Doctorado en Ciencias - Física

Examen de Conocimientos - 2015 - 1

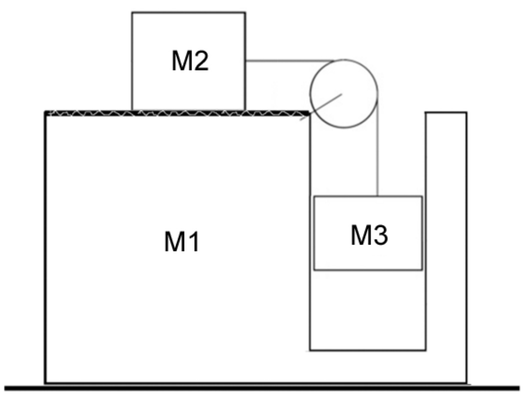
Mecánica analítica

No se permite el uso de ningún documento, libro o apuntes, ni el uso de ningún dispositivo electrónica tales como celulares, reproductores de música, PDA, computadores, tabletas, etc.

Duración del examen: **3 horas.**

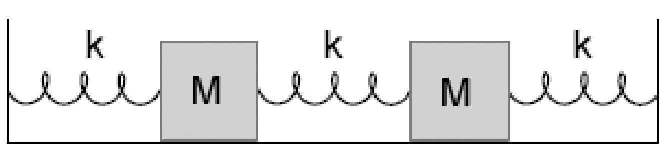
Problema 1 - Soporte deslizante

El sistema de la figura tiene fricción entre M1 y M2 con coeficientes μ_e y μ_c, pero no en las demás superficies. La polea es ideal, M1=5m, M2=M3=m. Encuentre las aceleraciones de los tres cuerpos.



Problema 2 - Modos de oscilación

El sistema de la figura consiste de dos masa iguales conectadas por tres resortes iguales, las cuales deslizan sobre una superficie sin fricción. Encuentre la posición en función del tiempo para la condición inicial $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ y $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$



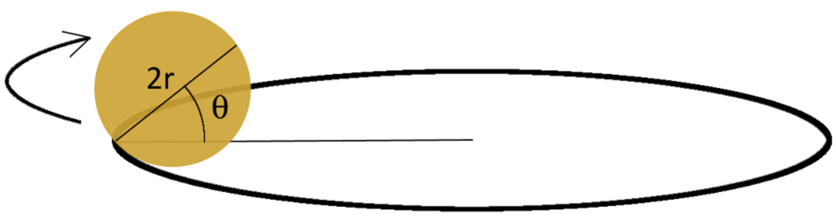
Problema 3 - Pelota de baloncesto rotante

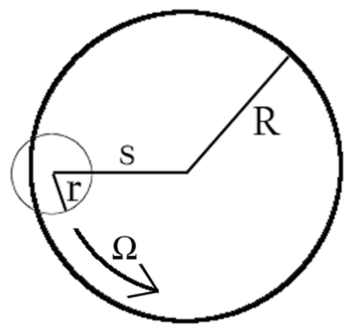
Una pelota de baloncesto de radio r se queda dando vueltas en un aro horizontal de radio R como lo indica la figura. Visto desde arriba, la pelota gira en sentido de las manecillas del reloj en un plano inclinado un ángulo θ respecto al plano horizontal. Su centro de masa gira en un círculo de radio S<R en sentido contrario a las manecillas del reloj, con velocidad angular Ω. La inercia rotacional de la pelota es $I = \frac{2}{3}mr^2$ respecto a su centro.

a) Calcule el torque total respecto al centro de masa de la pelota.

b) Encuentre la velocidad angular $\vec{w}$ que describe la rotación de la pelota en el marco inercial en términos de Ω, R, r y los vectores unitarios que considere apropiados.

c) Encuentre Ω en términos de g, R, r y θ.





Problema 4 - Péndulo de longitud variable

Considere un péndulo de masa m con cuerda cuya longitud varía lentamente de acuerdo a l(t), función desconocida pero que cumple con $|\dot{l}| \ll \frac{l}{T}$.

a) Encuentre el Lagrangiano y el Hamiltoniano de este sistema.

b) ¿Es el Hamiltoniano igual a la energía total? ¿Se conserva alguno de los dos?

c) Evalúe la ecuación de movimiento para la variable θ en forma de ecuación diferencial de segundo orden. Cuando $|\dot{l}| = 0$, ¿cuál es el periodo de oscilaciones pequeñas?

d) Muestre que la amplitud de oscilaciones pequeñas es proporcional a $l^{-\frac{3}{4}}$.

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2015 - 1
Electrodinámica

No se permite el uso de ningún documento, libro o apuntes, ni el uso de ningún dispositivo electrónico tales como celulares, reproductores de música, PDA, computadores, tabletas, etc.

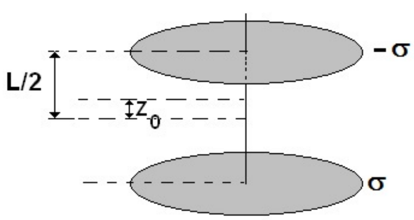
Duración : 3 horas

PROBLEMA 1. CONDENSADOR DE DISCOS PARALELOS.

