente, haciendo uso de (1), que

$$\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\ln Z = \langle H^2\rangle - \langle H\rangle^2.$$

Por otro lado, usando la notación (más convencional) $\overline{E}$ para $\langle H\rangle$, tenemos que C_V está dado por

$$C_V = \left(\frac{\partial\overline{E}}{\partial T}\right)_V.$$

Pero

$$\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\ln Z = -\frac{\partial}{\partial\beta}\langle H\rangle \equiv -\frac{\partial}{\partial\beta}\overline{E}.$$

Con $\beta = (k_B T)^{-1}$ se sigue entonces que

$$\langle H^2\rangle - \langle H\rangle^2 = k_B T^2 C_V.$$

Pregunta 3 (30 puntos) Considere un sistema de N ($N \gg 1$) osciladores armónicos cuánticos 1-dimensionales, no interactuantes, cada uno con una frecuencia natural ω, y espectro de energía $\epsilon_n = \hbar\omega(n + 1/2)$. Haciendo uso de un ensamble canónico a temperatura T, calcule el valor más probable de la energía total (llámelo E^*). Calcule ahora el valor medio de la energía, $\langle E\rangle$ y compárelo con E^*.

Solución: Para cada configuración de números cuánticos $\{n_i\}_{i=1,\ldots,N}$ de los N osciladores tenemos una energía

$$E(\{n_i\}_i) = \epsilon_{n_1} + \epsilon_{n_2} + \cdots + \epsilon_{n_N} = \hbar\omega(n_1 + n_2 + \cdots + n_N) + \frac{N}{2}\hbar\omega.$$

Si introducimos una nueva variable M definida por

$$M = n_1 + n_2 + \cdots + n_N,$$

entonces tendremos $M = 0, 1, 2, \ldots$ y podemos reescribir la energía $E(\{n_i\}_i)$ de la siguiente manera:

$$E(\{n_i\}_i) \equiv E(M, N) = \hbar\omega M + \frac{N}{2}\hbar\omega. \tag{2}$$

Salvo una constante, la probabilidad de ocurrencia de un valor $E(M, N)$ de la energía estará dada por

$$P(E(M, N) = W(M, N)e^{-\beta E(M,N)},$$

donde $W(M, N)$ es un factor combinatorio, correspondiente al número de configuraciones que dan lugar a la energía $E(M, N)$. Un análisis sencillo nos muestra que este factor combinatorio debe satisfacer la siguiente identidad: $W(M, N) = \sum_{K=0}^{M} W(K, N-1)$, de donde obtenemos la fórmula general

$$W(M, N) = \frac{(M + N - 1)!}{M!(N-1)!}.$$

para encontrar el valor más probable de la energía, tratamos a M como una variable continua, tomamos la derivada de $P(E(M,N))$ e igualamos a cero. Esto da lugar a la siguiente ecuación

$$\beta\hbar\omega = \frac{\partial}{\partial M}\ln W(M,N),$$

cuya solución (aproximada, haciendo uso de la fórmula de Stirling) está dada por $M^* = N(e^{\beta\hbar\omega}-1)$. Reemplazando en (2) obtenemos el valor de la energía más probable (dentro de la aproximación de Stirling), que está dado por

$$E^* = N\hbar\omega\left(\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}+\frac{1}{2}\right). \tag{3}$$

Para calcular el valor esperado de la energía, primero observamos que por tratarse de un sistema no interactuante, la función de partición se puede escribir como $Z=\zeta^N$, donde

$$\zeta := \sum_{n\geq 0} e^{-\beta\epsilon_n} = e^{-\beta\frac{\hbar\omega}{2}}\sum_{n\geq 0}(e^{-\beta\hbar\omega})^n = \frac{e^{-\beta\frac{\hbar\omega}{2}}}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}.$$

De aquí obtenemos, finalmente,

$$\begin{aligned}\langle E\rangle &= -N\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\zeta\\ &= N\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\ln(1-e^{-\beta\hbar\omega})-\ln e^{-\beta\hbar\omega/2}\right)\\ &= N\hbar\omega\left(\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}+\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

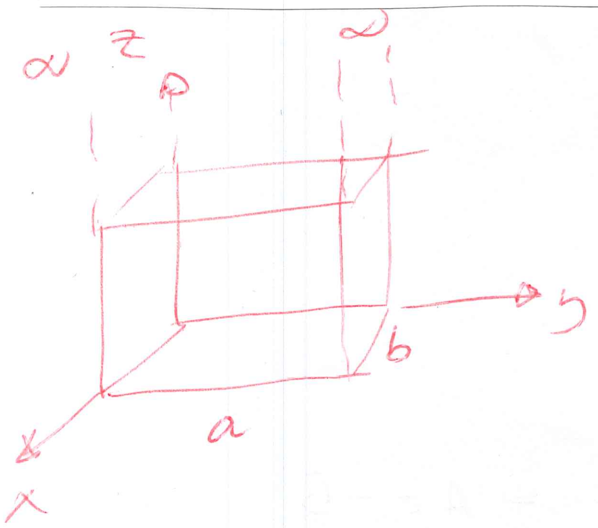
Vemos que ambos resultados coinciden: $E^*=\langle E\rangle$.

Pregunta 4 (30 puntos) Es bien sabido que en el contexto de la física clásica no es posible explicar el comportamiento a bajas temperaturas del calor específico de un sólido. Proponga un modelo que sea suficientemente sencillo para ser trabajado en este examen, pero que incluya elementos de los aspectos cuánticos de la materia, de tal forma que le permita obtener un calor específico (a volumen constante, c_V) con un comportamiento cualitativamente correcto a bajas temperaturas. Calcule también el valor límite de c_V a altas temperaturas, según su modelo.

Solución: El modelo más sencillo es el modelo de Einstein, que puede ser consultado en Reif, sección 7.7. Ver también Reif, sección 10.2 y Huang, sección 12.2.

