



**Doctorado en Ciencias - Física**  
**Examen de Conocimientos - 2016 - 1**  
**Mecánica Cuántica**

No se permite el uso de ningún documento, libro o apuntes, ni el uso de ningún dispositivo electrónico tales como celulares, reproductores de música, computadores, tabletas, etc.

**Duración total del examen : 3 horas**

**PROBLEMA 1 (20 puntos).** Espín  $1/2$  en presencia de un campo magnético uniforme.

Considere un electrón. Inicialmente, en  $t = 0$ , la partícula se encuentra en  $|-\rangle_x$ , el estado propio del operador  $\hat{S}_x$  con valor propio  $-\hbar/2$ .

- (a) **(3 puntos)** ¿Qué posibles resultados y con qué probabilidad se pueden obtener si se realiza
- i. **(1 punto)** una medición de  $\hat{S}_x$ ?
  - ii. **(1 punto)** una medición de  $\hat{S}_y$ ?
  - iii. **(1 punto)** una medición de  $\hat{S}_z$ ?
- (b) **(2 puntos)** En el tiempo  $t = 0$  se enciende un campo magnético uniforme de magnitud  $B$  orientado en dirección  $z$ . La interacción entre la partícula y el campo magnético resulta en un término en el Hamiltoniano de la forma

$$\hat{H} = \frac{eB}{mc} \hat{S}_z, \quad (1)$$

donde  $e$  denota la magnitud de la carga del electrón,  $m$  su masa y  $c$  es la velocidad de la luz. Si el estado del sistema en  $t = 0$  es  $|-\rangle_x$ , demuestre que el estado del sistema en el tiempo  $t$  está dado por

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( e^{-i\frac{eB}{2mc}t} |+\rangle_z - e^{i\frac{eB}{2mc}t} |-\rangle_z \right). \quad (2)$$

- (c) **(6 puntos)** En el tiempo  $t$ , se realiza una medición sobre el sistema. Calcule y grafique la dependencia temporal de la probabilidad de obtener cada uno de los valores propios del observable medido,
- (2 puntos)** si se mide  $\hat{S}_x$ .
  - (2 puntos)** si se mide  $\hat{S}_y$ .
  - (2 puntos)** si se mide  $\hat{S}_z$ .
- (d) **(6 puntos)** Calcule y grafique la dependencia temporal de cada uno de los siguientes valores esperados:
- (2 puntos)**  $\langle \psi(t) | \hat{S}_x | \psi(t) \rangle$ .
  - (2 puntos)**  $\langle \psi(t) | \hat{S}_y | \psi(t) \rangle$ .
  - (2 puntos)**  $\langle \psi(t) | \hat{S}_z | \psi(t) \rangle$ .
- (e) **(3 puntos)** Dé una interpretación física de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

**PROBLEMA 2. (20 puntos) Adición de momento angular**

Considere un electrón en el orbital  $p$ , es decir que su momento angular orbital  $l = 1$  y su momento angular de espín  $s = \frac{1}{2}$ .

- (a) **(5 puntos)** En el caso en que no hay un acoplamiento entre el momento angular orbital,  $\hat{L}$  y el de espín,  $\hat{S}$ , escriba los elementos que constituyen la base desacoplada. Escríbalos en la forma  $|l, m_l; s, m_s\rangle$ , donde  $m_l$  y  $m_s$  denotan la componente  $z$  de los correspondientes momentos angulares.
- (b) **(5 puntos)** En el caso en que sí hay un acoplamiento entre el momento angular orbital y el de espín, es conveniente tratar el problema utilizando una base acoplada de la forma  $|j, m_j\rangle$  donde  $m_j$  denota la componente  $z$  del momento angular total  $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$ . Para un electrón en el orbital  $p$ , escriba cada uno de los elementos de la base acoplada,  $|j, m_j\rangle$ .
- (c) **(10 puntos)** Utilizando las reglas de la adición del momento angular, escriba cada uno de los elementos de la base acoplada,  $|j, m_j\rangle$ , en función de elementos de la base desacoplada,  $|l, m_l; s, m_s\rangle$ .

**PROBLEMA 3. (30 puntos) Dispersión.**

Considere el problema de dispersión de partículas tratado por el método de la ecuación integral de dispersión.

- (a) **(10 puntos)** Sin realizar ningún cálculo, describa cualitativamente porque es de esperarse que la forma asintótica de los estados estacionarios de dispersión sea

$$v_k^{r \rightarrow \infty} \sim e^{ikz} + f_k(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (3)$$

donde  $k$  es el momento inicial de la partícula y  $f_k(\theta, \varphi)$  la amplitud de dispersión. Explique claramente todas sus consideraciones y realice un esquema que describa claramente la situación física.

- (b) **(10 puntos)** Siguiendo el tratamiento de la ecuación integral de dispersión, se tiene que la amplitud de dispersión está dada por

$$f_k(\theta, \varphi) = \frac{-1}{4\pi} \int d^3r' e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{r}'} u(\vec{r}') v_k^{diff}(\vec{r}'), \quad (4)$$

donde  $v_k^{diff}(\vec{r}')$  describe a la onda incidente,  $\vec{k}' = |\vec{k}'| \hat{r}$  es el vector de onda asociado a la onda que llega al punto de observación,  $u(\vec{r}') = \frac{2\mu}{\hbar^2} V(\vec{r}')$  con  $V(\vec{r}')$  el potencial y  $\mu$  la masa reducida. Indique en qué consiste utilizar la aproximación de Born en la amplitud de dispersión y escriba como sería la expresión para  $f_k(\theta, \varphi)$  en esta aproximación. Expresar su respuesta en términos del momento transferido,  $\vec{q} = \vec{k}' - \vec{k}$ .

- (c) **(10 puntos)** La amplitud de dispersión y la sección transversal diferencial,  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ , se relacionan mediante  $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_k(\theta, \varphi)|^2$ . Calcule la sección eficaz diferencial en la aproximación de Born. Escríbala en función del momento transferido,  $\vec{q}$ , el potencial  $V(\vec{r}')$  y la masa reducida.

**PROBLEMA 4. (30 puntos) Teoría de perturbaciones dependientes del tiempo**

En este ejercicio calcularemos el efecto de una perturbación de la forma  $\hat{H}_I(t) = \hat{W} \sin(\omega t)$  donde  $\hat{W}$  es una perturbación constante y  $\omega$  es una frecuencia que no varía en el tiempo. Para esto considere que inicialmente el sistema está en el estado  $|\varphi_n\rangle$  que es un estado propio del Hamiltoniano no perturbado,  $\hat{H}_0$ , tal que  $\hat{H}_0|\varphi_n\rangle = \hbar\omega_n|\varphi_n\rangle$ .

- (a) **(20 puntos)** Primero se calculará la corrección a primer orden para el estado no perturbado,  $|\varphi_n\rangle$ . Para esto siga los siguientes pasos:
- i. **(5 puntos)** considere que el estado del sistema perturbado en el tiempo  $t$  puede escribirse como

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n b_n(t)e^{-i\omega_n t}|\varphi_n\rangle, \quad (5)$$

donde  $b_n(t)e^{-i\omega_n t}$  es un coeficiente dependiente del tiempo que está regido por la perturbación. Utilizando la ecuación de Schrödinger y operando con un bra  $\langle\varphi_m|$  que es estado propio de  $\hat{H}_0$ , demuestre que  $b_m(t)$  satisface

$$i\hbar \frac{db_m(t)}{dt} = \sum_n b_n(t)e^{-i(\omega_n - \omega_m)t} W_{mn}, \quad (6)$$

donde  $W_{mn} = \langle\varphi_m|\hat{H}_I(t)|\varphi_n\rangle$ .

- ii. **(5 puntos)** Expandiendo  $b_n(t) = \sum_r \lambda^r b_n^{(r)}(t)$  y reemplazando  $\hat{H}_I(t) \rightarrow \lambda\hat{H}_I(t)$  con  $\lambda$  un parámetro que ayuda a llevar el orden en el que queremos ver la perturbación, demuestre que  $b_m^{(r)}$  satisface la ecuación de recurrencia

$$i\hbar \frac{db_m^{(r)}(t)}{dt} = \sum_n b_n^{(r-1)}(t)e^{-i(\omega_n - \omega_m)t} W_{mn}. \quad (7)$$

- iii. **(5 puntos)** Utilizando Ec. 7 y considerando que  $|\psi(t=0)\rangle = |\varphi_i\rangle$ , demuestre que

$$b_m^{(0)}(t) = \delta_{m,i} \quad b_m^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t e^{-i(\omega_i - \omega_m)t'} W_{mi} dt'. \quad (8)$$

- iv. **(5 puntos)** Para  $\hat{H}_I(t) = \hat{W} \sin(\omega t)$  demuestre que

$$b_m^{(1)}(t) = \frac{\tilde{W}_{mi}}{2i\hbar} (A_+ - A_-), \quad (9)$$

donde  $\tilde{W}_{mi} = \langle\varphi_m|\hat{W}|\varphi_n\rangle$ ,  $A_+$  es el término antiresonante y  $A_-$  el término resonante dados por

$$A_+ = \frac{1 - e^{i(\omega + \omega_{mi})t}}{\omega_{mi} + \omega} \quad A_- = \frac{1 - e^{i(\omega_{mi} - \omega)t}}{\omega_{mi} - \omega}, \quad (10)$$

con  $\omega_{mi} = \omega_m - \omega_i$ .

(b) **(10 puntos)** En esta segunda parte del ejercicio, se calculará, a primer orden, la probabilidad de transición de un estado inicial,  $|\varphi_i\rangle$ , a un estado final,  $|\varphi_f\rangle$ . Para esto se seguirán los siguientes pasos:

i. **(5 puntos)** Demuestre que al considerar la perturbación encendida, es decir  $\lambda = 1$ , y tomar  $|\varphi_f\rangle \neq |\varphi_i\rangle$ , la probabilidad de transición de un estado inicial a un estado final,  $P_{if}(t) = |b_f^{(1)}(t)|^2$ .

ii. **(5 puntos)** Demuestre que al despreciar el término antiresonante en Ec. 9,

$$P_{if}(t; \omega) = \frac{|\tilde{W}_{fi}|^2}{4\hbar^2} \left[ \frac{\sin((\omega_{fi} - \omega)\frac{t}{2})}{(\omega_{fi} - \omega)\frac{1}{2}} \right]^2. \quad (11)$$

Para facilitar esta demostración, note que  $A_-$  puede escribirse como

$$A_- = -ie^{i(\omega_{mi} - \omega)t/2} \left[ \frac{\sin((\omega_{mi} - \omega)\frac{t}{2})}{(\omega_{mi} - \omega)\frac{1}{2}} \right]. \quad (12)$$

Dé una interpretación física de Ec. 11. Para esto, realice dos gráficas:  $P_{if}(t)$  considerando a  $\omega$  constante y  $\omega \neq \omega_{fi}$ ; y otra gráfica,  $P_{if}(\omega)$ , para el caso en que  $\omega$  varía y el tiempo está fijo.



**Doctorado en Ciencias - Física**  
**Examen de Conocimientos - 2016 - 1**  
**Mecánica Cuántica**

**FORMULAS ÚTILES**

A. Oscilador armónico, operadores escalera

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad \text{y} \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (13)$$

B.

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} e^{im\varphi} P_l^m(\cos\theta) \quad (14)$$

$$Y_l^m(\pi - \theta, \varphi + \pi) = (-1)^l Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (15)$$

C. Para los operadores de momento angular  $\hat{J}$ :

$$\hat{J}_z|J, m_j\rangle = j(j+1)\hbar|J, m_j\rangle$$

$$\hat{J}_+|J, m_j\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}|J, m_j+1\rangle$$

$$\hat{J}_-|J, m_j\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}|J, m_j-1\rangle$$

$$[\hat{J}_+, \hat{J}_z] = -\hbar\hat{J}_+$$

$$[\hat{J}_-, \hat{J}_z] = \hbar\hat{J}_-$$

D. Matrices de Pauli

$$\vec{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

# Solución Problema 1

a) i) Posibles resultados  $\begin{cases} +\frac{\hbar}{2} \longrightarrow \text{Probabilidad } 0 \\ -\frac{\hbar}{2} \longrightarrow \text{Probabilidad } 1 \end{cases}$

ii) Posibles resultados  $\begin{cases} +\frac{\hbar}{2} \longrightarrow \text{Probabilidad } \frac{1}{2} \\ -\frac{\hbar}{2} \longrightarrow \text{Probabilidad } \frac{1}{2} \end{cases}$

iii) Posibles resultados  $\begin{cases} +\frac{\hbar}{2} \longrightarrow \text{Probabilidad } \frac{1}{2} \\ -\frac{\hbar}{2} \longrightarrow \text{Probabilidad } \frac{1}{2} \end{cases}$

b)  $\vec{B} = B\hat{z} \Rightarrow \hat{H} = \frac{eB}{mc} \hat{S}_z$

$$|\psi(t=0)\rangle = |-\rangle_x$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}\frac{t}{\hbar}} |\psi(t=0)\rangle$$

$$= e^{-\frac{ieBt}{mc\hbar} \hat{S}_z} |-\rangle_x$$

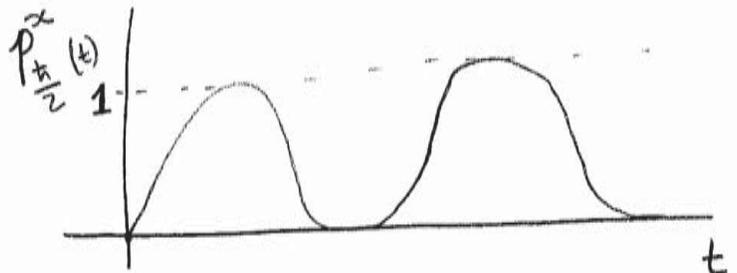
$$= e^{-\frac{ieBt}{mc\hbar} \hat{S}_z} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_z - |-\rangle_z) \right]$$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ e^{-\frac{ieBt}{mc\hbar} \left(\frac{\hbar}{2}\right)} |+\rangle_z - e^{-\frac{ieBt}{mc\hbar} \left(-\frac{\hbar}{2}\right)} |-\rangle_z \right]$$

© i) Posibles valores  $\begin{cases} +\frac{\hbar}{2} \\ -\frac{\hbar}{2} \end{cases}$

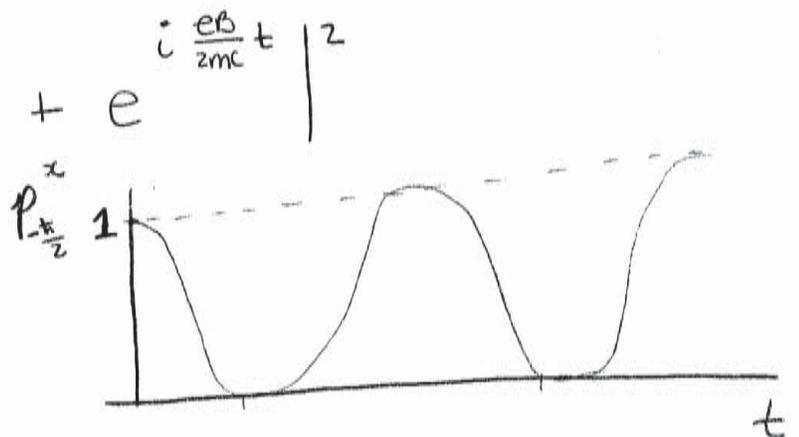
$$\begin{aligned}
 \bullet P_{\frac{\hbar}{2}}^x(t) &= \left| \langle + | \Psi(t) \rangle \right|^2 \\
 &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \langle + | + \right) + \langle + | - \right) | \Psi(t) \rangle \right|^2 \\
 &= \frac{1}{4} \left| e^{-i\frac{eBt}{2mc}} - e^{i\frac{eBt}{2mc}} \right|^2 \\
 &= \frac{1}{4} \sin^2 \left( \frac{eB}{2mc} t \right) |2i|^2
 \end{aligned}$$

$$P_{\frac{\hbar}{2}}^x(t) = \sin^2 \left( \frac{eB}{2mc} t \right)$$



$$\begin{aligned}
 \bullet P_{-\frac{\hbar}{2}}^x(t) &= \left| \langle - | \Psi(t) \rangle \right|^2 \\
 &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \langle + | - \right) - \langle - | - \right) | \Psi(t) \rangle \right|^2 \\
 &= \frac{1}{4} \left| e^{-i\frac{eBt}{2mc}} + e^{i\frac{eBt}{2mc}} \right|^2
 \end{aligned}$$

$$P_{-\frac{\hbar}{2}}^x(t) = \cos^2 \left( \frac{eB}{2mc} t \right)$$



$$ii) \rho_{\frac{t}{2}}^y = \left| \langle + | \psi(t) \rangle \right|^2$$

$$= \frac{1}{2} \left| \left( \frac{\langle + |}{2} - i \frac{\langle - |}{2} \right) | \psi(t) \rangle \right|^2$$

$$= \frac{1}{4} \left| e^{-i \frac{eB}{2mc} t} + i e^{i \frac{eB}{2mc} t} \right|^2$$