Se tiene un condensador de placas metálicas paralelas. Las placas son circulares de radios a y con una separación de valor L. La densidad de carga sobre las placas es uniforme y de valor σ y $-\sigma$ para cada placa.

a. Determine el campo eléctrico en un punto a una distancia Z_0 del centro del condensador y a lo largo del eje de simetría.

b. Hallar la diferencia de potencial entre las dos placas.



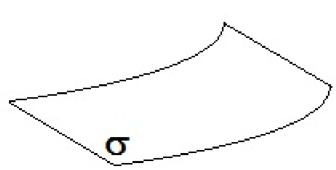
PROBLEMA 2. CONDICIONES DE FRONTERA.

Se tiene una región del espacio dividida por una lámina delgada, con densidad de carga σ, como indica la figura.

a. Encuentre las condiciones de frontera de la componente normal del campo eléctrico a ambos lados de la lámina.

b. Encuentre las condiciones de frontera de la componente paralela del campo eléctrico a ambos lados de la lámina.

c. Encuentre las condiciones de frontera del potencial eléctrico a ambos lados de la lámina.



Doctorado en Ciencias - Física

Examen de Conocimientos - 2015 - 1

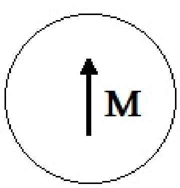
Electrodinámica

PROBLEMA 3. CAMPOS E Y B RELATIVISTAS.

Un observador estático, ubicado en las coordenadas x=b, y=0, z=0 en su sistema en reposo, observa una carga Q que se mueve sobre el eje z con una velocidad v, cercana a la velocidad de la luz. En el tiempo t=0 la carga pasa por el origen de coordenadas estáticas del observador. Determine los campos eléctrico y magnético que siente el observador.

PROBLEMA 4. ESFERA MAGNETIZADA.

Hallar el campo magnético producido por una esfera de radio R que tiene magnetización uniforme $\vec{M} = M_0\hat{k}$.



FÓRMULAS ELECTRODINÁMICA

$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\hat{r}}{r^2}$; $\vec{F} = Q\vec{E}$; $V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E}.d\vec{\ell}$

$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}V$; $V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l P_l(\cos\theta) + \frac{B_l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta)\right)$;

$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_l(x)dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{m,l}$; $P_0(x)=1$; $P_1(x)= x$; $P_2(x)=(3x^2-1)/2$.

$\vec{p} = \alpha\vec{E}$; $\vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E}$; $\vec{F} = (\vec{p}.\vec{\nabla})\vec{E}$; $\sigma_b = \vec{P}.\hat{n}$; $\rho_b = -\vec{\nabla}.\vec{P}$;

$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$; $\nabla\cdot\vec{D} = \rho_{libre}$; $\varepsilon = \varepsilon_0(1+\chi_e)$; $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$; $W = \frac{1}{2}\int\vec{D}.\vec{E}dvol$; $\vec{P} = \varepsilon_0\chi_e\vec{E}$;

$d\vec{F} = Id\vec{l}\times\vec{B}$; $\vec{\nabla}.\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$; $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}$; $\oint\vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$; $I = \int\vec{J}.d\vec{a}$; $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$;

$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}}{r}dvol$; $\vec{A}_{dip} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\hat{r}}{r^2}$; $\vec{m} = \frac{1}{2}I\oint(\vec{r}'\times d\vec{l})$ $\vec{\tau} = \vec{m}\times\vec{B}$; $\vec{F} = \nabla(\vec{m}.\vec{B})$;

$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{M}\times\hat{r}}{r^2}dvol$; $\vec{J}_b = \vec{\nabla}\times\vec{M}$; $\vec{K}_b = \vec{M}\times\hat{n}$; $\vec{J} = \sigma\vec{E}$;

$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt}$; $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{vol}\frac{1}{r}\vec{J}_b dvol + \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{Sup}\frac{1}{r}\vec{K}_b darea$; $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}$; $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}_{libre}$;

$\oint\vec{H}.d\vec{l} = I_{libre}$; $\vec{M} = \chi_m\vec{H}$; $\vec{B} = \mu\vec{H}$; $\Phi_m = \int\vec{B}\cdot d\vec{a}$; $\oint\vec{E}.d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$;

$W = \frac{1}{2}LI^2$; $W = \frac{1}{2\mu_0}\int B^2 dvol$; $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B})$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$; $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$; $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$; $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$;

$\oint\vec{E}.d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int\rho dvol$; $\oint\vec{E}.d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int\vec{B}.d\vec{a}$; $\oint\vec{B}.d\vec{a} = 0$;

$\oint\vec{B}.d\vec{l} = \mu_0\int\vec{J}.d\vec{a} + \mu_0\varepsilon_0\frac{d}{dt}\int\vec{E}.d\vec{a}$

$x' = \gamma(x - \beta ct)$; $y' = y$; $z' = z$; $t' = \gamma(t - \beta x/c)$; $\vec{\beta} = \vec{v}/c$; $\gamma = \left(1-\beta^2\right)^{-1/2}$