——— *Fin del examen. Buena suerte!* ———

CONOCIMIENTOS ELECTRODINAMICA



Calcular la función de Green con c. Dirichlet en todas las paredes

$$G(\vec r,\vec r\,') = \sum_{nm} \sin\alpha_n x \sin\alpha_n x' \sin\beta_m y \sin\beta_m y' f_{nm}(z,z')$$

$$\nabla^2 G = -\frac{\delta(\vec r-\vec r\,')}{\epsilon_0}$$

$$-\Big[\sum_{nm} (\alpha_n^2+\beta_m^2) \overset{U_{nm}}{\downarrow} f_{nm}(z,z') + \overbrace{\sin\alpha_n x \sin\alpha_n x' \sin\beta_m y \sin\beta_m y'}^{U_{nm}} \frac{d^2 f_{nm}(z,z')}{dz^2}\Big]$$

$$= -\frac{\delta(\vec r-\vec r\,')}{\epsilon_0} \rightarrow$$

$$\Big(\sum_{nm} \frac{d^2 f_{nm}}{dz^2} - (\alpha_n^2+\beta_m^2) f_{nm}\Big) U_{nm} = -\frac{\delta(\vec r-\vec r\,')}{\epsilon_0}$$

$$= -\frac{2}{a}\frac{2}{b}\frac{1}{\epsilon_0}\sum_{nm} \sin\alpha_n x \sin\alpha_n x' \sin\beta_m y \sin\beta_m y'$$

$$= -\frac{4}{ab\epsilon_0}\sum_{nm} U_{nm}\ \delta(z-z')$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 f_{nm}}{dz} - (\alpha_n^2+\beta_m^2) f_{mn} = -\frac{4}{ab\epsilon_0}\delta(z-z')$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 f_{mn}}{dz^2} - \gamma_{mn}^2 f_{mn} = -\frac{4}{ab\epsilon_0}\delta(z-z')$$

• Si $z \neq z' \Rightarrow$ solució homogènea

$$f_{nm} = A e^{\gamma_{mn} z} + B e^{-\gamma_{mn} z}$$

a) $z < z' \Rightarrow G = 0$ en $z = 0 \Rightarrow A = -B$

$$\Rightarrow f_{nm} = A_1 \sinh \gamma_{mn} z_<$$

b) $z > z' \Rightarrow G = 0$ en $z \to \infty \Rightarrow A = 0$

$$\Rightarrow f_{nm} = A_2 e^{-\gamma_{mn} z_>}$$

Llavors, en ambdós intervals

$$f_{nm} = f_{nm} \sinh \gamma_{mn} z_< \, e^{-\gamma_{mn} z_>}$$

Per a calcular f_{nm} integrem la equació diferencial.

$$\int_{z=z'-\epsilon}^{z=z'+\epsilon} \left(\frac{d^2 f_{nm}}{dz^2} - \gamma_{nm}^2 f_{nm} \right) dz = -\frac{4}{ab\epsilon_0} \int_{z=z'-\epsilon}^{z=z'+\epsilon} \delta(z-z')\, dz$$

$$\left. \frac{d f_{nm}}{dz} \right|_{z'-\epsilon}^{z'+\epsilon} = -\frac{4}{ab\epsilon_0}$$

pero $z = z' + \varepsilon \Rightarrow z = z_>$ y $z' = z_<$

$z = z' - \varepsilon \Rightarrow z = z_<$ y $z' = z_>$

$$f_{nm} = f_{nm} \sinh \gamma_{mn} z_< \, e^{-\gamma_{mn} z_>} = f_{nm}(z, z')$$

$$\left.\frac{d^2 f_{nm}(z,z')}{dz^2}\right|_{z=z'+\varepsilon} - \left.\frac{d^2 f_{nm}(z,z')}{dz^2}\right|_{z=z'-\varepsilon} =$$

$$= \left.\frac{d^2}{dz^2}\left[f_{nm} \sinh \gamma_{mn} z' \, e^{-\gamma_{mn} z}\right]\right|_{z=z'+\varepsilon} - \left.\frac{d^2}{dz^2}\left[f_{nm} \sinh \gamma_{mn} z \, e^{-\gamma_{mn} z'}\right]\right|_{z=z'-\varepsilon}$$

$$= f_{nm}\left[-\gamma_{mn} \sinh \gamma_{mn} z' \, e^{-\gamma_{mn} z}\right]_{z=z'+\varepsilon} - f_{nm}\left[\gamma_{mn} \cosh \gamma_{mn} z \, e^{-\gamma_{mn} z'}\right]_{z=z'-\varepsilon}$$

$$= -f_{nm}\gamma_{mn}\left[\sinh \gamma_{mn} z' \, e^{-\gamma_{mn} z}\Big|_{z=z'+\varepsilon} + \cosh \gamma_{mn} z \, e^{-\gamma_{mn} z'}\Big|_{z=z'-\varepsilon}\right]$$

$\downarrow$
$\varepsilon \to 0$

$$= -f_{nm}\gamma_{mn} \, e^{-\gamma_{mn} z'} \underbrace{\left[\sinh \gamma_{mn} z' + \cosh \gamma_{mn} z'\right]}_{e^{\gamma_{mn} z'}}$$

$$= -f_{nm}\gamma_{mn} = -\frac{4}{abc\varepsilon_0} \Longrightarrow \boxed{f_{nm} = \frac{4}{abc\varepsilon_0 \gamma_{mn}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{G(\bar r,\bar r') = \frac{4}{ab\,to} \sum_{nm} \frac{\sin\alpha_n x \sin\alpha_n x' \sin\beta_m y \sin\beta_m y' \sinh\gamma_{mn} z_< \, e^{-\gamma_{mn} z_>}}{\gamma_{mn}}}$$

Problema 3 → No entró en el examen pero se lo dejo acá

$P_0(x) = 1$
$P_1(x) = x$

Esfera conductora radio R tiene carga Q y está en presencia de un campo eléctrico que, en puntos alejados de la esfera es $\vec{E} = E\hat{u}_z$. El potencial sobre la esfera conductora es

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Calcular el potencial en el exterior de la esfera usando la ecuación de Laplace.

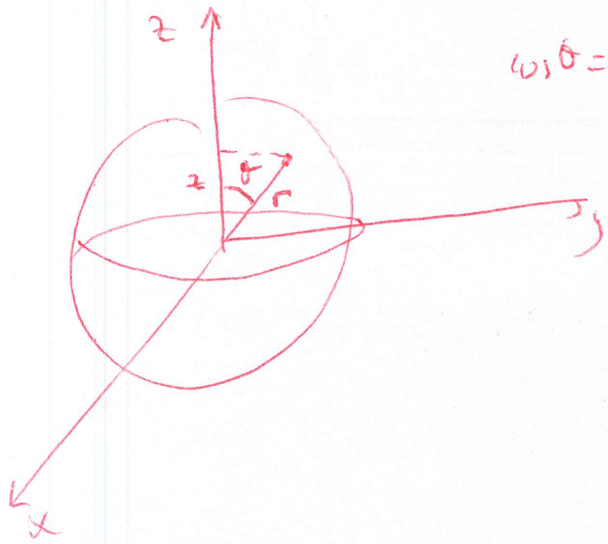
$$\phi(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left[A_{lm} r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}} \right] Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_{l} r^l + \frac{B_{l}}{r^{l+1}} \right] P_l(\cos\theta)$$