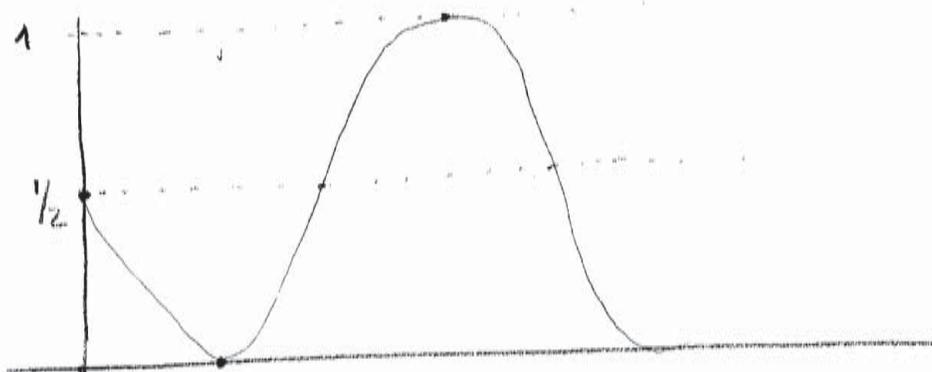
$$= \frac{1}{4} \left[ e^{-i \frac{eB}{2mc} t} + i e^{i \frac{eB}{2mc} t} \right] \left[ e^{i \frac{eB}{2mc} t} - i e^{-i \frac{eB}{2mc} t} \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[ 1 - i e^{-i \frac{eB}{mc} t} + i e^{i \frac{eB}{mc} t} + 1 \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[ 2 + i \left( e^{i \frac{eB}{mc} t} - e^{-i \frac{eB}{mc} t} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[ 2 + i (2i) \sin \left( \frac{eB}{mc} t \right) \right]$$

$$\rho_{\frac{t}{2}}^y = \frac{1}{2} \left[ 1 - \sin \left( \frac{eB}{mc} t \right) \right]$$



t

$$|H\rangle_y = \frac{|H\rangle_z + i|I\rangle_z}{\sqrt{2}}$$

$$|I\rangle_y = \frac{|H\rangle_z - i|I\rangle_z}{\sqrt{2}}$$

$$\bullet \quad P_{-\frac{t}{2}}^y(t) = \left| \langle -1 | \psi(t) \rangle \right|^2$$

$$= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\langle +1}{2} - (-i) \frac{\langle -1}{2} \right) | \psi(t) \rangle \right|^2$$

$$= \frac{1}{4} \left| e^{-\frac{i e B t}{2 m c}} - i e^{+\frac{i e B t}{2 m c}} \right|^2$$

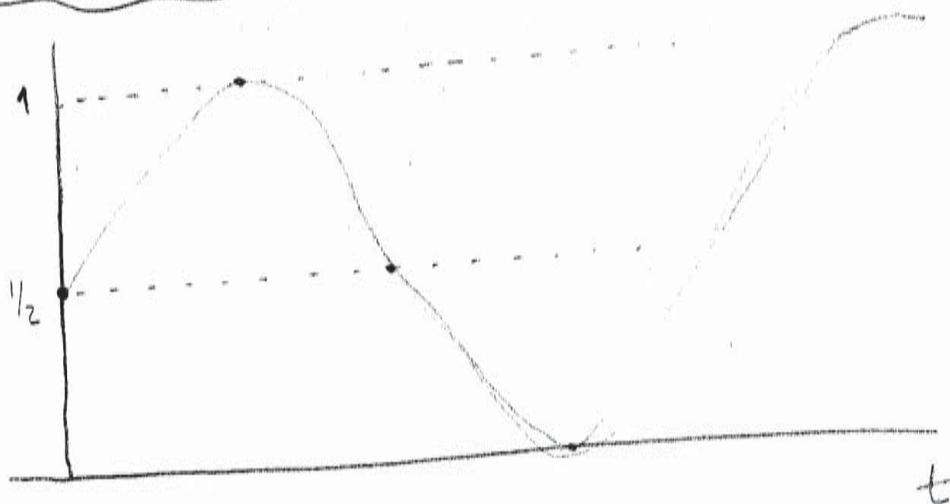
$$= \frac{1}{4} \left[ e^{-i \frac{e B}{2 m c} t} \quad -i e^{+\frac{i e B}{2 m c} t} \right] \left[ e^{i \frac{e B}{2 m c} t} \quad +i e^{-\frac{i e B}{2 m c} t} \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[ 1 + i e^{-i \frac{e B}{m c} t} - i e^{i \frac{e B}{m c} t} + 1 \right]$$

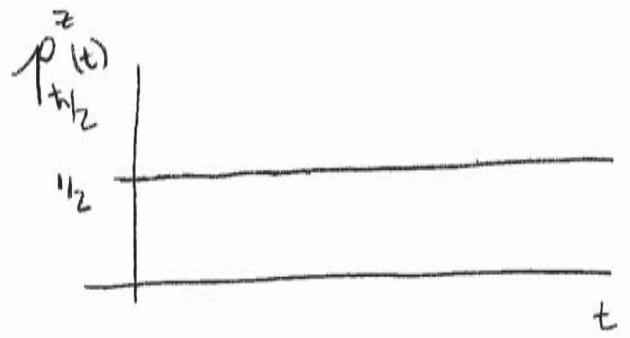
$$= \frac{1}{4} \left[ 2 - i \left( e^{i \frac{e B}{m c} t} - e^{-i \frac{e B}{m c} t} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[ 2 - i (2i) \sin \left( \frac{e B}{m c} t \right) \right]$$

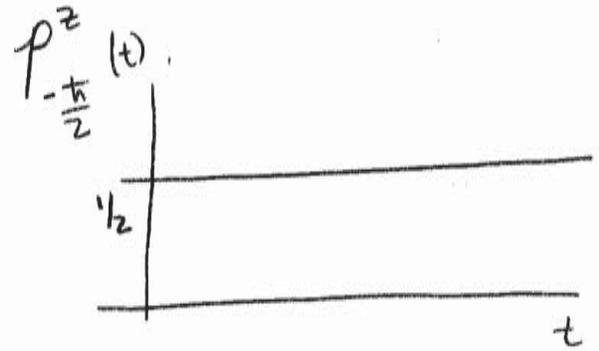
$$= \frac{1}{2} \left[ 1 + \sin \left( \frac{e B}{m c} t \right) \right]$$



$$\begin{aligned}
 \text{iii) } P_{+\frac{1}{2}}^z(t) &= \left| \langle + | \psi(t) \rangle \right|^2 \\
 &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i \frac{eB}{2mc} t} \right|^2 \\
 &= \frac{1}{2} //
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 P_{-\frac{1}{2}}^z(t) &= \left| \langle - | \psi(t) \rangle \right|^2 \\
 &= \frac{1}{2} //
 \end{aligned}$$



$$\textcircled{d} \quad i) \quad \langle \psi(t) | \hat{S}_x | \psi(t) \rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \psi(t) | \hat{S}_x | \left( e^{-i \frac{eB}{2mc} t} \left( \frac{|+\rangle_x + |-\rangle_x}{\sqrt{2}} \right) - e^{i \frac{eB}{2mc} t} \left( \frac{|+\rangle_x - |-\rangle_x}{\sqrt{2}} \right) \right) \rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \psi(t) | e^{-i \frac{eB}{2mc} t} \left( \frac{\frac{\hbar}{2} |+\rangle_x - \frac{\hbar}{2} |-\rangle_x}{\sqrt{2}} \right) - e^{i \frac{eB}{2mc} t} \left( \frac{\frac{\hbar}{2} |+\rangle_x - (-\frac{\hbar}{2}) |-\rangle_x}{\sqrt{2}} \right) \rangle$$

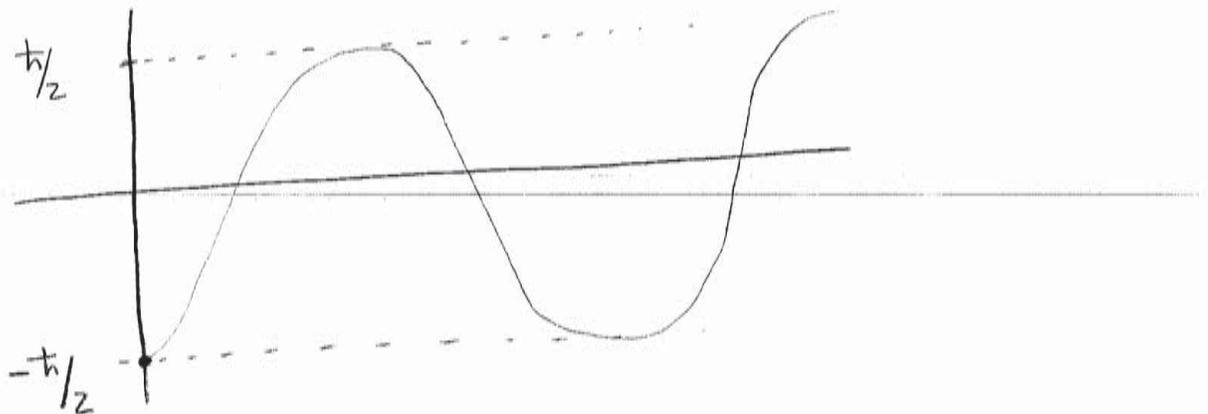
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hbar}{2} \langle \psi(t) | \left( e^{-i \frac{eB}{2mc} t} |-\rangle_z - e^{i \frac{eB}{2mc} t} |+\rangle_z \right) \rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hbar}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ - e^{i \frac{eB}{mc} t} - e^{-i \frac{eB}{mc} t} \right]$$

$$= - \frac{\hbar}{4} \cdot 2 \cdot \cos \left( \frac{eB}{mc} t \right)$$

$$= - \frac{\hbar}{2} \cos \left( \frac{eB}{mc} t \right)$$

$$\boxed{\langle \hat{S}_x(t) \rangle = - \frac{\hbar}{2} \cos \left( \frac{eB}{mc} t \right)}$$



$$ii) \langle \psi(t) | \hat{S}_y | \psi(t) \rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \psi(t) | \hat{S}_y | \left( e^{-i \frac{eB}{2mc} t} \left( \frac{|+\rangle_y + |-\rangle_y}{\sqrt{2}} \right) - e^{i \frac{eB}{2mc} t} \left( \frac{|+\rangle_y - |-\rangle_y}{\sqrt{2} i} \right) \right) \rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \psi(t) | \left( e^{-i \frac{eB}{2mc} t} \frac{\hbar}{2} \left( \frac{|+\rangle_y - |-\rangle_y}{\sqrt{2}} \right) - e^{i \frac{eB}{2mc} t} \frac{\hbar}{2} \left( \frac{|+\rangle_y + |-\rangle_y}{\sqrt{2} i} \right) \right) \rangle$$

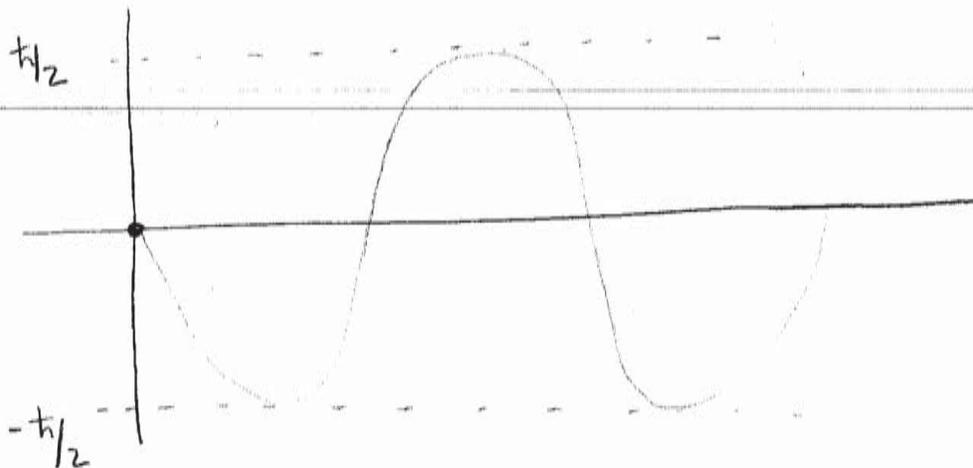
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hbar}{2} \langle \psi(t) | \left[ e^{-i \frac{eB}{2mc} t} |-\rangle_y \frac{\sqrt{2} i}{\sqrt{2}} - e^{i \frac{eB}{2mc} t} \frac{\sqrt{2} |+\rangle_y}{\sqrt{2} i} \right] \rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hbar}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ -e^{-i \frac{eB}{mc} t} i + i e^{+i \frac{eB}{mc} t} \right]$$

$$= + \frac{\hbar}{4} \cdot i \cdot 2i \sin \left( \frac{eB}{mc} t \right)$$

$$= - \frac{\hbar}{2} \sin \left( \frac{eB}{mc} t \right)$$

$$\boxed{\langle S_y(t) \rangle = - \frac{\hbar}{2} \sin \left( \frac{eB}{mc} t \right)}$$



$$iii) \langle \psi(t) | \hat{S}_z | \psi(t) \rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \psi(t) | \left( e^{-i \frac{eB}{2mc} t} \frac{\hbar}{2} |+\rangle_z + e^{i \frac{eB}{2mc} t} \frac{\hbar}{2} |-\rangle_z \right)$$

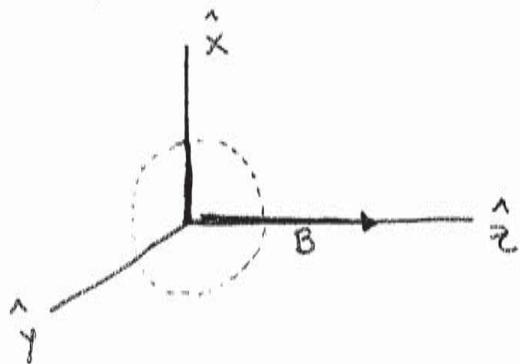
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hbar}{2} [1 - 1]$$

$$= 0$$

$$\langle \psi(t) | \hat{S}_z | \psi(t) \rangle = 0$$



e) Los resultados anteriores pueden verse como la precesión del espín en  $x$  al rodear de la dirección del campo magnético.



Al precesar se describe un movimiento circular en el plano  $\hat{x}-\hat{y}$ . Los valores esperados  $\langle \hat{S}_x(t) \rangle$  y  $\langle \hat{S}_y(t) \rangle$  describen este círculo.

$\langle \hat{S}_z \rangle = 0$  lo que corresponde al...