$u'_x = \frac{u_x - v}{1-\beta u_x/c}$; $u'_x = \frac{u_y}{\gamma(1-\beta u_x/c)}$; $u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1-\beta u_x/c)}$

$\vec{p} = \gamma m\vec{v}$; $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$

$\vec{E}' = \gamma\left(\vec{E} + c\vec{\beta}\times\vec{B}\right) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\left(\vec{E}.\vec{\beta}\right)\vec{\beta}$; $\vec{B}' = \gamma\left(\vec{B} - \vec{\beta}\times\vec{E}/c\right) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\left(\vec{B}.\vec{\beta}\right)\vec{\beta}$

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2015 - 1
Mecánica Cuántica

No se permite el uso de ningún documento, libro o apuntes, ni el uso de ningún dispositivo electrónico tales como celulares, reproductores de música, PDA, computadores, tabletas, etc.

Duración: 3 horas

Explique claramente los pasos que sigue para la solución del problema.

PROBLEMA 1. SYSTEMA CUANTICO DE DOS NIVELES.

Considere un sistema de dos niveles ($|1>, |2>$) cuyo Hamiltoniano en esta base está dado por:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \epsilon & -i\epsilon \\ i\epsilon & \epsilon \end{pmatrix} \tag{1}$$

Donde ϵ es una constante real.

(a) Encuentre las posibles energías de este sistema.

(b) Encuentre los estados estacionarios.

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2015 - 1
Mecánica Cuántica

PROBLEMA 2. OSCILADOR ARMÓNICO CON PERTURBACIÓN INDEPENDIENTE DEL TIEMPO.

Un oscilador armónico de una dimensión es perturbado por el siguiente potencial de interacción:

$$H^{'} = \epsilon x^4 (\epsilon << 1) \tag{2}$$

Asuma que el oscilador está inicialmente en el enésimo estado $|n>$. Usando operadores de creación y aniquilación, calcule el cambio de energía en el primer orden de perturbación.

PROBLEMA 3. OSCILADOR ARMÓNICO CON PERTURBACIÓN DEPENDIENTE DEL TIEMPO.

Una partícula de masa m y carga q se ubica en un potencial $V = k(x^2 + y^2 + z^2)/2$ de un oscilador armónico. En el tiempo $t \rightarrow -\infty$ el oscilador se encuentra en su estado base. Para un tiempo $t = 0$, el oscilador es perturbado por un campo eléctrico uniforme, dependiente del tiempo:

$$\mathbf{E}(t) = A e^{-(\frac{t}{\tau})} \hat{z} \tag{3}$$

Donde A y τ son constantes. Calcule para el orden más bajo perturbativo, la probabilidad que el oscilador esté en un estado excitado para $t = \infty$.

(a) Escriba el Hamiltoniano de este sistema.

(b) Para la función de onda arbitraria del sistema, $|\psi >= \sum_n c_{\mathbf{n}} |\mathbf{n} > e^{-iE_{\mathbf{n}} t/\hbar}$, halle los coeficientes complejos $c_{\mathbf{n}}$ para $t = 0$ y $t = +\infty$ (use la definición de $c_n(t)$ en la tabla de ecuaciones).

(c) Halle la probabilidad de transición.

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2015 - 1
Mecánica Cuántica

PROBLEMA 4. ÁTOMO DE HIDROGENO CON PERTURBACIÓN DEPENDIENTE DEL TIEMPO.

Un átomo de hidrogeno esta en el estado base en $t = -\infty$. Un campo eléctrico $\mathbf{E}(t) = (\vec{k}\varepsilon)e^{-t^2/\tau^2}$ se aplica hasta $t = \infty$, donde $\vec{k}$ representa el vector unitario para el eje Z en coordenadas cartesianas. Halle la probabilidad correspondiente que el átomo termine en cualquiera de los estados $n = 2$, usando el primer orden de perturbación.

(a) Escriba el el termino del Hamiltoniano para el primer orden de perturbación (escriba el termino en coordenadas ésfericas).

(b) Escriba la expresión para hallar la amplitud de transición para este caso.

(c) Resuelva las integrales respectivas y halle una expresión simplificada para a amplitud de transición.

(d) Halle la probabilidad de transión.

Universidad de los Andes

Departamento de Física

Doctorado en Ciencias-Física
Examen de conocimientos
Mecánica Estadística

Semestre 2015-1
Duración : 3 horas

Escribir con esfero en tinta negra o azul.
No se permite el uso de ningún documento, libro o apuntes, ni el uso de ningún dispositivo electrónico tales como teléfonos celulares, reproductores de música, PDA, computadores, tabletas, etc...
Se recomienda dedicar 1 hora a los dos ejercicios I y II, y 2 horas a los ejercicios III y IV.
En el apéndice hay algunas fórmulas que pueden ser útiles para el desarrollo de este examen.

I Oscilaciones de un piston (20 puntos)

Un cilindro vertical de radio R contiene una cantidad de gas ideal y está provisto de un pistón de masa m que puede moverse libremente, con fricción despreciable. La parte superior del pistón está contra el aire exterior a una presión atmosférica p_0. La parte interior del pistón, que contiene el gas ideal, se mantiene en un baño térmico a una temperatura constante T.