simetría acimutal

$$\vec{E} = -\nabla\phi \Rightarrow \phi(r\to\infty) = -Ez + \phi_0 = \underbrace{-Er\cos\theta + \phi_0}_{\phi_{r\to\infty}}$$

$$\cos\theta = \frac{z}{r} \Rightarrow z = r\cos\theta$$



$$\phi(R,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l R^l + \frac{B_l}{R^{l+1}}\right]P_l(\cos\theta) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$= \left(A_0 R^0 + \frac{B_0}{R^1}\right)P_0(\cos\theta) + \left(A_1 R^1 + \frac{B_1}{R^2}\right)P_1(\cos\theta) + \sum_{l=2}^{\infty}\left(A_l R^l + \frac{B_l}{R^{l+1}}\right)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$ $\Rightarrow$ cond. sobre la esfera

cond. sobre el ∞

sobre esfera

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} A_0 = 0 \\ B_0 = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} A_1 = -E \\ P_1(\cos\theta) = \cos\theta \end{array}\right\}$$

$$\phi(r,\theta) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} - Er\cos\theta + \frac{B_1}{r^2}\cos\theta$$

$$r = R \Rightarrow \frac{B_1}{R^2}\cos\theta = ER\cos\theta \Rightarrow B_1 = ER^3$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) E r\cos\theta}$$

Ondas electromagnéticas

Utilizamos explícitamente

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \vec{H}$$

$$\nabla V = -\vec{E} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

y un cálculo directo arroja el resultado

$$\vec{H} = \frac{K}{\mu} A_0 \cos(\omega t) \sin(Kz) \hat{x}$$

$$\vec{E} = \frac{K^2}{\varepsilon \mu \omega} A_0 \sin(\omega t) \cos(Kz) \hat{y}$$

$V = 0$ con $K^2 = \omega^2 \mu \varepsilon$

Condiciones de frontera : se derivan de

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

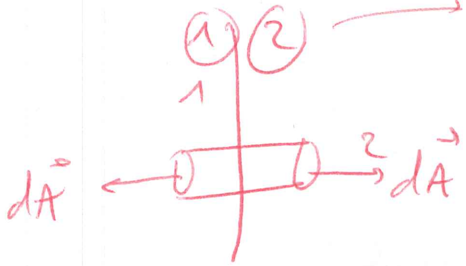
$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_\ell$

↳ libres

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

con $\oint \vec{B}\, d\vec{A} = 0$

medios diferentes



$$\vec{B}_1 \cdot \vec{A}_1 + \vec{B}_2 \cdot \vec{A}_2 = 0$$

$$\vec{A}_1 = -\vec{A}_2$$

↳ áreas unitarias

$$\Rightarrow \quad B_1^{\perp} - B_2^{\perp} = 0$$

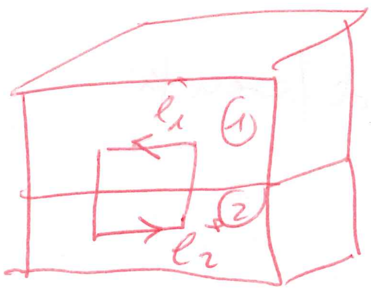
(si $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$)

Si $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \neq 0$ $(= \mu_0 \rho_m)$ $\Rightarrow$ con el mismo procedimiento $(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \hat{n} = \mu_0 \rho_m$

En términos de H

$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{libre}$ se escribe como

$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = J_{\substack{\text{encerrada} \\ \text{por lazo}}}$, donde



$\vec{H}_1 \cdot \vec{\ell}_1 + \vec{H}_2 \cdot \vec{\ell}_2 = J_{encerrada}$

$(\vec{\ell}_1 = -\vec{\ell}_2 = \vec{\ell})$

$\Rightarrow \quad \vec{\ell} \cdot (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = J_{enc}$

$\Rightarrow \quad \underbrace{H_1^{\parallel} - H_2^{\parallel}}_{} = J_{enc}$

↳ ∥ a la frontera de los materiales

Si $\rho_m \neq 0$ habría que considerar la "polarización magnética" $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \rho_{\substack{libre \\ magnética}}$

y, análogamente con el caso eléctrico, $H_1^{\perp} - H_2^{\perp} = \sigma_{\substack{mag \\ libre}}$

Tr. Lorentz en 1+1

$$F^i{}_0 = E^i/c \qquad F^i{}_j = \epsilon^i{}_{jk} B^k$$

$$(F^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \qquad \beta = v/c$$

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta v \\ -\gamma v & \gamma \end{pmatrix} \text{ en } 1+1$$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} \gamma & -\beta v & 0 & 0 \\ -\beta v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ boost en dirección x

Operando

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\sigma} \Lambda^{\nu}{}_{\rho} F^{\sigma\rho} = \Lambda F \Lambda^{T}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma & -\beta v & 0 & 0 \\ -\beta v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & Ex & Ey & Ez \\ -Ex & 0 & Bz & -By \\ -Ey & -Bz & 0 & Bx \\ -Ez & By & -Bx & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta v & 0 & 0 \\ -\beta v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

como $(1-\beta^2)\gamma^2 = 1$, calculando se obtiene

$Ex \longrightarrow Ex$ $\qquad c = 1$

$Ey \longrightarrow \gamma\,(Ey - v\,Bz)$

$Ez \longrightarrow \gamma\,(Ez + v\,By)$

$Bx \longrightarrow Bx$

$By \longrightarrow \gamma\,(By + v\,Ez)$

$Bz \longrightarrow \gamma\,(Bz - v\,Ey)$

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Primer examen del año– Martes, 16 de enero, 2018 (2:00 pm a 5:00 pm)

EXAMEN DE CONOCIMIENTOS

Mecánica Clásica

2018-10

Duración del examen: Tres horas

Material permitido: lápiz, borrador y esfero únicamente.

Nombres y apellidos: ______________________ Código: ______________________

Pregunta	Puntos	Nota
1	20	
2	20	
3	30	
4	30	
Total	100	

Fundamente todas sus respuestas argumentando con leyes físicas donde corresponda. Justifique todos los pasos que realice. Sea claro y concreto en su redacción. Escriba con letra clara. No se permite el uso de ayudas, fórmulas ni calculadora.