# Solucion Problema 2

(a)  $l = 1$   $m_l = 1$   
 $m_l = 0$   
 $m_l = -1$

$s = \frac{1}{2}$

$m_s = \frac{1}{2}$

$m_s = -\frac{1}{2}$

base desacoplada:

$|1, 1; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$

$|1, 0; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$

$|1, -1; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$

$|1, 1; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$

$|1, 0; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$

$|1, -1; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$

(b) Valores de  $J = l + s$  pueden ir desde  $|l + s|$  hasta  $|l - s| \Rightarrow$   
 $|l + s| = |1 + \frac{1}{2}| = \frac{3}{2} \begin{matrix} < +\frac{3}{2} \\ < -\frac{1}{2} \end{matrix}$   
 $|l - s| = |1 - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2} \begin{matrix} < +\frac{1}{2} \\ < -\frac{1}{2} \end{matrix}$

Base acoplada:

$|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle, |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle, |\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle, |\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle$

$|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle, |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$

---

(c) •  $|\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle = |1, -1; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$  (\*) (\*)

•  $|\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\rangle = |1, 1; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$  (\*)

los elementos  $|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle$  y  $|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$  se encuentran aplicando el operador  $\hat{J}_+$  y  $\hat{J}_-$  a (\*) y (\*\*), respectivamente.

$$\bullet \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$\hat{J}_- \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle = \hat{J}_- \left| 1, 1; \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$\hbar \sqrt{\frac{3}{2} \left( \frac{3}{2} + 1 \right) - \frac{3}{2} \left( \frac{3}{2} - 1 \right)} \left| \frac{3}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle = \left( \hat{I}_- + \hat{S}_- \right) \left| 1, 1; \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$\cancel{\hbar} \sqrt{\frac{3}{2} \left( \frac{5}{2} \right) - \frac{3}{2} \left( \frac{1}{2} \right)} \left| \frac{3}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{1(1+1) - 1(1-1)} \cancel{\hbar} \left| 1, 0; \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$+ \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 1 \right)} \cancel{\hbar} \left| 1, 1; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$\sqrt{\frac{15}{4} - \frac{3}{4}} \left| \frac{3}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{1(2) - 0} \left| 1, 0; \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$+ \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} \right) - \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} \right)} \left| 1, 1; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$\sqrt{3} \left| \frac{3}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{2} \left| 1, 0; \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} \left| 1, 1; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$\boxed{\left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| 1, 0; \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} \left| 1, 1; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle}$$

$$\bullet \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle :$$

$$\hat{J}_+ \left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle = \hat{J}_+ \left| 1, -1; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$\hbar \sqrt{\frac{3}{2} \left( \frac{3}{2} + 1 \right) - \left( -\frac{3}{2} \right) \left( -\frac{3}{2} + 1 \right)} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \left( \hat{L}_+ + \hat{S}_+ \right) \left| 1, -1; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$\hbar \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} - \left( -\frac{3}{2} \right) \left( -\frac{1}{2} \right)} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \hbar \sqrt{1(1+1) - (-1)(-1+1)} \left| 1, 0; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$+ \hbar \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) - \left( -\frac{1}{2} \right) \left( -\frac{1}{2} + 1 \right)} \left| 1, -1; \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$\sqrt{\frac{15}{4} - \frac{3}{4}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{2} \left| 1, 0; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$+ \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} \right) - \left( -\frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} \right)} \left| 1, -1; \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$\sqrt{3} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{2} \left| 1, 0; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} \left| 1, -1; \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$\boxed{\left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| 1, 0; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} \left| 1, -1; \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle}$$

Los elementos  $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$  y  $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$  se encuentran con la condición de ortogonalidad con  $|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle$  y  $|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$ , respectivamente.

$$\bullet \langle \frac{3}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle = 0$$

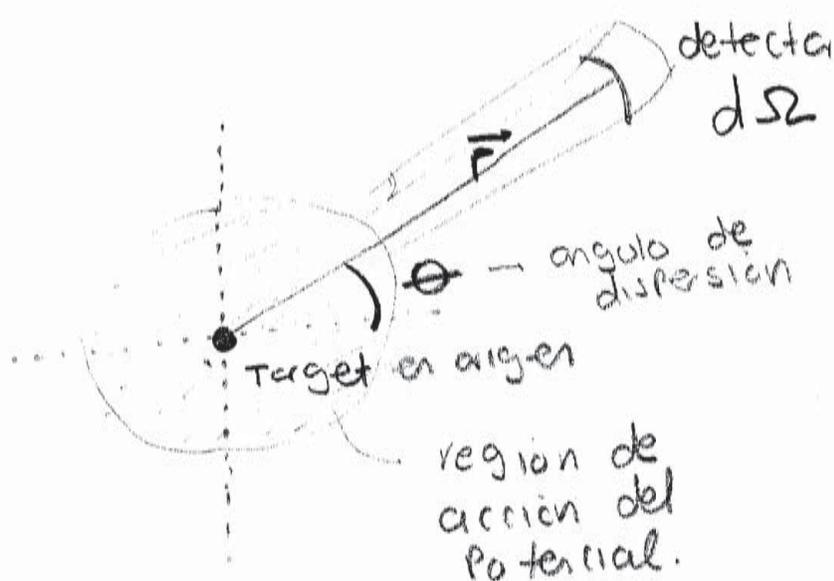
$$\Rightarrow \boxed{|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} |1, 0; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |1, 1; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle}$$

$$\bullet \langle \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} |1, 0; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |1, -1; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle}$$

# Solución Problema 3

(a) Partículas incidentes



$$f_{\vec{k}}(\theta, \varphi) \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{kr}$$

En el limite asintotico se espera tener la onda plana incidente más una onda esferica cuya amplitud,  $f_{\vec{k}}(\theta, \varphi)$ , depende de la posición y del potencial.

(b) La aproximación de Born consiste en sustituir  $\psi_{\vec{k}}^{\text{diff}}(\vec{r})$  en la ecuación 4 por  $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ .

Es decir igual a la onda plana incidente.

Esto tiene sentido ya que la aproximación de Born es válida para potenciales débiles y por lo tanto afecta poco a la función incidente.

Born

$$f_{\kappa}(\theta, \varphi) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3 \vec{r}' e^{-i\vec{\kappa}' \cdot \vec{r}'} u(\vec{r}') e^{i\vec{\kappa} \cdot \vec{r}'}$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int d^3 \vec{r}' u(\vec{r}') e^{-i(\vec{\kappa}' - \vec{\kappa}) \cdot \vec{r}'}$$

Born

$$f_{\kappa}(\theta, \varphi) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3 \vec{r}' u(\vec{r}') e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}'}$$

(c)  $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_{\kappa}(\theta, \varphi)|^2$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left| \int d^3 \vec{r}' \left( \frac{2M}{\hbar^2} v(\vec{r}') \right) e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}'} \right|^2$$

$$= \frac{1}{(4\pi^2)^2} \frac{4M^2}{\hbar^4} \left| \int d^3 \vec{r}' v(\vec{r}') e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}'} \right|^2$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{M^2}{\hbar^4} \left| \int d^3 \vec{r}' v(\vec{r}') e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}'} \right|^2$$

$$(2i) \quad |\Psi(t)\rangle = \sum_n b_n(t) e^{-i\omega_n t} |\Psi_n\rangle$$

Using Eq. Schrodinger:  $\hat{H}|\Psi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle$

$$[\hat{H}_0 + \hat{H}_I(t)] |\Psi(t)\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle$$

$$[\hat{H}_0 + \hat{H}_I(t)] \sum_n b_n(t) e^{-i\omega_n t} |\Psi_n\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} \sum_n b_n(t) e^{-i\omega_n t} |\Psi_n\rangle$$

$$[\hat{H}_0 + \hat{H}_I(t)] \sum_n b_n(t) e^{-i\omega_n t} |\Psi_n\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} \sum_n b_n(t) e^{-i\omega_n t} |\Psi_n\rangle$$

$$\langle \Psi_m | \sum_n b_n(t) e^{-i\omega_n t} \hbar\omega_n |\Psi_n\rangle + \sum_n b_n(t) e^{-i\omega_n t} \langle \Psi_m | \hat{H}_I(t) |\Psi_n\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} \sum_n b_n(t) e^{-i\omega_n t} \langle \Psi_m | \Psi_n\rangle$$

$$\sum_n b_n(t) e^{-i\omega_n t} \hbar\omega_n \delta_{mn} + \sum_n b_n(t) e^{-i\omega_n t} \langle \Psi_m | \hat{H}_I(t) | \Psi_n \rangle = i\hbar \frac{d}{dt} \sum_n b_n(t) e^{-i\omega_n t} \delta_{mn}$$

$$b_m(t) \hbar\omega_m + \sum_n b_n(t) e^{-i(\omega_n - \omega_m)t} W_{mn} = i\hbar \frac{d}{dt} b_m(t) e^{-i\omega_m t}$$

$$b_m(t) \hbar\omega_m + \sum_n b_n(t) e^{-i(\omega_n - \omega_m)t} W_{mn} = i\hbar \left( \frac{d b_m(t)}{dt} \right) e^{-i(\omega_m - \omega_m)t} + i\hbar b_m(t) (-i\omega_m) e^{-i(\omega_m - \omega_m)t}$$

$$b_m(t) \hbar\omega_m + \sum_n b_n(t) e^{-i(\omega_n - \omega_m)t} W_{mn} = i\hbar \frac{d b_m(t)}{dt} + \hbar\omega_m b_m(t)$$

$$\left\{ i\hbar \frac{d}{dt} b_m(t) = \sum_n b_n(t) e^{-i(\omega_n - \omega_m)t} W_{mn} \right\} (*)$$

$$\textcircled{a} b_m(t) = \sum_r b_m^{(r)}(t) \lambda^r$$

Remplazando en (\*) y teniendo en cuenta que

$$i\hbar \frac{d}{dt} \left[ b_m^{(0)}(t) + \lambda b_m^{(1)}(t) + \lambda^2 b_m^{(2)}(t) + \dots \right]$$

$$= \sum_n \left[ b_n^{(0)}(t) + \lambda b_n^{(1)}(t) + \lambda^2 b_n^{(2)}(t) + \dots \right] e^{-i(\omega_n - \omega_m)t} \lambda W_{mn}$$

$$\left[ \begin{array}{l} \langle \psi_m | \hat{H}_I | \psi_n \rangle \\ \lambda \langle \psi_m | \hat{H}_I | \psi_n \rangle \\ \lambda W_{mn} \end{array} \right]$$

$$\boxed{\lambda^0} \quad i\hbar \frac{d}{dt} b_m^{(0)}(t) = 0$$

$$\boxed{\lambda^1} \quad i\hbar \frac{d}{dt} b_m^{(1)}(t) = \sum_n b_n^{(0)}(t) e^{-i(\omega_n - \omega_m)t} W_{mn}$$

$$\boxed{\lambda^2} \quad i\hbar \frac{d}{dt} b_m^{(2)}(t) = \sum_n b_n^{(1)}(t) e^{-i(\omega_n - \omega_m)t} W_{mn}$$

$$\Downarrow$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} b_m^{(r)}(t) = \sum_n b_n^{(r-1)}(t) e^{-i(\omega_n - \omega_m)t} W_{mn}$$

Qiii

• it's  $\frac{d}{dt} b_m^{(0)}(t) = 0$

$\Rightarrow b_m^{(0)}(t) \rightarrow \text{constante}$

$b_n^{(0)}(t) = b_n^{(0)}(t=0)$

se sabe  $|\psi(t=0)\rangle = |\psi_i\rangle$

$\Rightarrow$  como  $|\psi(t)\rangle = \sum_n b_n(t) e^{-i\omega_n t} |\psi_n\rangle$

$|\psi(t=0)\rangle = |\psi_i\rangle = \sum_n b_n(t=0) |\psi_n\rangle$

$\langle \psi_e | \psi_i \rangle = b_e(t=0)$

$\delta_{ei} = b_e(t=0)$

$b_e(t=0) = b_e^{(0)}(t=0) + \lambda b_e^{(1)}(t=0) + \dots$

en  $t=0$  justo antes de  
Prender la perturbación  
 $\lambda = 0 \Rightarrow$  todos estos  
terminos son cero.

---

$b_e(t=0) = b_e^{(0)}(t=0) = b_e^{(0)}(t)$

$\Rightarrow \boxed{b_m^{(0)}(t) = \delta_{mi}}$

$$\bullet i\hbar \frac{d}{dt} b_m^{(1)}(t) = \sum_n b_n^{(0)}(t) e^{-i(\omega_n - \omega_m)t} W_{mn}$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} b_m^{(1)}(t) = \sum_n \delta_{ni} e^{-i(\omega_n - \omega_m)t} W_{mn}$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} b_m^{(1)}(t) = e^{-i(\omega_i - \omega_m)t} W_{mi}$$

$$b_m^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t e^{-i(\omega_i - \omega_m)t'} W_{mi} dt'$$

(aiv)

$$\text{Para } \hat{W}_{mi} = \langle \psi_m | \hat{W} \sin \omega t | \psi_i \rangle$$

$$= \sin \omega t \langle \psi_m | \hat{W} | \psi_i \rangle$$

$$= \sin \omega t \tilde{W}_{mi}$$

$$b_m^{(1)}(t) = \frac{\tilde{W}_{mi}}{i\hbar} \int_0^t e^{-i(\omega_i - \omega_m)t'} \sin \omega t' dt'$$

$$= \frac{\tilde{W}_{mi}}{i\hbar} \int_0^t \sin \omega t' e^{i(\omega_m - \omega_i)t'} dt'$$

$$= \frac{\tilde{W}_{mi}}{i\hbar} \int_0^t \sin \omega t' e^{i\omega_{mi}t'} dt'$$

$$\underline{\omega_{mi} = \omega_m - \omega_i}$$

$$b_m^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t \tilde{W}_{mi} \sin \omega t' e^{i\omega_m t'} dt'$$

$$= \frac{\tilde{W}_{mi}}{i\hbar} \int_0^t \sin \omega t' e^{i\omega_m t'} dt'$$

$$= \frac{\tilde{W}_{mi}}{i\hbar} \left[ \int_0^t \frac{e^{i\omega t'} - e^{-i\omega t'}}{2i} \right] e^{i\omega_m t'} dt'$$

$$= -\frac{\tilde{W}_{mi}}{2\hbar} \left[ \int_0^t e^{i(\omega + \omega_m)t'} dt' - \int_0^t e^{-i(\omega - \omega_m)t'} dt' \right]$$

$$= -\frac{\tilde{W}_{mi}}{2\hbar} \left[ \frac{e^{i(\omega + \omega_m)t'} \Big|_0^t}{i(\omega + \omega_m)} - \frac{e^{-i(\omega - \omega_m)t'} \Big|_0^t}{(-i(\omega - \omega_m))} \right]$$

$$= -\frac{\tilde{W}_{mi}}{2\hbar(i)} \left[ \frac{(e^{i(\omega + \omega_m)t} - 1)}{\omega + \omega_m} - \frac{(1 - e^{-i(\omega - \omega_m)t})}{\omega - \omega_m} \right]$$

$$= \frac{\tilde{W}_{mi}}{2i\hbar} \left[ \frac{1 - e^{i(\omega + \omega_m)t}}{\omega_m + \omega} - \frac{1 - e^{i(\omega_m - \omega)t}}{\omega_m - \omega} \right]$$

Termino antiresonante

$A_+$

Termino resonante.