1. En equilibrio térmico y mecánico, el pistón está a una altura h sobre la base del cilindro. Determinar la presión $p(h)$ del gas ideal contenido dentro del cilindro.
2. Se jala el piston hasta una altura $h+y$ y después se suelta. Determinar la fuerza que se ejerce sobre el piston.
3. Después de soltar el piston este se pone a oscilar. Determinar la frecuencia de las oscilaciones cuando $y \ll h$.
4. ¿Cómo cambia la frecuencia de oscilación del pistón si el proceso de las oscilaciones fuera adiabático en vez de isotérmico?

II Entropía y conducción térmica (20 puntos)

Un cuerpo 1 de capacidad calorífica C_1, inicialmente a temperatura T_1^0, se pone en contacto térmico con otro cuerpo 2 de capacidad calorífica C_2, a temperatura $T_2^0 > T_1^0$. Los dos cuerpos forman un sistema que se supondrá aislado térmicamente del exterior. Después de cierto tiempo la temperatura del cuerpo 1 es T_1 y la del cuerpo 2 es T_2. Se supondrán constantes las capacidades caloríficas de ambos cuerpos.

1. Determinar el cambio de entropía del sistema desde el estado inicial (temperaturas T_1^0 y T_2^0) hasta el estado de temperaturas T_1 y T_2, en función de estas.
2. Aplicando un balance de energía, expresar T_2 en función de T_1.
3. Encontrar para qué temperaturas T_1 y T_2 el cambio de entropía es máximo. Explicar el resultado invocando una ley de la termodinámica.

III Marchas aleatorias (30 puntos)

Considere una marcha aleatoria sobre una red unidimensional de N sitios. La tasa de transición de un sitio a su vecino derecho es igual a la de su vecino izquierdo y vale D. La marcha empieza en el sitio n_0 con $1 \leq n_0 \leq N-1$. Los sitios extremos 0 y N son absorbentes, es decir si la partícula cae en uno de ellos es absorbida y se acaba la marcha. Sea $P_n(t)$ la probabilidad que la partícula esté en el sitio n en el instante t.

1. Plantear la ecuación maestra para la marcha aleatoria. Tenga particular cuidado con lo que pasa en los extremos absorbentes.
2. Para $N = 2$ y $N = 3$ resolver la ecuación maestra.
3. En el caso general se busca la solución de la ecuación maestra bajo la forma

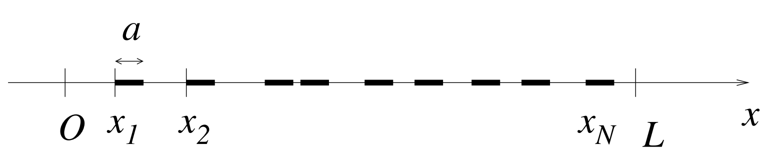
$$P_n(t) = \sum_{k=1}^{N-1} A_t(k, n_0, N) \sin\left(\frac{k\pi n}{N}\right) . \tag{3.1}$$

— ¿Por qué se puede buscar $P_n(t)$ bajo esa forma?
— Calcular los $A_t(k, n_0, N)$.

IV Gas unidimensional de barras (30 puntos)

Considere un sistema de N barras duras impenetrables de largo a y masa m que se pueden desplazar sobre una recta de longitud L, con $L \geq Na$. El sistema está en contacto térmico con un termostato a la temperatura T. Se define como es usual $\beta = 1/(k_B T)$ en donde k_B es la constante de Boltzmann. Las barras no tienen ninguna otra interacción a parte del hecho que no se pueden interpenetrar. Entonces el potencial de interacción entre dos barras en posiciones x_1 y x_2 es

$$v(x_2 - x_1) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x_2 - x_1| > a \\ +\infty & \text{si } |x_2 - x_1| \leq a \end{cases} \tag{4.1}$$



1. Calcular exactamente la función de partición canónica $Z_c(N, L, T)$ de este sistema. Para esto será útil determinar el espacio disponible que tiene cada barra.
2. Determinar en el límite termodinámico la energía libre canónica $F_c(N, L, T)$.
3. Determinar la ecuación de estado del sistema, es decir la relación entre la presión, la temperatura y la densidad $n = N/L$, en el límite termodinámico.
4. Expandir la ecuación de estado exacta obtenida hasta el orden n^2 y verificar que el segundo coeficiente del virial coincide con el dado por la teoría general

$$B_2 = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (e^{-\beta v(x)} - 1) \, dx . \tag{4.2}$$

5. Considerar la función de partición isobárica del sistema $Z_p(N, p, T) = \int_0^\infty e^{-\beta p L} Z_c(N, L, T) dL/a$. Mostrar que la función de partición canónica del sistema Z_c se puede escribir como un producto de convolución de multiples funciones que definirá y usar esto para evaluar exactamente la función de partición isobárica.

6. Mostrar, usando inversión de transformada de Laplace, que la función de partición canónica que se deduce de la función de partición isobárica calculada en la pregunta anterior, coincide con la obtenida en la pregunta 1.
7. En el ensamble isobárico, determinar la longitud promedio $\langle L \rangle_p$ del sistema para una presión p fijada.
8. Deducir de la pregunta anterior la ecuación de estado del sistema en el ensamble isobárico. Comparar con la ecuación de estado obtenida en el ensamble canónico en la pregunta 3.