Pregunta 1. Pelota rebotadora (20 puntos) Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba desde el suelo alcanzando una altura máxima h. Después de cada rebote vertical, la altura de la pelota es una fracción $f \in (0,1)$ de la altura alcanzada anteriormente. Calcule:
a. (10 puntos) La distancia total recorrida por la pelota.
b. (10 puntos) El tiempo total transcurrido desde que la pelota es lanzada hasta que se detiene.

Pregunta 2. Potencial gravitacional (20 puntos) Una capa esférica de masa $\mathcal{M}$ y densidad uniforme ρ tiene radio interior b y exterior a. Calcule el potencial gravitacional para:
a. (10 puntos) Puntos al exterior de la capa ($R > a$).
b. (10 puntos) Puntos dentro de la capa ($b < R < a$) .

Pregunta 3. Partícula rodante (30 puntos) Una partícula bajo la acción de la gravedad se desliza en el interior del paraboloide de revolución $z = \alpha r^2$ ($\alpha > 0$), cuyo eje está orientado verticalmente. Para este sistema halle:
a. (10 puntos) El Lagrangiano del sistema.
b. (10 puntos) El Hamiltoniano del sistema.
c. (10 puntos) Las ecuaciones de movimiento y las cantidades conservadas. Justifique sus afirmaciones.

Pregunta 4. Transformaciones canónicas (30 puntos) Un sistema descrito por un Hamiltoniano independiente del tiempo $H_0(q,p)$ es sometido a un campo externo oscilante, de tal modo que el Hamiltoniano del sistema se describe por $H = H_0(q,p) - \epsilon q \sin \omega t$, donde ϵ y ω son constantes.
a. (10 puntos) Dé una posible interpretación física al término $\epsilon \sin \omega t$. Puede usar un ejemplo particular.
b. (10 puntos) Obtenga las ecuaciones canónicas de movimiento en términos de q, p, y H_0.
c. (10 puntos) Encuentre una transformación canónica que restaure la forma canónica de las ecuaciones de movimiento. Escriba el nuevo Hamiltoniano.

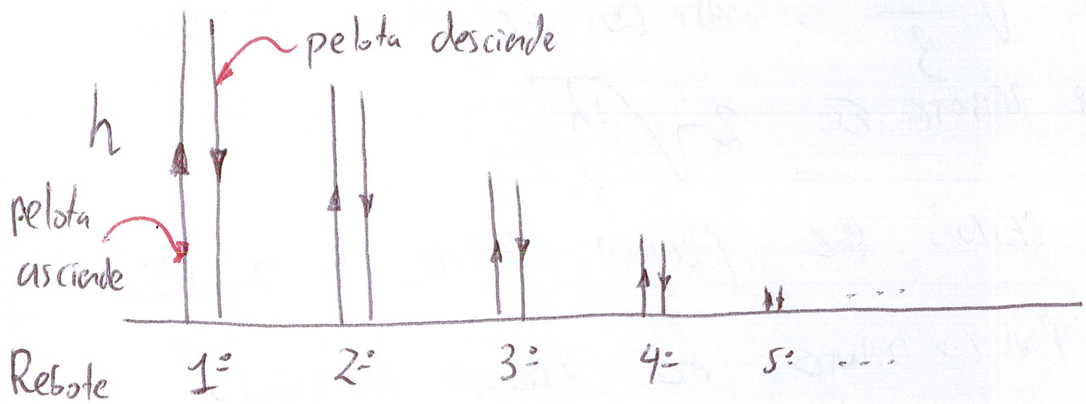
——— *Fin del examen. Éxitos!* ———

EXAMEN DE CONOCIMIENTOS 2018-10

MECÁNICA.

PAUTA DE SOLUCIÓN.

1. UN ESQUEMA DE LA SITUACIÓN ES:



1.a.) En el primer rebote la pelota sube y baja recorriendo una distancia $2h$. Después del primer rebote la pelota recorre una distancia $2hf$. Entre los sucesivos rebotes, la pelota recorre una distancia $2hf^2$, $2hf^3$, ..., y así sucesivamente.

La distancia total es la suma de estas distancias:

$$D_{TOTAL} = 2h\left[f^0 + f^1 + f^2 + f^3 + \dots + f^n + \dots \right]$$

EL TÉRMINO ENTRE PARÉNTESIS SE PUEDE CALCULAR ~~ES~~ CON LA SUMA DE LA SERIE GEOMÉTRICA:

$$\sum_i ar^n = \frac{a}{1-r} \quad , \text{SI } 0<|r|<1 \Rightarrow$$

$$\boxed{D_{TOTAL} = \frac{2h}{1-f}}$$

1.b. El tiempo de vuelo se calcula sumando el tiempo de vuelo entre cada rebote. Antes del primer rebote el tiempo de subida es igual a $\frac{v_0}{g}$, que en términos de la altura máxima es: $\sqrt{\frac{2h}{g}}$. Así que el tiempo de vuelo antes del primer rebote es: $2\sqrt{\frac{2h}{g}}$

El tiempo de vuelo después del primer rebote es: $2\sqrt{\frac{2hf}{g}}$

y así sucesivamente. Por lo tanto el tiempo de vuelo total es:

$$t_{TOTAL} = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}\left[(\sqrt{f})^0 + (\sqrt{f})^1 + (\sqrt{f})^2 + (\sqrt{f})^3 + \dots\right]$$

Aplicando la serie geométrica con razón $\sqrt{f}$ se tiene

$$\boxed{t_{TOTAL} = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}\,\frac{1}{1-\sqrt{f}}}$$

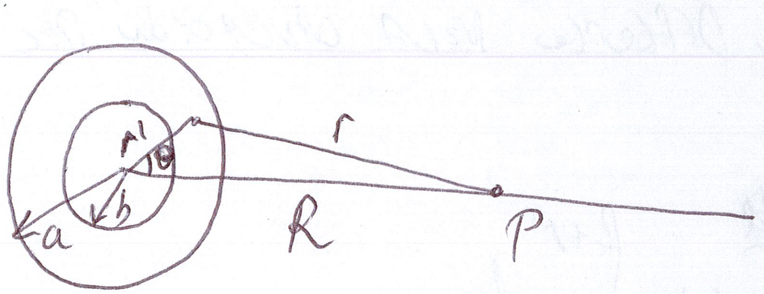
2. EL POTENCIAL GRAVITACIONAL CAUSADO POR UNA MASA dm ES DADO POR: $d\Phi = -G\frac{dm}{r}$

PARA UNA DISTRIBUCIÓN DE MASA UNIFORME:

$$d\Phi = -\frac{G\rho\, dv}{r}$$

DADO QUE LOS ELEMENTOS DE VOLUMEN dv, ESTÁN CONTENIDOS EN UN ANILLO: $dv = r^2 dr \,\mathrm{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi$

TENEMOS LA SIGUIENTE GEOMETRÍA:



r' la distancia al elemento de volumen dv

r la distancia entre dv y el punto P

R la distancia desde el origen de coordenadas a P.