$A_-$



$$(b) P_{if}(t) = |\langle \psi_f | \psi(t) \rangle|^2$$

quedándose a primer orden

$$= |\langle \psi_f | \sum_n [b_n^{(0)}(t) + \lambda b_n^{(1)}(t)] e^{-i\omega_n t} | \psi_n \rangle|^2$$

$$= \left| \sum_n b_n^{(0)}(t) e^{-i\omega_n t} \delta_{fn} + \lambda \sum_n b_n^{(1)}(t) e^{-i\omega_n t} \delta_{fn} \right|^2$$

$$= \left| b_f^{(0)}(t) e^{-i\omega_f t} + \lambda b_f^{(1)}(t) e^{-i\omega_f t} \right|^2$$

$$= \left| b_f^{(0)}(t) + \lambda b_f^{(1)}(t) \right|^2$$

Sabemos de A.1 numeral (a iii)

que  $b_f^{(0)}(t) = \delta_{fi}$

como  $|\psi_f\rangle \neq |\psi_i\rangle$

---


$$\Rightarrow \underline{\underline{b_f^{(0)}(t) = 0}}$$

además Tomado  $\lambda = 1$

$$P_{if}(t) = |b_f^{(1)}(t)|^2$$

(bii)

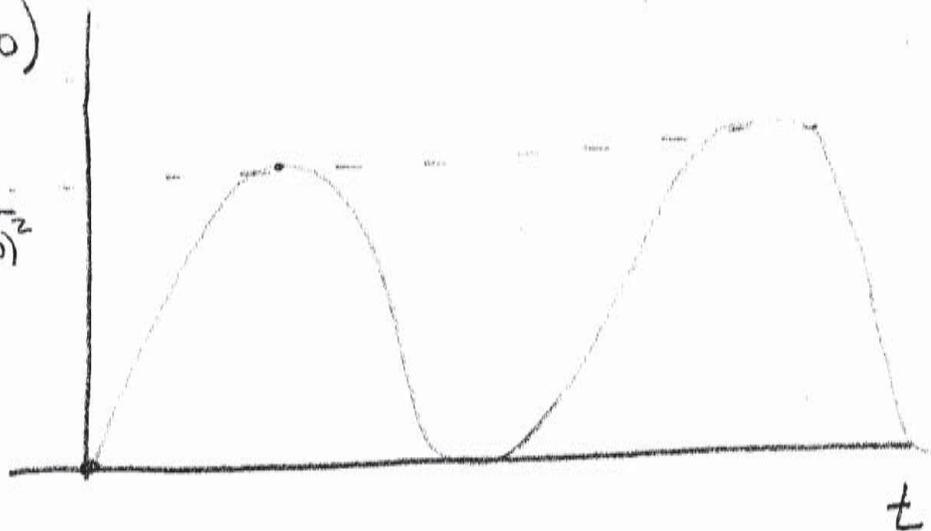
$$A = -i e^{i(\omega_{fi} - \omega) \frac{t}{2}}$$

$$\left[ \frac{\sin\left((\omega_{fi} - \omega) \frac{t}{2}\right)}{(\omega_{fi} - \omega)/2} \right]$$

$$P_{if}(t) = \frac{|\tilde{W}_{fi}|^2}{4\hbar^2} \frac{\sin^2\left((\omega_{fi} - \omega) \frac{t}{2}\right)}{\left[(\omega_{fi} - \omega)/2\right]^2}$$

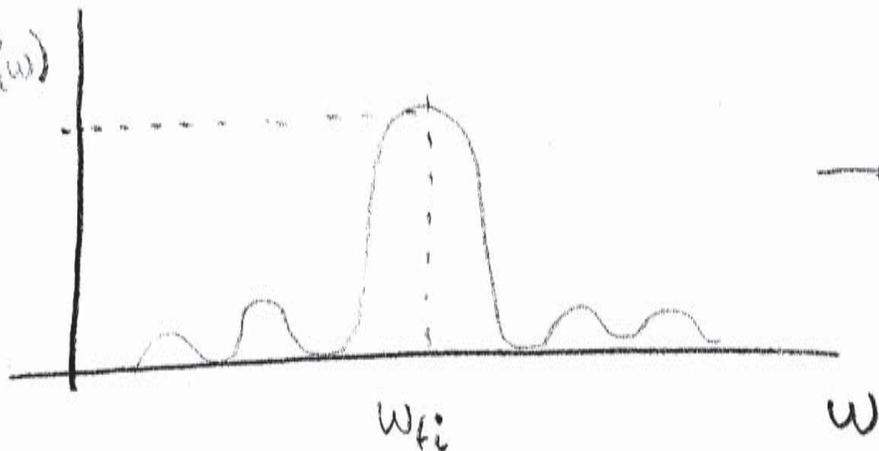
$$P_{if}(t, \omega \rightarrow \omega_{fi})$$

$$\frac{|\tilde{W}_{fi}|^2}{4\hbar^2} \frac{t^2}{(\omega_{fi} - \omega)^2}$$



$$P_{if}(t \rightarrow \infty, \omega)$$

$$\frac{|\tilde{W}_{fi}|^2}{4\hbar^2} t^2 P_{if}(\omega)$$



→ Resonance  
@  $\omega = \omega_{fi}$



**Doctorado en Ciencias - Física**  
**Examen de Conocimientos - 2016 - 1**  
**Electromagnetismo**

No se permite el uso de ningún documento, libro o apuntes, ni el uso de ningún dispositivo electrónico tales como celulares, reproductores de música, computadores, tabletas, etc.

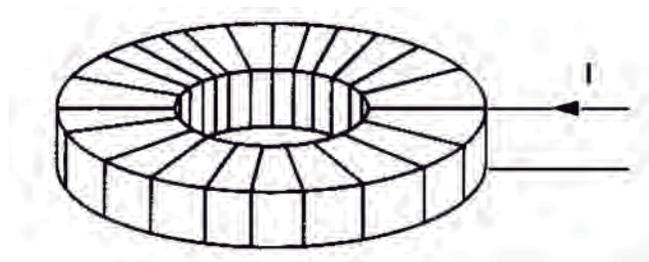
**Duración total del examen : 3 horas**

**PROBLEMA 1** Considere un cascarón conductor esférico de radio  $R$  y una carga puntual  $q$  situada a una distancia  $a > R$  del centro de la esfera.

- (a) (10 puntos) Calcule el potencial para todo punto del espacio producido por esta configuración cuando la esfera está a un potencial  $V(R) = 0$ . Use el método de imágenes y encuentre el valor de la carga imagen ( $q'$ ) y su posición con respecto al centro de la esfera.
- (b) (5 puntos) Ahora suponga que el conductor esférico se conecta a una batería, tal que la superficie de la esfera conductora se mantiene a un potencial constante  $V(R) = V_0$ . Partiendo de los resultados del punto anterior, encuentre la magnitud y la posición de una segunda carga imagen  $q''$  en términos de  $V_0$ .
- (c) (5 puntos) Suponga que  $q' = -q''$ . Calcule la fuerza que siente la carga  $q$  debido al conductor esférico para un potencial  $V(R) = V_0$ .

**PROBLEMA 2** El solenoide mostrado en la figura contiene un número total de  $N$  espiras distribuidas uniformemente, un radio interior  $a$ , un radio exterior  $b$  y una altura  $h$ .

- (a) (10 puntos) Suponga que por el alambre circula una corriente constante  $I$ . Calcule el campo magnético para
- $r < a$
  - $a < r < b$
  - $r > b$ .
- (b) (5 puntos) Calcule el flujo magnético por una de las espiras del solenoide. Usando esta información, indique la autoinductancia  $L$  del solenoide.
- (c) (5 puntos) Suponga ahora que por el alambre circula una corriente alterna  $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ , ¿Cuál es la magnitud de la fuerza electromotriz autoinducida (“back emf”) en este caso?



**PROBLEMA 3** A partir de las ecuaciones de Maxwell en el vacío,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

- (a) (5 puntos) Encuentre la ecuación de onda para el campo eléctrico y el campo magnético.
- (b) (7 puntos) Suponga que la solución para estas ecuaciones son ondas planas, monocromáticas de frecuencia  $\omega$ , que se propagan en la dirección  $z$  tal que

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 \exp i(kz - \omega t)$$

$$\vec{B}(z, t) = \vec{B}_0 \exp i(kz - \omega t).$$

Encuentre las condiciones para la dirección y amplitud de  $\vec{E}_0$  y  $\vec{B}_0$  tal que se satisfagan las ecuaciones de Maxwell. Haga un dibujo en donde indique claramente la dirección de  $\vec{E}_0$ ,  $\vec{B}_0$  y  $\vec{k}$ . A partir de esto clasifique la onda.

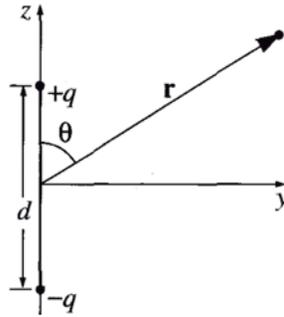
- (c) (8 puntos) Suponga que el plano  $xy, z = 0$  forma una frontera entre el vacío  $n_1 = 1$  y un medio transparente lineal con permitividad  $\mu \approx \mu_0$  e índice de refracción  $n_2 = c/v_2$ , donde  $v_2$  es la velocidad de propagación de la onda electromagnética en el medio transparente y  $c$  es la velocidad de propagación de la luz en el vacío. La onda plana incide normal al plano  $xy$  de tal forma que una parte de la luz es reflejada y otra es transmitida. Escriba las expresiones para el campo eléctrico y magnético de la onda incidente, de la onda reflejada y de la onda transmitida por el medio y las condiciones de frontera correspondientes.
- (d) (5 puntos) Usando las condiciones de frontera, encuentre la amplitud de las ondas reflejada y transmitida en términos de la amplitud de la onda incidente.
- (e) (5 puntos) Calcule el vector de Poynting para la onda transmitida y para la onda reflejada. ¿Cómo se relacionan estos valores con el vector de Poynting de la onda incidente?

**PROBLEMA 4** Los potenciales retardados producidos, a una distancia  $r$  del origen, por un dipolo perfecto que oscila con una frecuencia  $\omega$  están dados por:

$$V(r, \theta, t) = \frac{p_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r} \left\{ -\frac{\omega}{c} \sin[\omega(t - r/c)] + \frac{1}{r} \cos[\omega(t - r/c)] \right\}$$

$$\vec{A}(r, \theta, t) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r} \sin[\omega(t - r/c)] (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}).$$

En donde  $p_0 = q_0 d$  es el valor máximo del momento dipolar producido por dos cargas separadas a una distancia  $d$  como se muestra en la figura.



- (10 puntos) Encontrar el campo eléctrico y magnético producido por dicho dipolo en un punto  $\vec{r}$  del espacio.
- (5 puntos) Calcule este campo en la zona de radiación, cuando  $r \gg \frac{c}{\omega}$ .
- (10 puntos) Usando este campo, calcule y haga un dibujo de la intensidad promedio obtenida en un ciclo de oscilación como función del ángulo  $\theta$  para un  $r$  fijo. Indique la dirección para el valor máximo y el valor mínimo de dicha radiación.
- (5 puntos) Calcule la potencia total irradiada por el dipolo en este límite, para esto tenga en cuenta  $\int \sin^3 x dx = \frac{1}{12} \{ \cos(3x) - 9 \cos(x) \}$ .

## Fórmulas generales

### Identidades vectoriales

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A}$$

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A})$$

Derivadas vectoriales en coordenadas cartesianas:

$$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial t}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial t}{\partial z} \hat{k}$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \vec{v} = \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \hat{k}$$

Derivadas vectoriales en coordenadas esféricas:

$$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial t}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

$$\nabla \times \vec{v} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{r} + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r v_\phi) \right] \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi}$$

Derivadas vectoriales en coordenadas cilíndricas:

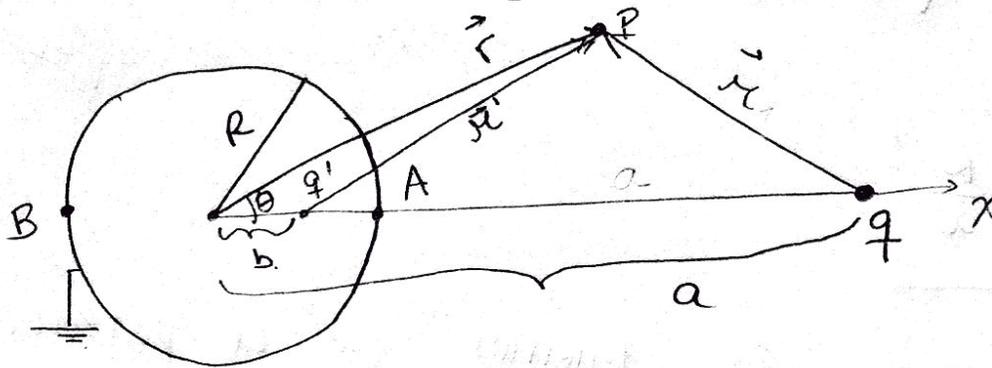
$$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial s} \hat{s} + \frac{1}{s} \frac{\partial t}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial t}{\partial z} \hat{k}$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s v_s) + \frac{1}{s} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \vec{v} = \left[ \frac{1}{s} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right] \hat{s} + \left[ \frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s} \right] \hat{\phi} + \frac{1}{s} \left[ \frac{\partial}{\partial s} (s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial \phi} \right] \hat{k}$$

# solución examen de conocimientos Electromagnetismo.

1) a)



Suponga la carga  $q'$  en un punto situado a una distancia  $b$  del centro de la esfera.

$V(R) = 0$ , en particular, sobre el eje.

$$V(A) = 0$$

$$V(B) = 0$$

$$i \quad V(A) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q'}{R-b} + \frac{q}{a-R} \right) = 0$$

$$ii \quad V(B) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q'}{R+b} + \frac{q}{a+R} \right) = 0$$

$$\Rightarrow i \quad \frac{q'}{R-b} = -\frac{q}{a-R} \Rightarrow \frac{q'}{q} = -\frac{(R-b)}{a-R}$$

$$ii \quad \frac{q'}{R+b} = -\frac{q}{a+R} \Rightarrow \frac{q'}{q} = -\frac{(R+b)}{a+R}$$

$$\Rightarrow \frac{R-b}{a-R} = \frac{R+b}{a+R} \Rightarrow \frac{aR + R^2 - ab - Rb}{R^2 = ab} \Rightarrow \boxed{b = \frac{R^2}{a}}$$

Remplazando en la condición i

$$q' = -q \left( \frac{R-b}{a-R} \right) = -q \left( \frac{\frac{aR}{a} - \frac{R^2}{a}}{a-R} \right) = -\frac{qR(a-R)}{(a-R)}$$

$$q' = -\frac{qR}{a}$$

Con esta información tenemos que el potencial para cualquier punto del espacio es

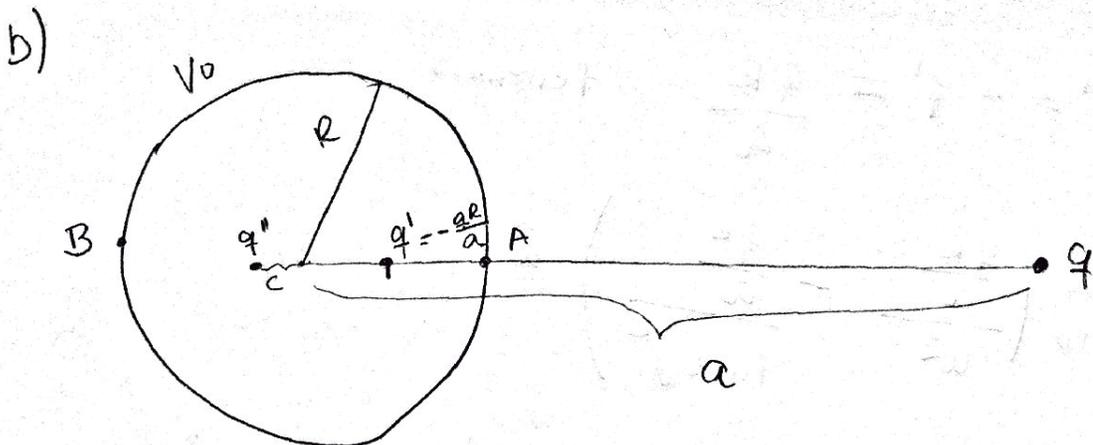
$$V = \begin{cases} 0 & |\vec{r}| \leq R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{|\vec{r}|} - \frac{qR}{a} \frac{1}{|\vec{r}'|} \right) & |\vec{r}| > R \end{cases}$$

con

$$\vec{r}' = \vec{r} - a\hat{z} \Rightarrow |\vec{r}'| = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta}$$

$$\vec{r}' = \vec{r} - b\hat{z} = \vec{r} - \frac{R^2}{a}\hat{z}$$

$$|\vec{r}'| = \sqrt{r^2 + \left(\frac{R^2}{a}\right)^2 - 2r \frac{R^2}{a} \cos \theta}$$



Partiendo del punto anterior, vamos el valor de la carga  $q''$  para que el potencial en la sup sea  $V_0$ .