Apéndice

— En proceso adiabático para un gas ideal pV^γ se mantiene constante, en donde p es la presión del gas, V el volumen y $\gamma = C_p/C_V$ la proporción entre las capacidades caloríficas a presión y volumen constante del gas.
— El cambio de entropía de un sistema que recibe un calor δQ durante un proceso infinitesimal reversible a temperatura T, es $dS = \delta Q/T$.
— Fórmula de Stirling: $\ln N! \sim N \ln N - N$ cuando $N \to \infty$.
— Función de partición canónica de un sistema con hamiltoniano H a la temperatura T, $Z_c = \dfrac{1}{N! h^{3N}} \displaystyle\int e^{-\beta H} \prod_{i=1}^{N} d\mathbf{p}_i d\mathbf{r}_i$ con $\beta = 1/(k_B T)$.
— Energía libre de Helmoltz $F = -k_B T \ln Z_c$.
— Presión canónica $p = -\dfrac{\partial F(N,V,T)}{\partial V}$.
— Una serie de Taylor: $(1-\epsilon)^{-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n$ para $|\epsilon| < 1$.
— Una transformada de Laplace: $f(t) = (t-u)^n \sqsupset F(s) = \dfrac{e^{-su}\, n!}{s^{n+1}}$.
— $\displaystyle\sum_{n=1}^{N-1} \sin \frac{k_1 \pi n}{N} \sin \frac{k_2 \pi n}{N} = \frac{N}{2} \delta_{k_1,k_2}$ para $(k_1, k_2) \in \{1, 2, 3, \ldots, N-1\}^2$.

Doctorado en Ciencias- Física

Examen de Conocimientos – 2015- 1

Mecánica analítica

Problema 1- Soporte deslizante - Solución

El sistema de la figura tiene fricción entre M_1 y M_2 con coeficientes μ_e y μ_c, pero no en las demás superficies. La polea es ideal y M_1=5m, M_2=M_3=m. Encuentre las aceleraciones de los tres cuerpos.

Definiendo los ejes para cada cuerpo en la dirección del movimiento:

$$M_1 : \sum F_x = T - f - N_3 = m_1 a_1 \qquad (1)$$

$$M_2 : \sum F_x = T - f = m_2 a_2 \qquad (2)$$

$$M_3 : \sum F_x = N_3 = m_3 a_{3x} = m_3 a_1 \qquad (3)$$

$$M_3 : \sum F_y = m_3 g - T = m_3 a_{3y} \qquad (4)$$

Asumiendo μ_e<1,

$$f = \mu_c m_2 g \qquad (5)$$

Como la longitud de la cuerda es constante, tenemos la ecuación de ligadura:

$$y_3 = x_2 + x_1 \qquad (6)$$

$$=> \quad a_{3y} = a_2 + a_1 \qquad (7)$$

Operando sobre las ecuaciones:

(1) - (2) + (3) => $a_2 = 6a_1$ (8)

en (7) => $a_{3y} = 7a_1$ (9)

(1) + (3) + (4) => $m_3 g - f = m_1 a_1 + m_3 a_1 + m_3 a_{3y}$ (10)

usando (5) y (9) => $g(1 - \mu_c) = 13a_1$ (11)

así que

$$a_1 = g\frac{(1-\mu_c)}{13} = a_{3x} \qquad a_2 = g\frac{6(1-\mu_c)}{13} \qquad a_{3y} = g\frac{7(1-\mu_c)}{13}$$

Problema 2 - Modos de oscilación - Solución

El sistema de la figura consiste de dos masa iguales conectadas por tres resortes iguales, las cuales deslizan sobre una superficie sin fricción. Encuentre la posición en función del tiempo para la condición inicial $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

La ecuacion matricial de movimiento es

$$M\ddot{\vec{x}} = -K\vec{x}$$

con

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \text{ y } K = \begin{bmatrix} -2k & k \\ k & -2k \end{bmatrix}$$

Encontrando los valores y vectores propios de la matriz $M^{-1}K$, obtenemos $\lambda_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y $\lambda_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$, que corresponden a la frecuencia angular de oscilación de los modos base, dados por las condiciones iniciales

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

correspondiente a las dos masa moviéndose en fase y

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ y } \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

correspondiente a las dos masas oscilando en direcciones opuestas.