ASÍ CON ESTAS COORDENADAS:

$$d\Phi = -G\frac{\rho}{r} r'^2 dr \,\mathrm{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi$$

INTEGRANDO EN ~~Φ~~ φ

$$d\Phi = -2\pi G\rho \frac{r'^2}{r} dr \,\mathrm{sen}\theta\, d\theta$$

$$\int d\Phi = -2\pi G\rho \int_0^{\pi}\int_b^{a} r'^2 dr \frac{\mathrm{sen}\theta\, d\theta}{r}$$

De la geometría y del teorema del coseno se sabe que:

$$r^2 = r'^2 + R^2 - 2r'R\cos\theta$$

Derivando: $2r\,dr = 2r'R\sin\theta\,d\theta$ así:

$$\frac{\sin\theta\,d\theta}{r} = \frac{2\,dr}{r'R}$$ por lo cual la integral queda:

$$\Phi = -2\pi G\rho \int_b^a r'^2\,dr' \int_{r_{mín}}^{r_{máx}} \frac{dr}{r'R}$$

Los límites de integración, dependen de la ubicación del punto P. Así:

$$\Phi(R>a) = -\frac{2\pi\rho G}{R}\int_b^a r'\,dr' \int_{R-r'}^{R+r'} dr$$

$$= -\frac{4\pi\rho G}{R}\int_b^a r'^2\,dr = -\frac{4}{3}\frac{\pi\rho G}{R}(a^3-b^3)$$

Como la masa M de la capa es: $M = \frac{4}{3}\pi\rho(a^3-b^3)$

$$\boxed{\Phi(R>a) = -\frac{GM}{R}}$$

PARA PUNTOS DENTRO DE LA ESFERA.

$$\Phi(R<b) = -\frac{2\pi\rho G}{R}\int_b^a r'dr'\int_{r'-R}^{r'+R} dr$$

$$\Phi(R<b) = -4\pi\rho G\int_b^a r'dr$$

$$\boxed{\Phi(R<b) = -2\pi\rho G\,(a^2-b^2)}$$

POTENCIAL CONSTANTE EN TODA LA REGION DENTRO DE LA CAPA.

PROBLEMA 3

a. En coordenadas cilíndricas el paraboloide se puede describir por:

$z = Ar^2$, siendo A una constante $(A>0)$

Así el Lagrangiano del sistema es:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

recordando:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m(1 + 4A^2r^2)\dot{r}^2 + \frac{1}{2} mr^2\dot{\varphi}^2 - Amgr^2$$

b. La transformada de Legendre sobre $\mathcal{L}$ es:

$H = \sum_i \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}$ así con $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$, así

$$H = p_r\dot{r} + p_\varphi\dot{\varphi} - \mathcal{L}$$

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m(1 + 4A^2r^2)\dot{r} \quad ; \quad p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}$$

$$H = m(1 + 4A^2r^2)\dot{r}^2 + mr^2\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} m(1 + 4A^2r^2)\dot{r}^2 - \frac{1}{2} mr^2\dot{\varphi}^2 + Amgr^2$$

$$H = \frac{1}{2}(m)(1 + 4A^2r^2)\dot{r}^2 + \frac{1}{2} mr^2\dot{\varphi}^2 + Amgr^2$$

$$H = \frac{p_r^2}{2m(1 + 4A^2r^2)} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + Amgr^2$$

c. Las ecuaciones de movimiento son dadas por:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$; Así para r se tiene:

$$m(1+4A^2r^2)\ddot{r} + 4mA^2r\dot{r}^2 - mr\dot{\varphi}^2 - 2Amgr = 0$$; para φ:

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = 0 \Rightarrow \boxed{mr^2\dot{\varphi}^2 = cte}$$ CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR RESPECTO AL EJE z

Como z ES CÍCLICA, SE CONSERVA EL MOMENTO CONJUGADO:

$$\boxed{P_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = cte}$$

También se conserva la energía mecánica, debido a que la energía cinética escrita en coordenadas cilíndricas es una función cuadrática homogénea, así como también el hecho de que la energía potencial es independiente de la velocidad. $\Rightarrow \boxed{H = T + V = cte}$

8

4.9 Una partícula con carga eléctrica e, se mueve en una región del espacio donde hay un campo eléctrico uniforme en el espacio, pero que cambia su magnitud de forma armónica, ~~de~~ con magnitud

$$E(t) = \frac{\mathcal{E}}{e} \operatorname{sen} \omega t$$

El término $\mathcal{E} \operatorname{sen}\omega t = eE(t) = F(t)$ da la magnitud de la fuerza generada sobre la carga eléctrica e por el campo eléctrico.

b. Las ecuaciones canónicas de Hamilton son:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \; ; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_0}$$

PARA EL SISTEMA EN CONSERVACIÓN $\quad H_0 = H_0(q, p)$

$$H = H_0(q,p) - \mathcal{E} q \operatorname{sen}\omega t$$

ASÍ, PARA EL HAMILTONIANO H SE TIENE:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial H_0}{\partial p}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial H_0}{\partial q} + \mathcal{E} \operatorname{sen}\omega t$$

c. El Hamiltoniano del sistema es:

$$H(q,p,t) = H_0(q,p) - \varepsilon q \sin\omega t$$

y deseamos un nuevo Hamiltoniano tal que $K(Q,P) = H_0(q,p)$

Teniendo en cuenta las coordenadas que hay en H, usamos la función generatriz $F_2 = F_2(q,P,t)$. Así:

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} = K - H = \varepsilon q \sin\omega t \Rightarrow F_2 = qP - \frac{\varepsilon q}{\omega}\cos\omega t$$

Usando las ecuaciones de transformación:

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} \quad y \quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$$, tenemos:

$$p = P - \frac{\varepsilon}{\omega}\cos\omega t \quad y \quad Q = q$$ Así tenemos que:

$$K(q,P) = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H_0(q,p) - \varepsilon q \sin\omega t + \varepsilon q \sin\omega t$$

$$K = H_0\left(Q, P - \frac{\varepsilon}{\omega}\cos\omega t\right)$$

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \frac{\partial H_0}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial P} = \frac{\partial H_0}{\partial p} = \dot{q} \quad y$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial R} = -\frac{\partial H_0}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial Q} = -\frac{\partial H_0}{\partial q} = \dot{p} - \varepsilon \sin\omega t$$

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Primer examen del año– Lunes, 15 de Enero, 2018 (2:00 PM a 5:00 PM)

EXAMEN DE CONOCIMIENTOS

MECÁNICA CUÁNTICA

2018-01

Tiempo de lectura: 15 Minutos

Duración del examen: TRES Horas

Material permitido: Lápiz, borrador y lapicero únicamente.