$$V(A) = V(B) = V_0$$

$$V(A) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{a-R} + \frac{q'}{R-b} + \frac{q''}{R+c} \right) = V_0$$

$$V(B) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{a+R} + \frac{q'}{R+b} + \frac{q''}{R-c} \right) = V_0$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q''}{R+c} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q''}{R-c} = V_0$$

$$\frac{q}{R+c} = \frac{1}{R-c} \Rightarrow c = 0 \rightarrow \text{la carga debe estar en el centro de la esfera}$$

$$\boxed{q'' = 4\pi\epsilon_0 R V_0}$$

c) Para  $q'' = -q' = \frac{qR}{a}$  tenemos

$$\vec{E}(a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\frac{qR}{a}}{a^2} - \frac{\frac{qR}{a}}{(a-b)^2} \right) \hat{i}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qR}{a} \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{\left(\frac{a^2-R^2}{a}\right)^2} \right) \hat{i}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qR}{a} \left( \frac{1}{a^2} - \frac{a^2}{(a^2-R^2)^2} \right) \hat{i}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qR}{a} \left( \frac{a^4 - 2a^2R^2 + R^4 - a^4}{a^2 (a^2-R^2)^2} \right) \hat{i}$$

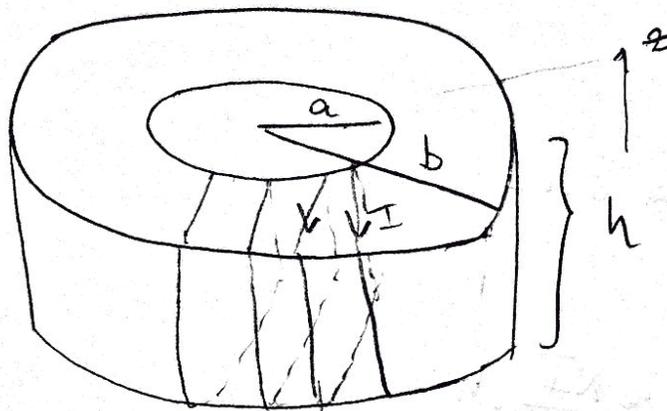
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{R}{a} \right)^3 \left( \frac{R^2 - 2a^2}{(a^2-R^2)^2} \right) \hat{i}$$

Por tanto, la fuerza que siente la carga  $q$  es

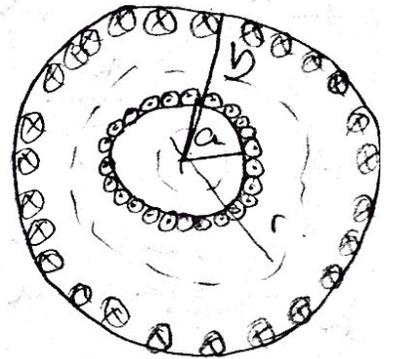
$$\vec{F} = q\vec{E} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{R}{a} \right)^3 \left( \frac{R^2 - 2a^2}{(a^2-R^2)^2} \right) \hat{i}$$

## Problema 2:

a)



Vista superior



Usando la ley de Ampère. tenemos

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{en}$$

i  $r < a$   $I_{en} = 0$

$$B \cdot 2\pi r = 0 \Rightarrow B = 0$$

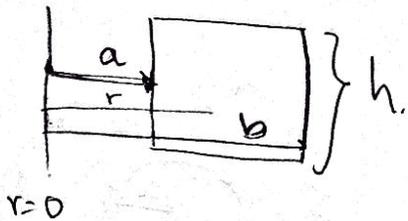
ii  $a < r < b$   $I_{en} = NI$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I_{en} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \hat{\theta}$$

iii para  $r > b$   $I_{en} = 0$

$$B \cdot 2\pi r = 0 \Rightarrow B = 0$$

b) Veamos el corte transversal de una espira



$$\Rightarrow da = h \cdot dr$$

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int_a^b \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \cdot h \, dr$$

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \ln r \Big|_a^b = \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \ln \left( \frac{b}{a} \right)$$

↳ Flujo magnético por 1 espira del solenoide.  
Por  $N$  espiras tenemos

$$\Phi_{BT} = \frac{\mu_0 N^2 I h}{2\pi} \ln \left( \frac{b}{a} \right)$$

Para encontrar la autoinductancia recordemos

$$\Phi_{BT} = L I$$

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \left( \frac{b}{a} \right)$$

c) Para  $I(t) = I_0 \cos \omega t$ .

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\Phi_B = LI = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot I_0 \cos \omega t.$$

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) I_0 \omega \sin \omega t.$$

### Problema 3:

a) Ecuaciones de Maxwell en el vacío:

$$i) \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$ii) \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$iii) \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$iv) \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Tomando el rotacional de iii) tenemos

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$$

en el vacío  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\nabla^2 \vec{E}$$

Por otro lado

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right), \text{ por tanto}$$

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$$

De la misma forma:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{E}$$

$$-\nabla^2 \vec{B} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}}$$

$$b) \vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\vec{B}(z,t) = \vec{B}_0 e^{i(kz - \omega t)}$$

Para que satisfagan ecuaciones de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{E}_0 = (E_{0x}, E_{0y}, E_{0z})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \left( \frac{\partial}{\partial x} (E_{0x} e^{i(kz - \omega t)}) \right) + \frac{\partial}{\partial y} (E_{0y} e^{i(kz - \omega t)}) + \frac{\partial}{\partial z} (E_{0z} e^{i(kz - \omega t)})$$

$$= \left( \frac{\partial E_{0x}}{\partial x} + \frac{\partial E_{0y}}{\partial y} + \frac{\partial E_{0z}}{\partial z} \right) e^{i(kz - \omega t)} + E_{0z} i k e^{i(kz - \omega t)} = 0$$

Iguando parte real y parte imaginaria a 0.

$$\boxed{E_{0z} = 0}$$

Para el campo magnético usamos el mismo argumento.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \left( \frac{\partial B_{0x}}{\partial x} + \frac{\partial B_{0y}}{\partial y} + \frac{\partial B_{0z}}{\partial z} \right) e^{i(kz - \omega t)} + B_{0z} i k e^{i(kz - \omega t)} = 0$$

$$\boxed{B_{0z} = 0}$$

Con esto podemos escribir los campos como

$$\vec{E} = (E_{0x} \hat{i} + E_{0y} \hat{j}) e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\vec{B} = (B_{0x} \hat{i} + B_{0y} \hat{j}) e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial z} (E_{0y} e^{i(kz - \omega t)}) \hat{i} + \frac{\partial}{\partial z} (E_{0x} e^{i(kz - \omega t)}) \hat{j}$$

$$+ \left( \frac{\partial E_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial E_{0x}}{\partial y} \right) e^{i(kz - \omega t)} \hat{k}$$

$$= \left( -\frac{\partial E_{0y}}{\partial z} \hat{i} + \frac{\partial E_{0x}}{\partial z} \hat{j} \right) e^{i(kz - \omega t)} + \left( E_{0x} i k \hat{j} - E_{0y} i k \hat{i} \right) e^{i(kz - \omega t)}$$

$$+ \left( \frac{\partial E_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial E_{0x}}{\partial y} \right) e^{i(kz - \omega t)} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -B_{0x} i \omega e^{i(kz - \omega t)} \hat{i} - B_{0y} i \omega e^{i(kz - \omega t)} \hat{j} \quad (2)$$

Iguando la parte imaginaria entre (1) y (2)

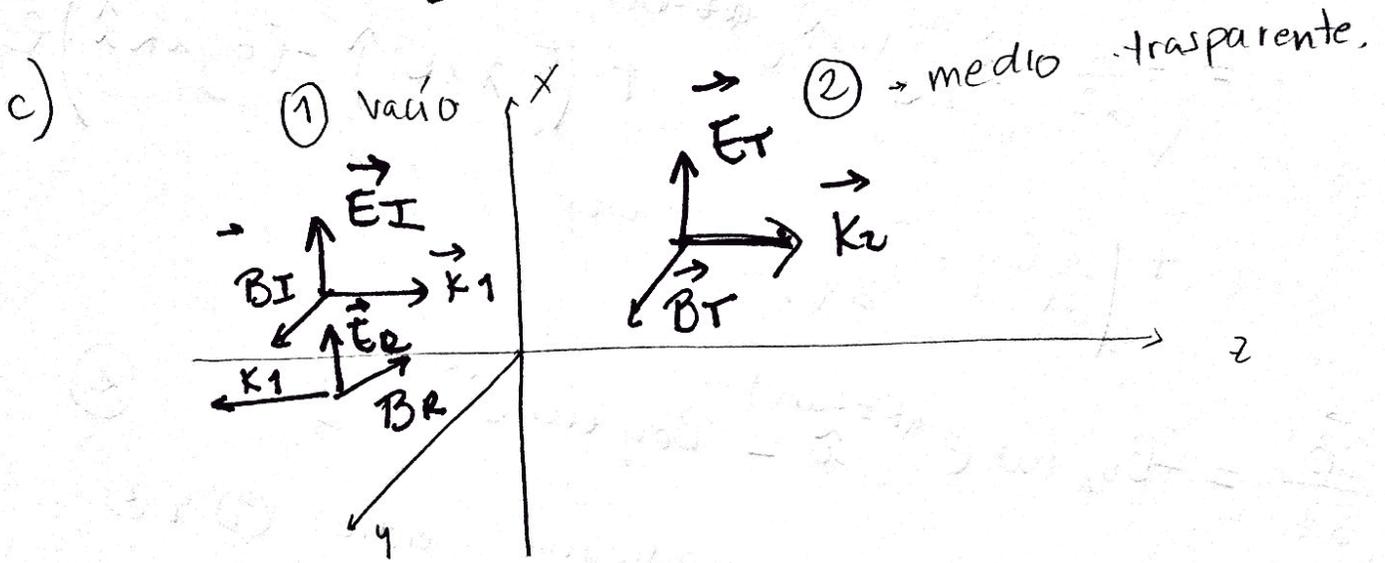
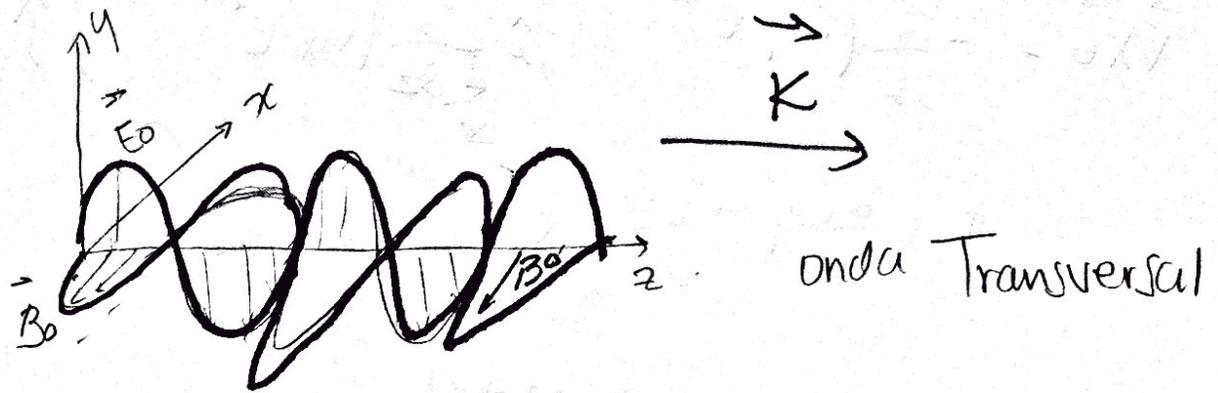
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$E_{0x} k \hat{j} - E_{0y} k \hat{i} = +B_{0x} \omega \hat{i} + B_{0y} \omega \hat{j}$$

$$\Rightarrow -k E_{0y} = B_{0x} \omega, \quad k E_{0x} = B_{0y} \omega$$

$$B_{0x} = -\frac{k}{\omega} E_{0y} = -\frac{E_{0y}}{c} \quad B_{0y} = \frac{k}{\omega} E_{0x} = \frac{1}{c} E_{0x}$$

$$\Rightarrow \vec{B}_0 = \frac{k}{\omega} (R \times \vec{E}_0) \Rightarrow \vec{E}_0 \text{ y } \vec{B}_0 \text{ son perpendiculares}$$



Para el diagrama en la figura.

$$\vec{E}_I = E_{0I} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{i}$$

$$\vec{B}_I = \frac{k_1}{\omega} E_{0I} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{j}$$

$$\vec{E}_R = E_{0R} e^{i(k_1 z + \omega t)} \hat{i}$$

$$\vec{B}_R = -\frac{k_1}{\omega} E_{0R} e^{i(k_1 z + \omega t)} \hat{j}$$

$$\vec{E}_T = E_{0T} e^{i(k_2 z - \omega t)} \hat{i}$$

$$\vec{B}_T = \frac{k_2}{\omega} E_{0T} e^{i(k_2 z - \omega t)} \hat{j}$$

Condiçoes de Fronteira.

$$\textcircled{1} \quad \vec{E}_1^{\parallel} = \vec{E}_2^{\parallel}, \quad \epsilon_1 \vec{E}_1^{\perp} = \epsilon_2 \vec{E}_2^{\perp},$$

$$\boxed{E_{0I} + E_{0R} = E_{0T}}$$

$$2) \quad \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_1^{\parallel} = \frac{1}{\mu_2} \vec{B}_2^{\parallel} \quad B_1^{\perp} = B_2^{\perp}$$

$$\frac{1}{\mu_0} (B_I - B_R) = \frac{1}{\mu} B_T$$

$$\frac{1}{\mu_0} \frac{K_1}{\omega_1} (E_{0I} - E_{0R}) = \frac{1}{\mu} \frac{K_2}{\omega_2} E_{0T}$$

$$E_{0I} - E_{0R} = \frac{\mu_0}{\mu} \frac{\omega_1^3}{K_1} \frac{K_2}{\omega_2} E_{0T}$$

$$\boxed{E_{0I} - E_{0R} = \frac{\mu_0}{\mu} n_2 E_{0T}}, \quad \mu_0 = \mu.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{0I} + E_{0R} = E_{0T} \\ E_{0I} - E_{0R} = n_2 E_{0T} \end{array} \right\}$$

$$d) \quad 2E_{0I} = E_{0T} + n_2 E_{0T}$$

$$\boxed{E_{0T} = \left( \frac{2}{1+n_2} \right) E_{0I}}$$

$$E_{OR} = E_{OI} - n_2 E_{OT}$$

$$E_{OI} - \frac{n_2 \cdot 2}{n_2 + 1} E_{OI}$$

$$= \frac{(n_2 + 1 - 2n_2)}{n_2 + 1} E_{OI}$$

$$E_{OR} = \frac{1 - n_2}{1 + n_2} E_{OI}$$

e) El vector de Poynting es

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

Para la onda incidente.

$$\vec{S}_I = \frac{1}{\mu_0} E_{OI} \hat{i} \times \frac{1}{c} E_I \hat{j} = \frac{1}{\mu_0 c} E_{OI}^2 \hat{k}$$

Para la onda reflejada

$$\vec{S}_R = \frac{1}{\mu_0} E_{OR} \hat{i} \times \frac{1}{c} E_{OR} (-\hat{j}) = -\frac{1}{\mu_0 c} E_{OR}^2 \hat{k}$$

$$= -\frac{1}{\mu_0 c} \left( \frac{1 - n_2}{1 + n_2} \right)^2 E_{OI}^2$$

Para la onda transmitida

$$\vec{S}_T = \frac{1}{\mu} E_{0T}^2 \times \frac{1}{v_2} E_{0T} \hat{j} = \frac{1}{\mu_0 v_2} E_{0T}^2 \cdot \frac{c}{c}$$

$$= \frac{1}{\mu} \frac{n_2}{c} E_{0T}^2 \hat{k} = \frac{1}{\mu c} \left( \frac{2}{1+n_2} \right)^2 E_{0i}^2 \hat{k}$$