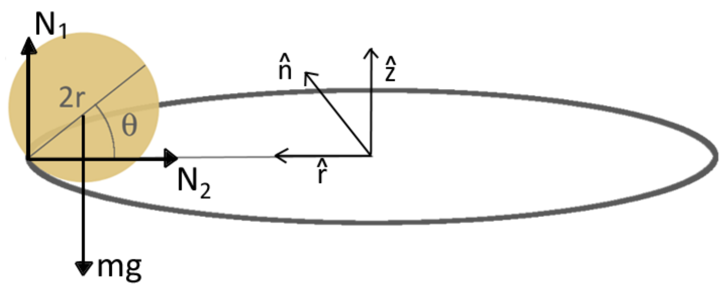
El modo $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ es la suma directa de los dos modos base, así que la posición en función del tiempo para este modo es

$$\vec{x}_{(t)} = \begin{bmatrix} Cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + Cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right) \\ Cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) - Cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right) \end{bmatrix}$$

Problema 3 - Pelota de baloncesto rotante - Solución

Una pelota de baloncesto de radio r se queda dando vueltas en un aro horizontal de radio R como lo indica la figura. Visto desde arriba, la pelota gira en sentido de las manecillas del reloj en un plano inclinado un ángulo θ respecto al plano horizontal. Su centro de masa gira en un círculo de radio S<R en sentido contrario a las manecillas del reloj, con velocidad angular Ω. La inercia rotacional de la pelota es $I = \frac{2}{3}mr^2$ respecto a su centro.

a) Calcule el torque total respecto al centro de masa de la pelota.



Nótese que el radio de giro del centro de masa es S=R-rCosθ. Por tanto las ecuaciones de movimiento en el plano son

$$\sum F_x:\ N_2 = ma_c = m\Omega^2(\mathrm{R} - \mathrm{r}Cos\theta) \qquad (1)$$

$$\sum F_y: N_1 - mg = 0 \qquad (2)$$

$$\sum \tau_{CM} = r(N_1 Cos\theta - N_2 Sin\theta) \qquad (3)$$

así que

$$\sum \tau_{CM} = mgrCos\theta - m\Omega^2(R - rCos\theta)Sin\theta \qquad (3)$$

Para que el movimiento sea el descrito el torque debe apuntar hacia adentro de la página.

b) Encuentre la velocidad angular $\vec{w}$ que describe la rotación de la pelota en el marco inercial en términos de Ω, R, r y los vectores unitarios que considere apropiados.

En el marco de referencia no inercial en el que el centro de masa no se mueve, el momento angular apunta en la dirección $-\hat{n}$ y podemos usar la condición de que la pelota rueda sin deslizar. Un punto sobre la pelota en el círculo ecuatorial recorres una distancia $\omega_{CM}rdt$ en un tiempo dt. En este mismo intervalo de tiempo, el punto de contacto recorre una distancia ΩRdt, así que el vector velocidad angular en este marco es

$$\vec{\omega}_{CM} = -\frac{R}{r}\Omega\hat{n}$$

Lo que implica que en el marco de referencia del aro el vector velocidad angular es

$$\vec{\omega} \quad = \Omega\hat{z} - \frac{R}{r}\Omega\hat{n}$$

c) Encuentre Ω en términos de g, R, r y θ.

Como la pelota es simétrica, el tensor de inercia rotacional es la matriz identidad por $I = \frac{2}{3}mr^2$. El momento angular es entonces

$$\vec{L} = I\Omega(\hat{z} - \frac{R}{r}\hat{n})$$

La componente horizontal del momento angular tiene magnitud

$$L_h = \frac{2}{3}m\Omega \mathrm{rR}Sin\theta$$

Como esta componente debe rotar con frecuencia angular Ω, para un tiempo pequeño dt tenemos que

$$\Delta L_h = L_h\Omega dt$$

así que

$$\left|\frac{\mathrm{d}L_h}{dt}\right| = L_h\Omega = \frac{2}{3}m\Omega^2\mathrm{rR}Sin\theta$$

Este cambio es producido por el torque, que es ortogonal a L_h, así que

$$\frac{2}{3}m\Omega^2\mathrm{rR}Sin\theta = mgrCos\theta - m\Omega^2(R - rCos\theta)Sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad \Omega = \sqrt{\frac{g}{\frac{5}{3}\mathrm{RTan}\theta - rSin\theta}}$$

Problema 4 - Péndulo de longitud variable - Solución

Considere un péndulo de masa m con cuerda cuya longitud varía lentamente de acuerdo a l(t), función desconocida pero que cumple con $|\dot{l}| \ll \frac{l}{T}$.

a) Encuentre el Lagrangiano y el Hamiltoniano de este sistema.

$$L = K - U = \frac{1}{2}m\left(\dot{l}^2 + l^2\dot{\theta}^2\right) + mglCos\theta$$

$$P_\theta = \frac{dL}{d\dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}$$

$$H = P_\theta\dot{\theta} + P_l\dot{l} - L = \frac{{P_\theta}^2}{2ml^2} + \frac{{P_l}^2}{2m} - mglCos\theta$$

b) ¿Es el Hamiltoniano igual a la energía total? ¿Se conserva alguno de los dos?

$$E = K + U = H$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \neq 0 \; si \;\; \dot{l} \neq 0$$

$$\frac{dE}{dt} \neq 0$$

así que no se conserva, lo cual es de esperar ya que cambiar el largo de una cuerda bajo tensión implica trabajo.

c) Evalúe la ecuación de movimiento para la variable θ en forma de ecuación diferencial de segundo orden. Cuando $\dot{l} = 0$, ¿cuál es el periodo de oscilaciones pequeñas?