Nombre: ______________________ Código: ______________________

Pregunta	Puntos	Nota
1	20	
2	20	
3	30	
4	30	
Total	100	

Responda ***todas*** *las preguntas usando únicamente el material provisto por el instructor. Procure responder de forma ordenada indicando todos los pasos en su procedimiento. Incluya diagramas e identifique los parámetros a tener en cuenta.*

Pregunta 1 Considere un sistema de tres partículas idénticas con la misma orientación de espín en un potencial tipo oscilador armónico. El sistema no tiene degeneración de espín, por lo que se dice que esta polarizado. El sistema es preparado tal que

$$E = \frac{9}{2}\hbar\omega,$$

donde ω es la frecuencia angular característica del oscilador. Asuma que todos los posibles estados del sistema con esta energía son igualmente probables y que las interacciones entre partículas son despreciables.

1. [5 Puntos] Si usted mide la energía ϵ de una sola partícula, ¿Cuál sería el resultado más probable?

Solución: La energía de una partícula es

$$\epsilon = (n + 1/2)\hbar\omega,$$

donde $n = 1, 2....$ La suma de los números cuánticos n de las tres partículas es $9/2 - 3/2 = 3$. La combinación de números cuánticos es:

- A (1,1,1)
- B (2,1,0)
- C (3,0,0).

2. [5 Puntos] ¿Cuál es la probabilidad asociada con el resultado anterior asumiendo una estadística del tipo Bose-Einstein?

Solución: En el caso de BE, tenemos que todos los tres estados (A,B y C) son posibles. Las probabilidades son:

$n = 3$: $(1/3)(1/3) = 1/9$

$n = 2$: $(1/3)(1/3) = 1/9$

$n = 1$: $(3/3)(1/3) + (1/3)(1/3) = 4/9$

$n = 0$: $(1/3)(1/3) + (2/3)(1/3) = 3/9$

Entonces la energía mas probable corresponde a $n = 1$, con $\epsilon = 3/2\hbar\omega$ y una probabilidad de 4/9.

3. [5 Puntos] Una estadística del tipo Fermi-Dirac?

Solución: En el caso de FD, solo el estado B es posible. Entonces, los números cuánticos $n = 0, 1$ y 2 cada uno tienen probabilidad 1/3 con energías $\epsilon = 1/2, 3/2$ y $5/2\hbar\omega$.

4. [5 Puntos] Una estadística del tipo Maxwell Boltzman?

Solución: En el caso de MB, cada partícula es diferente. El número de distintos estados que corresponden a la combinación de números cuánticos son: A:1; B: $3\times 2 = 6$ y C: 3; que suma en total 10 estados de 3-partículas. Entonces

$n = 3$: $(1/3)(3/10) = 1/10$

$n = 2$: $(1/3)(6/10) = 2/10$

$n = 1$: $(3/3)(1/10) + (1/3)(6/10) = 3/10$

$n = 0$: $(1/3)(6/10) + (2/3)(3/10) = 4/10$

Entonces la energía mas probable corresponde a $n = 0$, con $\epsilon = 1/2\hbar\omega$ y una probabilidad del 40 %.

Pregunta 2 Una partícula con carga q y masa M se mueve en un plano (xy) en presencia de un campo magnético $\vec{B} = B\hat{z}$. Su Hamiltoniano esta dado por

$$H = \frac{1}{2M}\left(-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A}\right)^2$$

Use el potencial $\vec{A} = \frac{B}{2}\hat{z} \times \vec{r}$.

1. [3 Puntos] Resuelva para obtener el movimiento semi-clásico. De acuerdo con las ecuaciones de movimiento clásicas y con el criterio Bohr-Sommerfeld para la cuantización, ¿Cuál es el radio ℓ_B de la orbita (ciclotrón) más pequeña? ¿Cuál es la frecuencia angular ω asociada a este radio?

   Solución: Tenemos,

   $$M\frac{v^2}{\ell_B} = qBv$$

   $$Mv\ell_B = \hbar$$

   Entonces, $\ell_B = \sqrt{\frac{\hbar}{qB}}qBv$ y $\omega = \frac{qB}{M}$

2. [3 Puntos] El *momento mecánico* se define como $\vec{P}_m = -i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A}$. Usando los operadores $a = \frac{\ell_B}{\sqrt{2}\hbar}(P_{m,x} + iP_{m,y})$ y $a^\dagger = \frac{\ell_B}{\sqrt{2}\hbar}(P_{m,x} - iP_{m,y})$. Encuentre las relaciones de conmutación $\left[a, a^\dagger\right]$.

   Solución:

   $$P_{m,x} = -i\hbar\partial_x + \frac{qB}{2}y = -i\hbar\partial_x + \frac{\hbar y}{2\ell_B^2}y$$

   $$P_{m,y} = -i\hbar\partial_y - \frac{qB}{2}x = -i\hbar\partial_y - \frac{\hbar x}{2\ell_B^2}x$$

   Ahora,

   $$a = \frac{\ell_B}{\sqrt{2}\hbar}(P_{m,x} + iP_{m,x}) = \frac{-i}{\sqrt{2}}\left\{\ell_B(\partial_x + i\partial_y) + (x+iy)/2\ell_B\right\}$$

   $$a^\dagger = \frac{\ell_B}{\sqrt{2}\hbar}(P_{m,x} - iP_{m,x}) = \frac{i}{\sqrt{2}}\left\{\ell_B(-\partial_x + i\partial_y) + (x-iy)/2\ell_B\right\}$$

   Entonces,

   $$\left[a, a^\dagger\right] = \frac{1}{4}([\partial_x, x] + [\partial_y, y] - [x, \partial_x] - [y, \partial_y]) = 1$$

3. [3 Puntos] Muestre que el Hamiltoniano puede ser escrito en términos de a y $a^\dagger$ y encuentre todos su valores propios.