Veamos que la magnitud del vector de Poynting

$$\langle S_T \rangle = \frac{n_2}{\mu c} \left( \frac{4}{(1+n_2)^2} \right) E_{0i}^2$$

$$\langle S_R \rangle = \frac{(1-n_2)^2}{\mu_0 c (1+n_2)^2} E_{0i}^2, \text{ para } \mu_0 = \mu.$$

$$\langle S_T \rangle + \langle S_R \rangle = \left[ \frac{1 - 2n_2 + n_2^2}{(1+n_2)^2} + \frac{4n_2}{(1+n_2)^2} \right] \frac{1}{\mu c} E_{0i}^2$$

$$= \frac{1}{\mu c} E_{0i}^2 = \langle S_I \rangle.$$

## Problema 4.

$$V(r, \theta, t) = \frac{\rho_0 \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r} \left( -\frac{\omega}{c} \sin[\omega(t-r/c)] + \frac{1}{r} \cos[\omega(t-r/c)] \right)$$

$$\vec{A}(r, \theta, t) = -\frac{\mu_0 \rho_0 \omega}{4\pi r} \sin[\omega(t-r/c)] (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta})$$

a)  $\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta}$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\rho_0 \cos \theta}{4\pi \epsilon_0} \left[ + \frac{\omega}{cr^2} \sin[\omega(t-r/c)] - \frac{\omega}{rc} \cos[\omega(t-r/c)] \left( -\frac{\omega}{c} \right) \right]$$

$$- \frac{2}{r^3} \cos[\omega(t-r/c)] + \frac{1}{r^2} (-\sin[\omega(t-r/c)]) \left( -\frac{\omega}{c} \right)$$

$$= \frac{\rho_0 \cos \theta}{4\pi \epsilon_0} \left[ \frac{2\omega}{cr^2} \sin[\omega(t-r/c)] + \left( \frac{\omega^2}{rc^2} - \frac{2}{r^3} \right) \cos[\omega(t-r/c)] \right]$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{\rho_0 \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2} \left( -\frac{\omega}{c} \sin[\omega(t-r/c)] + \frac{1}{r} \cos[\omega(t-r/c)] \right)$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 \rho_0 \omega}{4\pi r} \cos[\omega(t-r/c)] \cdot \omega (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta})$$

$$\vec{E} = -\frac{\rho_0 \cos\theta}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{2\omega}{cr^2} \sin[\omega(t-r/c)] + \left( \frac{\omega^2}{rc^2} - \frac{2}{r^3} \right) \cos[\omega(t-r/c)] \right] \hat{r}$$

$$+ \frac{\rho_0 \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left\{ -\frac{\omega}{c} \sin[\omega(t-r/c)] + \frac{1}{r} \cos[\omega(t-r/c)] \right\} \hat{\theta}$$

$$+ \frac{\mu_0 \rho_0 \omega^2}{4\pi r} \cos[\omega(t-r/c)] (\cos\theta \hat{r} - \sin\theta \hat{\theta})$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$= \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (rA_\theta) - \frac{\partial Ar}{\partial \theta} \right\} \hat{\phi}$$

$$= -\frac{\mu_0 \rho_0 \omega}{4\pi r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r \sin\theta}{r} \sin[\omega(t-r/c)] \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\cos\theta}{r} \sin[\omega(t-r/c)] \right) \right\} \hat{\phi}$$

$$= -\frac{\mu_0 \rho_0 \omega}{4\pi r} \left\{ \frac{\omega}{c} \sin\theta \cos[\omega(t-r/c)] + \frac{\sin\theta}{r} \sin[\omega(t-r/c)] \right\} \hat{\phi}$$

b) En la zona de radiación  $r \gg \frac{c}{\omega}$

y por tanto los términos

$$\frac{\omega}{c} \cdot \frac{1}{r^2} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{r^3} \rightarrow 0, \quad \frac{\omega}{r^2} \rightarrow 0$$

$$\vec{E} = \left[ -\frac{\rho_0 \cos\theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^2}{rc^2} \cos[\omega(t-r/c)] + \frac{\mu_0 \rho_0 \omega^2}{4\pi r} \cos\theta \cos[\omega(t-r/c)] \right] \hat{r}$$

$$- \frac{\mu_0 \rho_0 \omega^2}{4\pi r} \sin\theta \cos[\omega(t-r/c)] \hat{\theta}$$

$$\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} = c^2 \quad \text{entonces,}$$

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0 \rho_0 \omega^2}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r} \cos[\omega(t - r/c)] \hat{\theta}$$

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 \rho_0 \omega^2}{4\pi c} \left( \frac{\sin\theta}{r} \right) \cos[\omega(t - r/c)] \hat{\phi}$$

c) Para calcular la intensidad de radiación

$$I = \langle \vec{S} \rangle \Rightarrow \text{promedio temporal para un ciclo}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

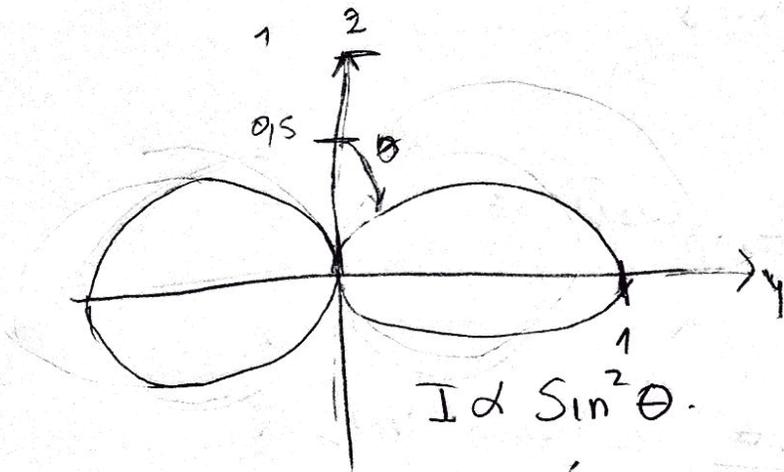
$$\vec{S} = \frac{\mu_0}{c} \left\{ \frac{\rho_0 \omega^2}{4\pi} \cdot \frac{\sin\theta}{r} \cos[\omega(t - r/c)] \right\}^2 \hat{\theta} \times \hat{\phi}$$

$$= \frac{\mu_0}{c} \left\{ \frac{\rho_0 \omega^2}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r} \cos[\omega(t - r/c)] \right\}^2 \hat{r}$$

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{\mu_0}{c} \left\{ \frac{\rho_0 \omega^2}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r} \right\}^2 \langle \cos^2[\omega(t - r/c)] \rangle \hat{r}$$

$$= \frac{\mu_0}{c} \frac{\rho_0^2 \omega^4}{32\pi^2} \frac{\sin^2\theta}{r^2} \hat{r}$$

Para un  $r$  fijo, en el plano  $\varphi z$ ,



→ Patrón de radiación de un dipolo

la radiación es máxima para  $\theta = \frac{\pi}{2}$   
 mínima para  $\theta = 0$ .

d) Para encontrar la potencia irradiada.

$$\langle P \rangle = \int \langle S \rangle \cdot da$$

$da = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ , para un fijo

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta}{r^2} r^2 \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{16\pi c} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta$$

$$\int \sin^3 \theta = \frac{1}{12} (\cos(3\theta) - 9 \cos(\theta)) \Big|_0^\pi = \frac{16}{12}$$

$$\boxed{\langle P \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}}$$



**Doctorado en Ciencias - Física**  
**Examen de Conocimientos - 2016 - 1**  
**Mecánica estadística**

No se permite el uso de ningún documento, libro o apuntes, ni el uso de ningún dispositivo electrónico tales como celulares, reproductores de música, computadores, tabletas, etc.

**Duración total del examen : 3 horas**

**PROBLEMA 1. ADSORCIÓN SOBRE UNA SUPERFICIE.**

Cuando un gas se encuentra en equilibrio térmico con una pared sólida, las moléculas se pueden unir a esta en sitios determinados que dependen de la estructura de la misma. A este proceso se le conoce como *adsorción* y puede ser visto como un equilibrio entre dos fases, análogo al equilibrio químico a temperatura fija  $T$ .

Para calcular el número de moléculas adsorbidas sobre una pared considere el siguiente modelo: la pared está compuesta de  $N$  sitios y cada molécula puede unirse a la pared con una energía de enlace  $-u$ . Las moléculas no adsorbidas forman un gas perfecto. Para implementar este modelo siga los siguientes pasos:

- a.) (3 puntos)** Escriba el potencial para las moléculas adsorbidas. Tenga en cuenta que para un sistema termodinámico cerrado a temperatura fija, éste potencial es la energía libre de Helmholtz.
- b.) (5 puntos)** Usando el potencial del punto anterior, calcule el número de partículas adsorbidas,  $n$ , en función del número total de sitios  $N$ , la energía de enlace, el potencial químico  $\mu$  y la temperatura  $T$ . En este caso el potencial químico de las partículas en el gas es el mismo que el potencial químico de las partículas adsorbidas.
- c.) (10 puntos)** Deduzca el número de partículas adsorbidas,  $n$ , en función de la presión del gas y la temperatura.
- d.) (2 puntos)** Analice el comportamiento de  $n$  en el caso límite cuando  $T \rightarrow 0$ .

## PROBLEMA 2. TRAMPA DE NITRÓGENO LÍQUIDO

Las moléculas de un gas presente en un volumen  $\Omega$  pueden ser evacuadas a través de una bomba de vacío. Una manera práctica de mejorar este vacío, es condensar las moléculas del gas residual (usualmente vapores de aceite provenientes de las bombas) en una superficie fría. Esto garantiza que no entre ninguna partícula al volumen  $\Omega$ . A este procedimiento se le conoce como trampa de nitrógeno líquido (Figura 1).

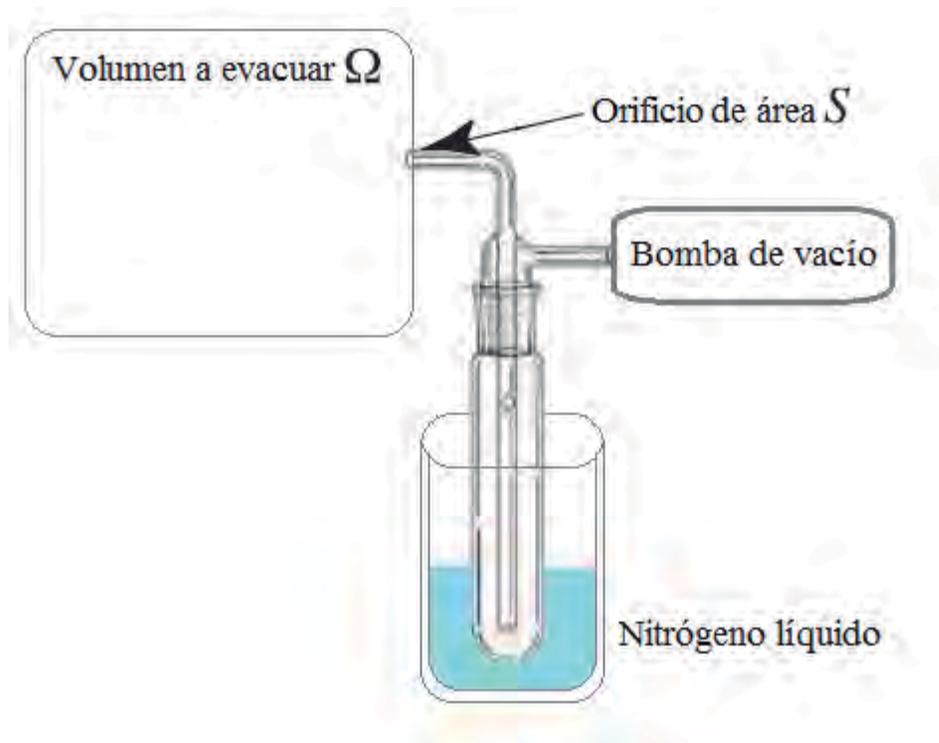


Figura 1: Representación esquemática de una trampa de nitrógeno líquido

Se supone que las moléculas del gas que se quiere evacuar, de masa  $m$ , están en equilibrio térmico a temperatura  $T$ .

- (5 puntos) Asumiendo que cualquier molécula que entra al orificio se condensa, calcule el número de moléculas que salen, del volumen  $\Omega$ , por unidad de tiempo por el orificio de área  $S$ .
- (10 puntos) Para ver claramente que la trampa de nitrógeno líquido mejora el vacío, calcule el cambio de la presión, en el volumen  $\Omega$ , en función del tiempo.

### PROBLEMA 3. FERMIONES EN DOS DIMENSIONES

Considere un gas de electrones libres restringidos a moverse en un plano:

- a.) (10 puntos) Muestre que la densidad de estados  $D(\epsilon)$  es independiente de la energía,  $\epsilon$ .
- b.) (5 puntos) Determine la energía de Fermi a temperatura cero en función de  $D(\epsilon)$ .
- c.) (10 puntos) Muestre que el potencial químico,  $\mu$ , tiende exponencialmente a la energía de Fermi a baja temperatura.
- d.) (5 puntos) Calcule la energía interna a bajas temperaturas. Recuerde que para este caso puede utilizar la expansión de Sommerfeld:

$$U_{T \rightarrow 0} = \int_0^{\infty} \frac{D(\epsilon)\epsilon d\epsilon}{1 + e^{\beta(\epsilon - \mu)}} \quad (1)$$

Donde  $\beta$  es  $1/kT$  y  $k$  es la constante de Boltzman.

- e.) (5 puntos) Calcule la capacidad calorífica de un gas 2-dimensional de electrones a bajas temperaturas.

## PROBLEMA 4. SÓLIDO FERROMAGNÉTICO

Un modelo simplificado de un sólido ferromagnético es el modelo de Ising, que representa el sólido como un ensamble de  $N$  espines  $\frac{1}{2}$  fijos a una matriz periódica. Los espines interactúan entre sí por una interacción de origen cuántico debida al principio de exclusión de Pauli. La interacción de intercambio para dos espines  $\vec{S}$  y  $\vec{S}'$  es de la forma  $-K \vec{S} \cdot \vec{S}'$ , donde  $K$  es una constante.

La energía de interacción entre dos espines situados en los sitios  $i$  y  $j$  de la red es de la forma  $-V_{ij} \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j$ , donde el potencial  $-V_{ij}$  depende de la distancia entre los sitios  $i$  y  $j$ . Los operadores  $\hat{\sigma}_i$  y  $\hat{\sigma}_j$  conmutan y tienen valores propios  $\pm 1$ .

En presencia de un campo magnético externo el hamiltoniano del sistema es:

$$\hat{H} = - \sum_{i < j} V_{ij} \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j + \mu B \sum_i \hat{\sigma}_i.$$

Considerar un modelo simplificado en el que el potencial de interacción  $V_{ij}$  es independiente de la distancia entre los sitios  $i$  y  $j$  (a corto rango) y puede escribirse como:  $V_{ij} = \frac{V}{N}$ .

Este modelo simplificado no es realista porque los espines interactúan de la misma forma independientemente de la distancia pero tiene la ventaja de que es soluble en el límite de un sistema macroscópico  $N \rightarrow \infty$ .

a.) (10 puntos) Mostrar que la función de partición de este modelo solo depende de la variable:

$$\Xi = \frac{1}{N} \sum_i^N \hat{\sigma}_i.$$

b.) (10 puntos) Ahora re-escriba la función de partición utilizando la identidad

$$e^{\frac{\beta V N}{2} \Xi^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y^2 - 2y \sqrt{\frac{\beta V N}{2}} \Xi}$$

Haciendo  $x = 2y \sqrt{\frac{\beta V N}{2}} + \mu \beta B N$ , escriba la función de partición de la forma:

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-N\phi(x)}.$$

Identifique claramente la función  $\phi(x)$

c.) (10 puntos) Escriba las ecuaciones que minimizan la energía libre en el límite termodinámico, cuando  $N \rightarrow \infty$ . Utilice el hecho que el  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{-1}{N} \ln Z = \phi(x^*)$  donde  $x^*$  es el valor que minimiza  $\phi(x)$ . Discuta el significado físico de  $x^*$ .