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial P_\theta} = \frac{P_\theta}{ml^2}$$

$$\dot{P_\theta} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mglSin\theta$$

Igualando estas dos expresiones,

$$\frac{d}{dt}\left(ml^2\dot{\theta}\right) = -mglSin\theta$$

$$=> \quad \ddot{\theta} + 2\frac{\dot{l}}{l}\dot{\theta} + \frac{g}{l}Sin\theta = 0$$

Si $\dot{l} = 0$ y $\theta \approx Sin\theta$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}Sin\theta = 0 \;\; => \; \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

d) Muestre que la amplitud de oscilaciones pequeñas es proporcional a $l^{-\frac{3}{4}}$.

Para $\left|\frac{\dot{l}}{l}\right| \ll \omega$, $I_\theta = \oint P_\theta \, d\theta$ es invariante adiabática, y

$$I_\theta = \oint ml^2\dot{\theta} \, d\theta \approx ml^2 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \dot{\theta}^2 \, dt$$

Si intentamos $\theta = A_{(t)}Cos(\,\omega t + \varphi)$ con $A_{(t)}$ variando lentamente,

$$I_\theta = ml^2A^2\,\omega^2\frac{1}{2}\frac{2\pi}{\omega} = \pi ml^2A^2\,\omega = \pi ml^2A^2\sqrt{\frac{g}{l}} \propto l^{\frac{3}{2}}A^2$$

$$=> \quad A \propto l^{-\frac{3}{4}}$$

Doctorado en Ciencias - Física

Examen de Conocimientos - 2015 - 1

Electrodinámica - SOLUCIÓN

Problema 1.
Se tiene un condensador de placas paralelas. Las placas son circulares de radios a y con una separación de valor L. La densidad de carga sobre las placas es uniforme y de valor σ y $-\sigma$ para cada placa.
a. Determine el campo eléctrico en un punto a una distancia Z_0 del centro del condensador y a lo largo del eje de simetría.
b. Hallar la diferencia de potencial entre las dos placas.

a. Si se tiene un disco con densidad de carga σ orientado en la dirección del eje z, el campo eléctrico en esta dirección, en un punto a una distancia D, es:

$$dE_z = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2}\cos\alpha$$

En las otras direcciones el campo eléctrico es cero por la simetría del problema.

$$E_z = \frac{\sigma D}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a \frac{r' dr'}{(D^2 + r'^2)^{3/2}}$$

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[1 - \frac{D}{\sqrt{D^2 + a^2}}\right]$$

El campo eléctrico dentro del condensador es la superposición de los campos producidos por cada disco. Un disco localizado a $D = L/2 - z_0$ con densidad de carga σ y el otro localizado a $D = L/2 + z_0$ con densidad de carga $-\sigma$. El campo total es entonces:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[2 - \frac{L/2 + z_0}{\sqrt{(L/2 + z_0)^2 + a^2}} - \frac{L/2 - z_0}{\sqrt{(L/2 - z_0)^2 + a^2}}\right]\hat{z}$$

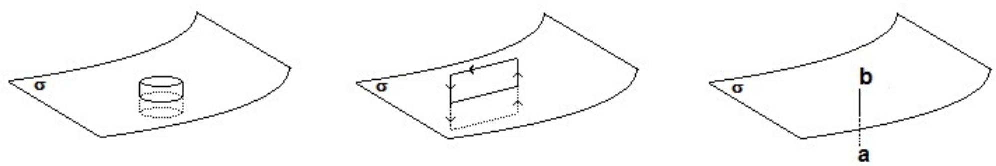
b. La diferencia de potencial entre las placas es:

$$\Delta V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\int_{-L/2}^{L/2}\left[2 - \frac{L/2 + z_0}{\sqrt{(L/2 + z_0)^2 + a^2}} - \frac{L/2 - z_0}{\sqrt{(L/2 - z_0)^2 + a^2}}\right] dz_0$$

Haciendo las sustituciones $u = L/2 + z_0$ y $w = L/2 - z_0$ y calculando la integral se encuentra que:

$$\Delta V = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\left[a + L - \sqrt{L^2 + a^2}\right]$$

Problema 2.)
Se tiene una región del espacio dividida por una lámina delgada, con densidad de carga σ.
a Encuentre las condiciones de frontera de la componente normal del campo eléctrico a ambos lados de la lámina.
b Encuentre las condiciones de frontera de la componente paralela del campo eléctrico a ambos lados de la lámina.
c Encuentre las condiciones de frontera del potencial eléctrico a ambos lados de la lámina.