Solución: El Hamiltonano es:

$$H = \frac{1}{2M}\{(P_{m,x} + iP_{m,y})(P_{m,x} - iP_{m,y}) + (P_{m,x} - iP_{m,y})(P_{m,x} + iP_{m,y})\}$$

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}(aa^\dagger + a^\dagger a) = \frac{\hbar\omega}{2}(a^\dagger a + \frac{1}{2})$$

El espectro de energía viene dado por,

$$E_{n_a} = (n + 1/2)\hbar\omega$$

con $n_a = 1, 2, ...$

4. [3 Puntos] Defina nuevas coordenadas tal que $\vec{R}_g = \vec{r} - \hat{z} \times \frac{\vec{P}_m}{M\omega}$ y los operadores $b = \frac{1}{\sqrt{2}\ell_B}(R_{g,x} - iR_{g,y})$ y $b^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}\ell_B}(R_{g,x} + iR_{g,y})$. Encuentre $\left[b, b^\dagger\right]$. Pruebe que $[a, b] = \left[a^\dagger, b^\dagger\right] = 0$ y $\left[a, b^\dagger\right] = \left[a^\dagger, b\right] = 0$.

Solución:

$$R_{g,x} = x + \frac{1}{M\omega}(-i\hbar\partial_y - \frac{\hbar x}{2\ell_B^2}) = \frac{x}{2} - i\ell_B^2\partial_y$$

$$R_{g,y} = y - \frac{1}{M\omega}(-i\hbar\partial_x + \frac{\hbar y}{2\ell_B^2}) = \frac{y}{2} + i\ell_B^2\partial_x$$

Entonces, se tiene que:

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}\ell_B}(R_{g,x} - iR_{g,y}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\ell_B(\partial_x - i\partial_y) + \frac{x - iy}{2\ell_B}\}$$

$$b^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}\ell_B}(R_{g,x} + iR_{g,y}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\ell_B(-\partial_x - i\partial_y) + \frac{x + iy}{2\ell_B}\}$$

$$\left[b, b^\dagger\right] = \frac{1}{4}([\partial_x, x] + [\partial_y, y] + [x, -\partial_x] + [y, -\partial_y]) = 1$$

$$[a, b] = \frac{-i}{2}([\partial_x, x] + [\partial_y, y] + [x, \partial_x] + [y, \partial_y]) = 0$$

$$\left[a^\dagger, b^\dagger\right] = -\{[a, b]\}^\dagger = 0$$

$$\left[a, b^\dagger\right] = \frac{-i}{2}([\partial_x, x] - [\partial_y, y] + [x, -\partial_x] + [y, \partial_y]) = 0$$

$$\left[a^\dagger, b\right] = -\{\left[a, b^\dagger\right]\}^\dagger = 0$$

5. [4 Puntos] Demuestre que el momento angular canónico $L_z = \left(\vec{r} \times -i\hbar\vec{\nabla}\right) \cdot \hat{z}$ se puede expresar en términos de a, $a^\dagger$, b y $b^\dagger$ como $L_z = b^\dagger b - a^\dagger a$ y encuentre todos sus autovalores.

Solución:

$$L_z = \left(\vec{r} \times -i\hbar\vec{\nabla}\right) \cdot \hat{z}$$

Tenemos que,

$$a + a^\dagger = -i\sqrt{2}\ell_B\partial_x + \frac{1}{\sqrt{2}\ell_B}y$$

$$a - a^\dagger = \sqrt{2}\ell_B\partial_y - \frac{i}{\sqrt{2}\ell_B}x$$

y,

$$b + b^\dagger = -i\sqrt{2}\ell_B\partial_y + \frac{1}{\sqrt{2}\ell_B}x$$

$$b - b^\dagger = \sqrt{2}\ell_B\partial_x - \frac{i}{\sqrt{2}\ell_B}y.$$

Entonces,

$$x = \frac{\ell_B}{\sqrt{2}}(b + b^\dagger + i(a - a^\dagger))$$

$$y = \frac{\ell_B}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger + i(b - b^\dagger))$$

También,

$$-i\partial_y = \frac{1}{2\sqrt{2}\ell_B}((b + b^\dagger) - (a - a^\dagger))$$

$$-i\partial_x = \frac{1}{2\sqrt{2}\ell_B}((a + a^\dagger) - (b - b^\dagger))$$

Finalmente, para poder escribir el momento angular necesitamos los términos:

$$-ix\partial_y = \frac{1}{4}\left[(b + b^\dagger)^2 + (a - a^\dagger)^2\right]$$

$$-iy\partial_x = \frac{1}{4}\left[(a + a^\dagger)^2 + (b - b^\dagger)^2\right]$$

Entonces,

$$L_z = \hbar(-ix\partial_y + iy\partial_x) = \frac{1}{2}(bb^\dagger + b^\dagger b + aa^\dagger - a^\dagger a) = b^\dagger b - a^\dagger a.$$

6. [4 Puntos] Para cada nivel de energía del Hamiltoniano H, encuentre los autovalores permitidos de L_z.

Solución: Dado que $[H, L_z] = \left[a^\dagger a + \frac{1}{2}, b^\dagger b - a^\dagger a\right] = 0$, escogemos el número cuántico de L_z para distinguir cada estado. Para cada uno con enegía $E_{n_a} = (n_a + 1/2)\hbar\omega$, entonces los valores de L_z tomas los valores $(n_b - n_a)\hbar = -n_a\hbar$, $(-n_a + 1)\hbar, ..., 0, \hbar, 2\hbar, ...$

Pregunta 3 Considere un electrón en un espacio 3-dimensional en un potencial del tipo oscilador armónico el cual es perturbado por una interacción espín-orbita de manera que

$$H = H_0 + H_{\mathrm{SO}}$$

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + V(r)$$

$$V(r) = \frac{m\omega^2 r^2}{2}$$

$$H_{\mathrm{SO}} = \frac{\hbar^2}{2m^2c^2}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial V(r)}{\partial r}\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}$$

1. [10 Puntos] Determine los valores propios del estado fundamental y el primer estado excitado de un oscilador armónico 3-dimensional. Discuta sobre la simetría de la función de onda del estado.

Solución: En 3 dimensiones, un oscilador armónico tiene como energía base $(3/2)\hbar\omega$. El estado fundamental tiene una simetría de onda tipo s. El estado excitado más bajo tiene una energía de $(3/2)\hbar\omega$ y hay 3 posibles configuraciones que dan la misma energía, por lo que tiene simetría tipo p con $L = 1$ y $M_L = 1, 0, -1$.