**Doctorado en Ciencias - Física**  
**Examen de Conocimientos - 2016 - 1**  
**Mecánica estadística**

**FORMULAS GENERALES**

1. Funciones de estado y relaciones de Maxwell

Energía interna:	$U$	$dU = TdS - pdV$
Entalpía:	$H = U + pV$	$dH = TdS + Vdp$
Energía libre:	$F = U - TS$	$dF = -SdT - pdV$
Entalpía libre de Gibbs :	$G = H - TS$	$dG = -SdT + Vdp$

2. Longitud de onda térmica de *de Broglie* en una dimensión

$$\Lambda = h(2m\pi kT)^{-1/2}$$

3. Expansión de Sommerfeld:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(\epsilon)}{1 + e^{\beta(\epsilon - \mu)}} d\epsilon = \int_{-\infty}^{\mu} H(\epsilon) d\epsilon + \frac{\pi^2}{6\beta^2} H'(\mu) + O((\beta\mu)^{-4})$$

4. Valores esperados en términos de la función de partición.

$$E = -\frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta} \quad , \quad p = kT \frac{\partial \ln(Z)}{\partial V} \quad , \quad S = k \ln(Z) - k\beta \frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta} \quad , \quad C_V = k\beta^2 \frac{\partial^2 \ln(Z)}{\partial \beta^2}$$

$$F = -kT \ln(Z) \quad , \quad N = \frac{\partial \ln(Z)}{\partial \alpha} \quad , \quad \mu_j = -kT \frac{\partial \ln(Z)}{\partial N_j}$$

5. Funciones hiperbólicas que pueden ser de utilidad:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



Doctorado en Ciencias - Física  
Examen de Conocimientos - 2016 - 1  
Mecánica estadística

No se permite el uso de ningún documento, libro o apuntes, ni el uso de ningún dispositivo electrónico tales como celulares, reproductores de música, computadores, tabletas, etc.

Duración total del examen : 3 horas

PROBLEMA 1. ADSORCIÓN SOBRE UNA SUPERFICIE.

Cuando un gas se encuentra en equilibrio térmico con una pared sólida, las moléculas se pueden unir a esta en sitios determinados que dependen de la estructura de la misma. A este proceso se le conoce como *adsorción* y puede ser visto como un equilibrio entre dos fases, análogo al equilibrio químico a temperatura fija  $T$ .

Para calcular el número de moléculas adsorbidas sobre una pared considere el siguiente modelo: la pared está compuesta de  $N$  sitios y cada molécula puede unirse a la pared con una energía de enlace  $-u$ . Las moléculas no adsorbidas forman un gas perfecto. Para implementar este modelo siga los siguientes pasos:

- a.) (3 puntos) Escriba el potencial para las moléculas adsorbidas. Tenga en cuenta que para un sistema termodinámico cerrado a temperatura fija, éste potencial es la energía libre de Helmholtz.
- b.) (5 puntos) Usando el potencial del punto anterior, calcule el número de partículas adsorbidas,  $n$ , en función del número total de sitios  $N$ , la energía de enlace, el potencial químico  $\mu$  y la temperatura  $T$ . En este caso el potencial químico de las partículas en el gas es el mismo que el potencial químico de las partículas adsorbidas.
- c.) (10 puntos) Deduzca el número de partículas adsorbidas,  $n$ , en función de la presión del gas y la temperatura.
- d.) (2 puntos) Analice el comportamiento de  $n$  en el caso límite cuando  $T \rightarrow 0$ .

# Problema 1.

## Solución

a. El potencial de adsorción es.

$$A_{ad} = NkT \ln [1 + e^{(u+M)/kT}]$$

b. El número de partículas es:

$$n = \frac{\partial A_{ad}}{\partial \mu} = \frac{NkT \cdot e^{(u+M)/kT}}{1 + e^{(u+M)/kT}} \cdot \frac{1}{kT}$$

$$n = \frac{N}{1 + e^{-(u+M)/kT}}$$

c. la igualdad de potenciales químicos en la fase adsorbida y la fase gaseosa conlleva a:

$$e^{u/kT} = \frac{p}{kT} h^3 (2m\pi kT)^{-3/2}$$

donde  $h^3 (2m\pi kT)^{-3/2}$  es la longitud de onda térmica.

---

$$\frac{n}{N} = \frac{p}{p+p_0} \quad \frac{n}{N} = \frac{1}{1 + e^{-(u+M)/kT}}$$

$$p + p_0 e^{-(u+M)/kT} = p + p_0$$

$$P_0 = \frac{kT e^{\mu/kT}}{h^3} (2m\pi kT)^{3/2} e^{-(u+\mu)/kT}$$

$$P_0 = (kT)^{5/2} \left( \frac{2m\pi}{h^2} \right)^{3/2} e^{-u/kT}$$

d. de  $n = \frac{N}{1 + e^{-(u+\mu)/kT}}$

Se ve que cuando  $T \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow N$ .

## PROBLEMA 2. TRAMPA DE NITRÓGENO LÍQUIDO

Las moléculas de un gas presente en un volumen  $\Omega$  pueden ser evacuadas a través de una bomba de vacío. Una manera práctica de mejorar este vacío, es condensar las moléculas del gas residual (usualmente vapores de aceite provenientes de las bombas) en una superficie fría. Esto garantiza que no entre ninguna partícula al volumen  $\Omega$ . A este procedimiento se le conoce como trampa de nitrógeno líquido (Figura 1).

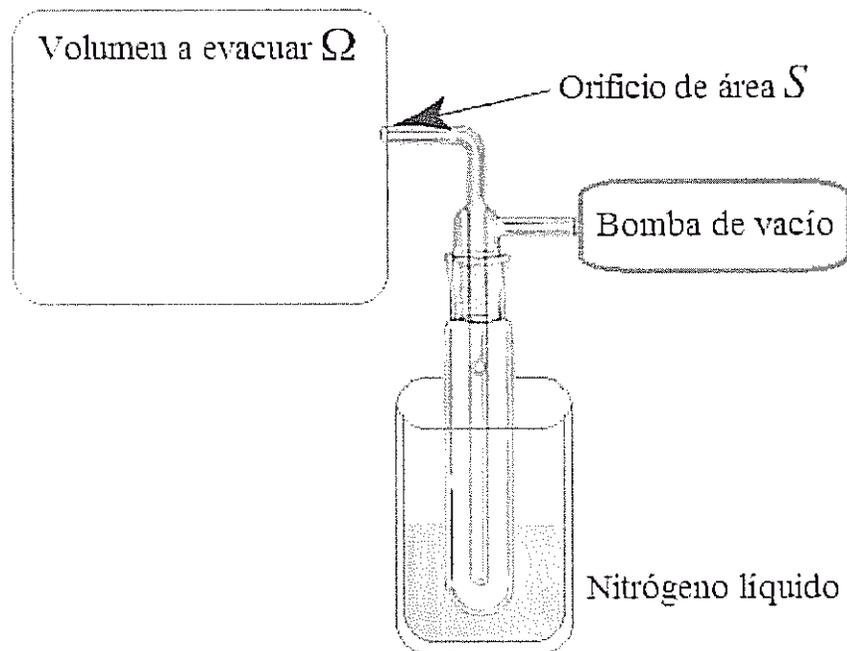


Figura 1: Representación esquemática de una trampa de nitrógeno líquido

---

Se supone que las moléculas del gas que se quiere evacuar, de masa  $m$ , están en equilibrio térmico a temperatura  $T$ .

- (5 puntos) Asumiendo que cualquier molécula que entra al orificio se condensa, calcule el número de moléculas que salen, del volumen  $\Omega$ , por unidad de tiempo por el orificio de área  $S$ .
- (10 puntos) Para ver claramente que la trampa de nitrógeno líquido mejora el vacío, calcule el cambio de la presión, en el volumen  $\Omega$ , en función del tiempo.

## Problema 2.

a. El número de moléculas que pasan por el orificio de área  $S$  con velocidad  $\vec{v}_z$  paralela al vector normal de área es:

$$\frac{dN}{dt} = nS \langle v_z \rangle \text{ por unidad de tiempo.}$$

La velocidad se puede escribir en términos de la expresión de Boltzmann.

$$\frac{dN}{dt} = nS \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}$$

$$b. \frac{dP}{dt} = -\frac{kT}{\Omega} \frac{dN}{dt} = -\frac{kT}{\Omega} nS \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}$$

$$n = \frac{P}{kT}$$

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{kT}{\Omega} \frac{PS}{kT} \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}$$

---

Ecuación diferencial con solución de la forma:

$$P = P_0 \exp(-t/\tau)$$

$$\text{con } \tau = \sqrt{\frac{2\pi m}{kT}} \frac{\Omega}{S}$$

### PROBLEMA 3. FERMIONES EN DOS DIMENSIONES

Considere un gas de electrones libres restringidos a moverse en un plano:

- a.) (10 puntos) Muestre que la densidad de estados  $D(\epsilon)$  es independiente de la energía,  $\epsilon$ .
- b.) (5 puntos) Determine la energía de Fermi a temperatura cero en función de  $D(\epsilon)$ .
- c.) (10 puntos) Muestre que el potencial químico,  $\mu$ , tiende exponencialmente a la energía de Fermi a baja temperatura.
- d.) (5 puntos) Calcule la energía interna a bajas temperaturas. Recuerde que para este caso puede utilizar el modelo de Sommerfeld:

$$U_{T \rightarrow 0} = \int_0^{\infty} \frac{D(\epsilon)\epsilon d\epsilon}{1 + e^{\beta(\epsilon - \mu)}} \quad (1)$$

Donde  $\beta$  es  $1/kT$  y  $k$  es la constante de Boltzman.

- e.) (5 puntos) Calcule la capacidad calorífica de un gas 2-dimensional de electrones a bajas temperaturas.

### PROBLEMA 3. FERMIONES EN DOS DIMENSIONES

Considere un gas de electrones libres restringidos a moverse en un plano:

- a.) (10 puntos) Muestre que la densidad de estados  $D(\epsilon)$  es independiente de la energía,  $\epsilon$ .
- b.) (5 puntos) Determine la energía de Fermi a temperatura cero en función de  $D(\epsilon)$ .
- c.) (10 puntos) Muestre que el potencial químico,  $\mu$ , tiende exponencialmente a la energía de Fermi a baja temperatura.
- d.) (5 puntos) Calcule la energía interna a bajas temperaturas. Recuerde que para este caso puede utilizar la expansión de Sommerfeld:

$$U_{T \rightarrow 0} = \int_0^{\infty} \frac{D(\epsilon)\epsilon d\epsilon}{1 + e^{\beta(\epsilon - \mu)}} \quad (1)$$

Donde  $\beta$  es  $1/kT$  y  $k$  es la constante de Boltzman.

- e.) (5 puntos) Calcule la capacidad calorífica de un gas 2-dimensional de electrones a bajas temperaturas.

### Problema 3.

a) Para calcular la densidad de estados de fermiones en  $Z$  dimensiones escribimos:

$$D(\varepsilon) = \underset{\text{fermiones}}{2} \frac{\Omega}{h^Z} \int d^Z p \delta\left(\varepsilon - \frac{p^2}{2m}\right)$$
$$= \frac{4\pi \Omega}{h^Z} \int_0^\infty dp p \delta\left(\varepsilon - \frac{p^2}{2m}\right)$$

$$\frac{p^2}{2m} = x$$

$$dx = \frac{Z p dp}{2m}$$

$$m dx = p dp$$

$$= \frac{4\pi m \Omega}{h^Z} \int_0^\infty dx \delta(\varepsilon - x) = \frac{4\pi m \Omega}{h^Z}$$

---

para  $\varepsilon > 0$ ,  $D(\varepsilon) = 0$  para  $\varepsilon < 0$

b). A temperatura cero los niveles por debajo de  $\varepsilon_F$  están ocupados.

$$N = \int_0^{\varepsilon_F} D(\varepsilon) d\varepsilon = \varepsilon_F D(\varepsilon) \Rightarrow \varepsilon_F = \frac{h^Z}{4\pi m \Omega} N$$

c. A temperatura finita

$$N = \int_0^{\epsilon_F} \frac{D(\epsilon) d\epsilon}{1 + e^{\beta(\epsilon - \mu)}} \quad \text{con } \beta = \frac{1}{kT}$$

$$D(\epsilon) = d\epsilon = D.$$

$$N = D \int_0^{\infty} \frac{d\epsilon}{1 + e^{\beta(\epsilon - \mu)}}$$

$$\frac{1}{1 + e^{\beta(\epsilon - \mu)}} = -\frac{1}{\beta} \frac{d}{d\epsilon} \ln(1 + e^{-\beta(\epsilon - \mu)})$$

$$N = -\frac{D}{\beta} \int_0^{\infty} d\epsilon \frac{d}{d\epsilon} \ln(1 + e^{-\beta(\epsilon - \mu)}) = \frac{D}{\beta} \ln(1 + e^{\beta\mu})$$

$$N = D\mu + \frac{D}{\beta} \ln(1 + e^{-\beta\mu})$$

Reemplazando  $N = D\epsilon_F$

---

$$D\epsilon_F = D\mu + \frac{D}{\beta} (e^{-\beta\mu} + \dots)$$

$$\mu_{\beta \rightarrow \infty} = \epsilon_F - \frac{1}{\beta} e^{-\beta\epsilon_F}$$

A temperaturas bajas hay una corrección de  $kT e^{-\epsilon_F/kT}$

d. La energía interna se puede calcular con el modelo de Sommerfeld,

$$U = \int_0^{\infty} \frac{D(\epsilon) \epsilon d\epsilon}{1 + e^{\beta(\epsilon - \mu)}}$$

Utilizando la expansión de Sommerfeld.

$$U_{T \rightarrow 0} = \frac{D \mu^2}{2} + \frac{D \pi^2}{6} (kT)^2 + O(e^{-1/T})$$

e. la capacidad calorífica es entonces.

$$C = \frac{dU}{dT} = \frac{D \pi^2}{3} k^2 T + O(e^{-1/T})$$

donde 
$$D = \frac{4\pi m \Omega}{h^2}$$

## PROBLEMA 4. SÓLIDO FERROMAGNÉTICO

Un modelo simplificado de un sólido ferromagnético es el modelo de Ising, que representa el sólido como un ensamble de  $N$  espines  $\frac{1}{2}$  fijos a una matriz periódica. Los espines interactúan entre sí por una interacción de origen cuántico debida al principio de exclusión de Pauli. La interacción de intercambio para dos espines  $\vec{S}$  y  $\vec{S}'$  es de la forma  $-K \vec{S} \cdot \vec{S}'$ , donde  $K$  es una constante.

La energía de interacción entre dos espines situados en los sitios  $i$  y  $j$  de la red es de la forma  $-V_{ij} \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j$ , donde el potencial  $-V_{ij}$  depende de la distancia entre los sitios  $i$  y  $j$ . Los operadores  $\hat{\sigma}_i$  y  $\hat{\sigma}_j$  conmutan y tienen valores propios  $\pm 1$ .

En presencia de un campo magnético externo el hamiltoniano del sistema es:

$$\hat{H} = - \sum_{i < j} V_{ij} \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j + \mu B \sum_i \hat{\sigma}_i.$$

Considerar un modelo simplificado en el que el potencial de interacción  $V_{ij}$  es independiente de la distancia entre los sitios  $i$  y  $j$  (a corto rango) y puede escribirse como:  $V_{ij} = \frac{V}{N}$ .