2. [20 Puntos] Use la teoría de perturbación para estimar cómo estos autovalores son modificados por la presencia de la interacción espín-orbita.

Solución: Tenemos, después de derivar el potencial respecto de r que

$$V_{SO} = \Delta\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}$$

con $\Delta = \frac{(\hbar\omega)^2}{2mc^2}$ donde los elementos de matriz son constantes. Evaluando el término $\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}$ definiendo el momento angular total como

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$$

$$\mathbf{J}\cdot\mathbf{J} = (\mathbf{L}+\mathbf{S})\cdot(\mathbf{L}+\mathbf{S})$$

$$J(J+1) = L(L+1) + S(S+1) + 2\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}$$

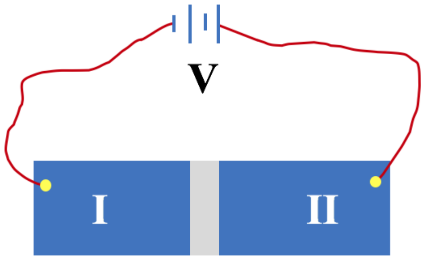
$$\langle\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}\rangle = \frac{1}{2}\{J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)\}.$$

Para el estado base del oscilador armónico, se tien que $L = 0$ y $J = S = 1/2$. Entonces $\langle\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}\rangle$ es igual a cero, lo que quiere decir que el estado base no se ve afectado por la presencia de la interacción espín-orbita (en primera aproximación). El primer estado excitado entonces tiene $L = 1$, $S = 1/2$ tal que $J = 3/2, 1/2$. Para $J = 3/2$ tenemos que

$$E_{1/2} = (5/2)\hbar\omega + \Delta/2.$$

Para $J = 1/2$ tenemos que

$$E_{1/2} = (5/2)\hbar\omega - \Delta$$



Pregunta 4 Considere dos metales superconductores I y II separados por un capa delgada de un material aislante, tal que la función de onda de un electrón puede estar definida entre los dos metales. Esto se conoce como una Juntura Josephson. Una fuente de voltaje V es conectada a través de la juntura para asegurar que en promedio existe neutralidad de carga. Esta situación puede ser descrita por medio de las siguientes ecuaciones de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial\Psi_1}{\partial t} = U_1\Psi_1 + K\Psi_2 + K\frac{\Psi_1\Psi_2^*}{\Psi_1^*}$$

$$i\hbar\frac{\partial\Psi_2}{\partial t} = U_2\Psi_2 + K\Psi_1 + K\frac{\Psi_2\Psi_1^*}{\Psi_2^*},$$

donde Ψ_1 y Ψ_2 son las amplitudes de probabilidad de un electrón en I y II, K es la constante de acoplamiento debido a la capa aislante, y $K\frac{\Psi_2\Psi_1^*}{\Psi_2^*}$ y $K\frac{\Psi_2\Psi_1^*}{\Psi_2^*}$ describen la fuente de voltaje como una fuente de electrones.

1. [10 Puntos] Muestre que $\rho_1 = |\Psi_1|^2$ y $\rho_2 = |\Psi_2|^2$ son constantes en el tiempo.

Solución: Tomando la ecuación para Ψ_1 y para $\Psi_1^\dagger$ y multiplicándolas por Ψ_1^* y Ψ_1 respectivamente, se llega a:

$$i\hbar\Psi_1^*\frac{\partial\Psi_1}{\partial t} = U_1\Psi_1^*\Psi_1 + K\Psi_1^*\Psi_2 + K\Psi_1\Psi_2^*$$

$$-i\hbar\Psi_1\frac{\partial\Psi_1^*}{\partial t} = U_1\Psi_1^*\Psi_1 + K\Psi_1\Psi_2^* + K\Psi_1^*\Psi_2$$

Restando ambas ecuaciones da:

$$i\hbar\frac{\partial|\Psi_1|^2}{\partial t} = i\hbar\frac{\partial\rho_1}{\partial t} = 0$$

Similarmente, se tiene que

$$i\hbar\frac{\partial|\Psi_2|^2}{\partial t} = i\hbar\frac{\partial\rho_2}{\partial t} = 0$$

2. [10 Puntos] Asumiendo $\rho_1 = \rho_2 = \rho_0$ y expresando las amplitudes de probabilidad como

$$\Psi_1 = \sqrt{\rho_0}e^{i\theta_1}$$

$$\Psi_2 = \sqrt{\rho_0} e^{i\theta_2}$$

encuentre las ecuaciones diferenciales para θ_1 y θ_2.

Solución: Sustituyendo las soluciones en términos de θ_1 y θ_2, dando:

$$i\hbar\sqrt{\rho_0} i\dot{\theta}_1 e^{i\theta_1} = U_1\sqrt{\rho_0} e^{i\theta_1} + K\sqrt{\rho_0} e^{i\theta_2} + K\sqrt{\rho_0} e^{i(2\theta_1-\theta_2)}$$

, tomando la expresión análoga para θ_2 da

$$\dot{\theta}_1 = -\frac{U_1}{\hbar} - \frac{2K}{\hbar}\cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\dot{\theta}_2 = -\frac{U_1}{\hbar} - \frac{2K}{\hbar}\cos(\theta_2 - \theta_1)$$

Restando las anteriores expresiones obtenemos

$$\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1 = \dot{\delta} = \frac{U_1 - U_2}{\hbar}$$

Donde $\delta = \theta_2 - \theta_1$. Entonces:

$$\delta = \frac{U_1 - U_2}{\hbar} t + \delta_0 = \frac{eV}{\hbar} t + \delta_0$$

3. [10 Puntos] Muestre que la corriente de la fuente de voltaje definida por

$$I = \frac{K}{i\hbar}\left(\Psi_1\Psi_2^* - \Psi_1^*\Psi_2\right),$$

oscila en el tiempo, y encuentre la frecuencia de estas oscilaciones.

Solución: La corriente

$$I = \frac{K}{i\hbar}\left(\Psi_1\Psi_2^* - \Psi_1^*\Psi_2\right)$$

$$I = \frac{K}{i\hbar}(\sqrt{\rho_0})^2\{e^{i(\theta_1-\theta_2)} - e^{-i(\theta_1-\theta_2)}\}$$

$$I = -\frac{2K\rho_0}{\hbar}\sin(\theta_2 - \theta_1)$$

$$I = -\frac{2K\rho_0}{\hbar}\sin\delta = -\frac{2K\rho_0}{\hbar}\sin\{\frac{eV}{\hbar}t + \delta_0\}$$

——— *Fin del examen. Buena suerte!* ———