Este modelo simplificado no es realista porque los espines interactúan de la misma forma independientemente de la distancia pero tiene la ventaja de que es soluble en el límite de un sistema macroscópico  $N \rightarrow \infty$ .

a.) (10 puntos) Mostrar que la función de partición de este modelo solo depende de la variable:

$$\Xi = \frac{1}{N} \sum_i^N \hat{\sigma}_i.$$

b.) (10 puntos) Ahora re-escriba la función de partición utilizando la identidad

$$e^{\frac{\beta V N}{4} \Xi^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y^2 - 2y \sqrt{\frac{\beta V N}{2}} \Xi}$$

Haciendo  $x = 2y \sqrt{\frac{\beta V N}{2}} + \mu \beta B N$ , escriba la función de partición de la forma:

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-N\phi(x)}.$$

Identifique claramente la función  $\phi(x)$

c.) (10 puntos) Escriba las ecuaciones que minimizan la energía libre en el límite termodinámico, cuando  $N \rightarrow \infty$ . Utilice el hecho que el  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{-1}{N} \ln Z = \phi(x^*)$  donde  $x^*$  es el valor que minimiza  $\phi(x)$ . Discuta el significado físico de  $x^*$ .

a. Función de partición gran canónica.

$$z = \sum_k e^{-\beta H} \quad V_{ij} = \frac{V}{N}$$

$$z = \sum_{G_i} e^{-\beta \left[ -\frac{V}{2N} \left( \sum_i G_i \right)^2 + \mu B \sum_i G_i \right]}$$

$$\bar{\Xi} = \frac{1}{N} \sum_i G_i$$

$$z = \sum_{G_i} e^{\frac{\beta V N}{2} \bar{\Xi}^2 - \beta \mu B N \bar{\Xi}}$$

b. Utilizando la identidad:

$$e^{\frac{\beta V N}{2} \bar{\Xi}^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y^2 - 2y \sqrt{\frac{\beta V N}{2}} \bar{\Xi}}$$

$$z = \sum_{G_i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} dy e^{-y^2 - 2y \sqrt{\frac{\beta V N}{2}} \bar{\Xi} - \beta \mu B N \bar{\Xi}}$$

$$z = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \underbrace{\sum_{G_i} e^{-(2y \sqrt{\frac{\beta V N}{2}} + \beta \mu B N) \bar{\Xi}}}_{z_0}$$

$$z_0 = \sum_0 e^{-x \bar{\Xi}}$$

$$= (2 \cosh x)^N$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \left[ 2 \cosh \left( 2y \sqrt{\frac{\beta V N}{2}} + \beta \mu B N \right) \right]^N$$

⇒ haciendo el cambio de variable

$$X = 2y \sqrt{\frac{\beta V N}{2}} + \mu \beta B N$$

$$dx = 2 \sqrt{\frac{\beta V N}{2}} dy$$

$$\left( \frac{X - \mu \beta B N}{\sqrt{2 \beta V N}} \right)^2 = y^2$$

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{2 \beta V N}}$$

$$y^2 = \frac{1}{2 \beta V N} (X - \mu \beta B N)^2$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2 \beta V N}} e^{-\frac{1}{2 \beta V N} (X - \mu \beta B N)^2}$$

$$\cdot (2 \cosh(x))^N$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2 \beta \pi V N}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-N \left[ \frac{1}{2 \beta V N^2} (X - \mu \beta B N)^2 - \ln 2 \cosh(x) \right]} dx$$

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-N \phi(x)}$$

$$\phi(x) = \frac{1}{2 \beta V N^2} (X - \mu \beta B N)^2 - \ln 2 \cosh(x)$$

$$c. \frac{d\phi}{dx} = \frac{2}{2 \beta V N^2} (X - \mu \beta B N) - \frac{2 \sinh(x)}{2 \cosh(x)}$$

$$\frac{d\phi}{dx} = 0$$

$$X - M\beta B N = \beta V N^2 \tanh X$$

$$X = M\beta B N + \beta V N^2 \tanh X$$

↳ Ecuación autoconsistente solución del modelo de Ising

Si el campo  $B=0$  y expandiendo  $\tanh X$  para  $X$  pequeño

$$1 = \beta V N^2$$

$$kT_c = V N^2$$

$$T_c = \frac{V N^2}{k} \text{ para nuestro modelo}$$

Doctorado en Ciencias - Física  
Examen de Conocimientos - 2016 - 1  
Mecánica estadística

FORMULAS GENERALES

1. Funciones de estado y relaciones de Maxwell

Energía interna:	$U$	$dU = TdS - pdV$
Entalpía:	$H = U + pV$	$dH = TdS + Vdp$
Energía libre:	$F = U - TS$	$dF = -SdT - pdV$
Entalpía libre de Gibbs :	$G = H - TS$	$dG = -SdT + Vdp$

2. Longitud de onda térmica de *de Broglie* en una dimensión

$$\Lambda = h(2m\pi kT)^{-1/2}$$

3. Expansión de Sommerfeld:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(\epsilon)}{1 + e^{\beta(\epsilon - \mu)}} d\epsilon = \int_{-\infty}^{\mu} H(\epsilon) d\epsilon + \frac{\pi^2}{6\beta^2} H'(\mu) + O((\beta\mu)^{-4})$$

4. Valores esperados en términos de la función de partición.

$$E = -\frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta}, \quad p = kT \frac{\partial \ln(Z)}{\partial V}, \quad S = k \ln(Z) - k\beta \frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta}, \quad C_V = k\beta^2 \frac{\partial^2 \ln(Z)}{\partial \beta^2}$$

$$F = -kT \ln(Z), \quad N = \frac{\partial \ln(Z)}{\partial \alpha}, \quad \mu_j = -kT \frac{\partial \ln(Z)}{\partial N_j}$$

5. Funciones hiperbólicas que pueden ser de utilidad:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



Doctorado en Ciencias - Física  
Examen de Conocimientos - 2016 - 1  
Mecánica Clásica

No se permite el uso de ningún documento, libro o apuntes, ni el uso de ningún dispositivo electrónico tales como celulares, reproductores de música, computadores, tabletas, etc.

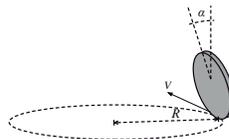
Duración total del exámen : 3 horas

---

1. (25 puntos) Encuentre expresiones para el mínimo y máximo período de oscilación que es posible lograr con un péndulo físico hecho de una tabla de madera con distribución de masa uniforme y de dimensiones  $a \times b \times c$  (con  $a < b < c$ ), suponiendo que el eje del pivote atraviesa la tabla perpendicularmente a alguna de las tres caras.

---

2. (25 puntos) Una moneda de radio  $r$  rueda sin deslizar sobre una mesa de tal forma que su punto de contacto describe un círculo de radio  $R$ . Si la velocidad tangencial del punto de contacto es  $V$ , encuentre el ángulo  $\alpha$  que describe la moneda con la vertical. Suponga que  $r \ll R$ .



---

**3. (25 puntos)** Una transformación de gauge cambia la forma del lagrangiano sin afectar las ecuaciones de Euler-Lagrange. Una aplicación importante es en la identificación de cantidades conservadas, transformando el lagrangiano a uno que exhiba explícitamente alguna simetría deseada.

- a) **(10 puntos)** Considere un sistema dinámico con coordenadas generalizadas  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ , regido por un lagrangiano  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ . Demuestre que se obtienen las mismas ecuaciones de Euler-Lagrange si se le suma al lagrangiano una derivada total del tiempo de alguna función  $f(\mathbf{q})$ :

$$L' = L + \frac{df}{dt} = L + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial t},$$

- b) **(15 puntos)** Considere ahora un posible lagrangiano para una partícula cargada en presencia de un campo magnético constante en la dirección  $z$ , restringida a moverse en el plano  $(x, y)$ :

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{qB}{2c} (x\dot{y} - y\dot{x}).$$

Usando simetrías del lagrangiano o de lagrangianos equivalentes de acuerdo al punto (a), encuentre las constantes de movimiento asociadas a las siguientes tres transformaciones: i) traslaciones a lo largo del eje  $x$ , ii) traslaciones a lo largo del eje  $y$ , y iii) rotaciones en torno al origen.

---

**4. (25 puntos)** Una partícula confinada a moverse en una dimensión, con coordenada generalizada  $x$ , está sujeta a un hamiltoniano de la forma

$$H = \frac{p^2}{2} + |x|^\alpha, \quad \alpha > 0, \tag{1}$$

donde  $p$  es el momentum conjugado a  $x$ .

- a) **(5 puntos)** Para una energía  $E$  dada, elabore una curva cualitativa de la trayectoria del sistema en el espacio de fase (el plano  $(x, p)$ ), identificando los puntos de retorno del movimiento en  $x$  como función de  $E$ . Adicionalmente, encuentre la función  $p_+(x, E)$  que describe la curva en la porción del movimiento en que el momentum es positivo.
- b) **(10 puntos)** Demuestre que para cualquier hamiltoniano  $H = \frac{p^2}{2} + V(x)$ , con movimiento periódico, se cumple que si  $J(E)$  es el área encerrada por la curva con energía  $E$ , el período del movimiento a energía  $E$  satisface

$$T = \frac{dJ}{dE}.$$

- c) **(10 puntos)** Demuestre que para el hamiltoniano (1), el período del movimiento está relacionado con la amplitud  $A$  (igual al valor máximo de  $x$ ) por una relación de la forma

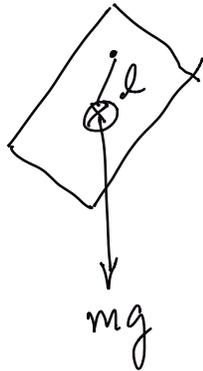
$$T \propto A^\gamma,$$

y determine el exponente  $\gamma$  en función de  $\alpha$ . Verifique que para el caso del oscilador armónico ( $\alpha = 2$ ) el período es independiente de la amplitud.

EXAMEN DE MECÁNICA  
SOLUCIÓN

---

1.



Para el péndulo físico, en la aproximación de pequeñas oscilaciones:

$$I \ddot{\theta} = -mgl \theta$$

donde  $l$  es la distancia del pivote al c.m.

$$\text{Así que } \ddot{\theta} = -\frac{mgl}{I} \theta \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}$$

Para una cara de lados  $d \times h$ ,

$$I = \frac{1}{12} m (d^2 + h^2) + ml^2$$

$$\text{así que } T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g} \left( \frac{d^2 + h^2}{12l} + l \right)}$$

$\Rightarrow$  El período máximo es  $T = \infty$  cuando  $l = 0$

Para el mínimo, buscamos  $l$  que minimice  $T$ , que es cuando:

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{d^2 + h^2}{12l} + l \right) = 0$$

$$\Rightarrow l^2 = \frac{d^2 + h^2}{12}$$

Así que

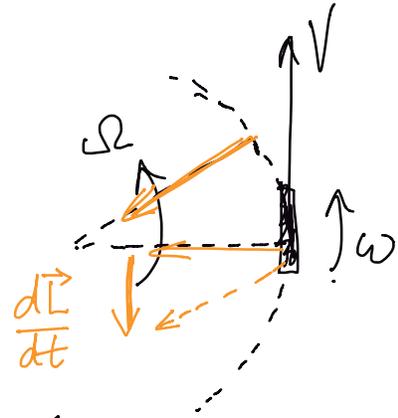
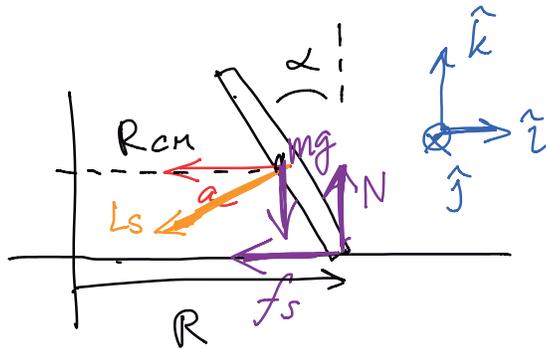
$$T_{\min} = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{g}} = 2\pi \left( \frac{d^2 + h^2}{3g^2} \right)^{1/4}$$

Como  $a < b < c$ , tenemos que

$$T_{\min} = 2\pi \sqrt[4]{\frac{d^2 + h^2}{3g^2}}$$

---

2.



Para el movimiento traslacional:

En x:  $ma_c = f_s$

$\Rightarrow m\Omega^2 R_{cm} = f_s$

$m\Omega^2 (R - r \sin \alpha) = f_s$

En z:  $N = mg$

Red sin desliz:

$V = \Omega R$

$\Omega = \frac{V}{R}$

$\omega = \frac{V}{r}$

Para el rotacional, tomamos torques con respecto al C.M.:

$\tau_y = \left( \frac{d\vec{L}}{dt} \right)_y$

$r(f_s \cos \alpha - N \sin \alpha) = \left( \frac{d\vec{L}}{dt} \right)_y$

$\Rightarrow m\Omega^2 (R - r \sin \alpha) r \cos \alpha - mgr \sin \alpha = -\Omega L_s \cos \alpha$

$$\Rightarrow \text{Usamos: } \Omega = V/R, \omega = V/r$$

$$L_s = \frac{1}{2} m r^2 \omega = \frac{1}{2} m r V$$

$$\Rightarrow \frac{V^2}{R^2} (R - r \sin \alpha) \cos \alpha - g \sin \alpha = -\frac{1}{2} \frac{V^2}{R} \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{V^2}{R} \left( \frac{3}{2} - \frac{r}{R} \sin \alpha \right) \cos \alpha = g \sin \alpha \quad \text{with } r \ll R$$

$$\rightarrow \tan \alpha = \frac{3}{2} \frac{V^2}{gR} = \frac{3V^2}{2gR}$$

---

3.

$$a) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L'}{\partial q_i} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{df}{dt} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \underbrace{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{df}{dt} \right)}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

b) Para rotaciones :

$$x \dot{y} - y \dot{x} = (\vec{r} \times \vec{v})_z = r^2 \dot{\phi}$$

en coordenadas polares, así

que

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + \frac{qB}{2c} r^2 \dot{\phi}$$

$$\rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 0 \Rightarrow p_{\dot{\phi}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \text{const}$$

$$\Rightarrow p_{\dot{\phi}} = mr^2 \dot{\phi} + \frac{qB}{2c} r^2$$

Para trans m x:

$$L' = L - \frac{qB}{2c} \frac{d}{dt}(xy)$$

$$= \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{qB}{2c}(x\dot{y} - y\dot{x}) - \frac{qB}{2c}(x\dot{y} + y\dot{x})$$

$$= \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{qB}{c} y\dot{x}$$

$$\frac{\partial L'}{\partial x} = 0 \Rightarrow p'_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \text{const}$$

$$\Rightarrow p'_x = m\dot{x} - \frac{qB}{c} y = \text{const}$$

Para transl. m y:

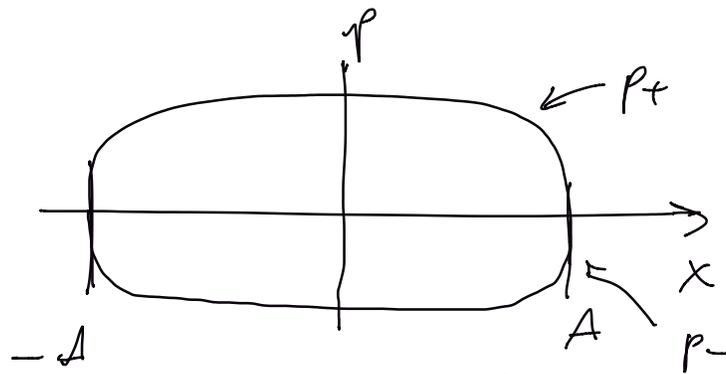
$$L'' = L + \frac{qB}{2c} \frac{d}{dt}(xy)$$

$$= \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{qB}{2c}(x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{qB}{2c}(x\dot{y} + y\dot{x})$$

$$= \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{qB}{c} x\dot{y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow p''_y = m\dot{y} + \frac{qB}{c} x = \text{const}$$

4. a)



puntos de retorno :  $x = \pm A$ , donde

$$E = A^\alpha \rightarrow A = E^{1/\alpha}$$

$$p_{\pm} = \pm \sqrt{2(E - |x|^\alpha)}$$

$$b) J(E) = \oint p dx$$

$$= 2 \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \sqrt{2(E - V(x))} dx$$

donde  $x_1, x_2$  son los puntos de retorno.

$$\Rightarrow \frac{dJ}{dE} = 2 \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{2(E - V(x))}} + 2\sqrt{2(E - V(x_2))} \frac{dx_2}{dE} - 2\sqrt{2(E - V(x_1))} \frac{dx_1}{dE}$$

$$\Rightarrow \frac{dJ}{dE} = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2(E-V(x))}}$$

$$= 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{p(x)} = \oint \frac{dx}{p}$$

Prova :  $\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = p$

$$\Rightarrow dt = \frac{dx}{p} \Rightarrow T = \oint \frac{dx}{p}$$

$$\Rightarrow T = \frac{dJ}{dE}$$

c)  $J = 2 \int_0^{E^{1/2}} \sqrt{2(E-x^2)} dx$

$$= 2 E^{1/2} \int_0^{E^{1/2}} \sqrt{2(1 - \frac{x^2}{E})} dx$$

sustitución:

$$u \equiv x/E^{1/2}$$

$$\rightarrow J = 2 E^{1/2} E^{1/2} \int_0^1 \sqrt{2(1-u)} du$$

$$\rightarrow J \propto E^{\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}}$$

$$\rightarrow \frac{dJ}{dE} \propto E^{\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow T \propto E^{\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

Chequeo:  $\gamma=0$  para  $\alpha=2$ !