Para hallar la condición de las componentes normales del campo eléctrico, usamos una cajita de Gauss, como se indica en la figura de la izquierda. La superficie cílindrica que se muestra debe tener una longitud que tiende a cero para que sus tapas se superpongan a la superficie interior y exterior de la placa con densidad de carga. Usando la Ley de Guass obtenemos (note que las normales sobre las tapas del cilindro van en direcciones opuestas):

$$\begin{aligned}
\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} &= \frac{Q_{encerrada}}{\epsilon_0} \\
E_{\perp,encima}A - E_{\perp,debajo}A &= \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \\
E_{\perp,encima} - E_{\perp,debajo} &= \frac{\sigma}{\epsilon_0}
\end{aligned}$$

Donde A es el área de las tapas del cilindro y $\vec{E}_{encima}$ ($\vec{E}_{debajo}$) es el campo eléctrico por encima (por debajo) de la superficie de la lamina. $E_\perp$ es la componente perpendicular al plano.
Para hallar la condición sobre las componentes paralelas del campo eléctrico, hacemos la integral de camino que se indica en la gráfica del centro. Pero dado que queremos que el camino justo pase rozando la lamina por enicma y por debajo, la longitud de los caminos laterales tiende a cero. Adicionalmente sabemos que la integral sobre un camino cerrado del campo eléctrico debe ser cero:

$$\begin{aligned}
\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} &= 0 \\
E_{\parallel,encima} - E_{\parallel,debajo} &= 0
\end{aligned}$$

Dado que: $\vec{E} = -\nabla V$, las condiciones para las derivadas de V son:

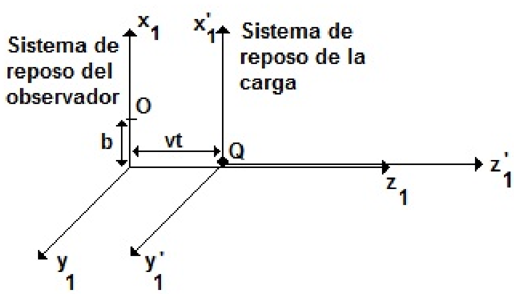
$$\frac{\partial V_{encima}}{\partial n} - \frac{\partial V_{debajo}}{\partial n} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Finalmente, la condición de continuidad para V la podemos hallar usando el camino mostrado en la gráfica de la derecha:

$$V(b) - V(a) \;\; = \;\; -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Pero dado que queremos ver la condición sobre la frontera entonces $a \to b$ (la longitud del camino tiende a cero), por lo tanto $V(b) - V(a) = 0$ (el potencial eléctrico es continuo en la frontera).

PROBLEMA 3.
Un observador estático, ubicado en las coordenadas x=b, y=0, z=0 en su sistema en reposo, observa una carga Q que se mueve sobre el eje z con una velocidad v, cercana a la velocidad de la luz. En el tiempo t=0 la carga pasa por el origen de coordenadas estáticas del observador. Determine los campos eléctrico y magnético que siente el observador.
La siguiente gráfica describe los sistemas de reposo del observador (O) y de la carga (Q):



Primero hallamos campos $\vec{E}'$ y $\vec{B}'$ en el sistema de reposo de la carga Q. En este sistema $\vec{B}' = 0$ y:

$$E'_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qb}{\left(v^2 t'^2 + b^2\right)^{3/2}}$$

$$E'_y = 0$$

$$E'_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qvt'}{\left(v^2 t'^2 + b^2\right)^{3/2}}$$

Posteriormente usamos transformaciones de Lorentz para hallar los campos en el sistema de reposo del observador:

$$ct' = \gamma ct$$

$$\vec{E} = \gamma\left(\vec{E}' - c\vec{\beta} \times \vec{B}'\right) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta\left(\vec{\beta} \cdot \vec{E}'\right)$$

$$\vec{B} = \gamma\left(\vec{B}' + \vec{\beta} \times \vec{E}' \Big/ c\right) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\beta\left(\vec{\beta} \cdot \vec{B}'\right)$$

$$\vec{\beta} = \frac{v}{c}\hat{k}$$

Reemplazando se obtiene:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma Q b}{\left(\gamma^2 v^2 t^2 + b^2\right)^{3/2}}$$

$$E_y = 0$$

$$E_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma^2 Q v t}{\left(\gamma^2 v^2 t^2 + b^2\right)^{3/2}}$$

$$B_x = B_z = 0$$

$$B_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma \beta Q b}{c\left(\gamma^2 v^2 t^2 + b^2\right)^{3/2}}$$

Problema 4.)

Hallar el campo magnético, en todo punto del espacio, producido por una esfer de radio R que tiene magnetización uniforme $\vec{M} = M_0\hat{k}$.

Como no hay fuentes de corriente libre, la ley de Ampere para este caso sería: $\vec{\nabla}\times\vec{H} = 0$, donde $\vec{H}$ el vector de inducción magnética (que depende solo de corrientes libres), lo que implica que $\vec{H}$ lo podemos escribir en terminos del gradiente de un potencial escalar magnético: $\vec{H} = -\vec{\nabla}\Phi_m$. Las condiciones de frontera para este problema son:

1. Componente tangencial de $\vec{H}$ es continua: $H_{1\theta} = H_{2\theta}$
2. Componente perpendicular de $\vec{B}$ es continua:$B_{1r} = B_{2r}$
3. $\Phi_m \to 0$ si $r \to \infty$
4. Φ_m es finito cuando $r \to 0$

Dada la simetría del problema, expandimos Φ_m en polinomios de Legendre:

$$\Phi_{m,adentro}(r,\theta) = \sum_\ell A_\ell r^\ell P_\ell(cos\theta)$$

$$\Phi_{m,afuera}(r,\theta) = \sum_\ell C_\ell r^{-(\ell+1)} P_\ell(cos\theta)$$

Aplicando condición de frontera 1. se obtiene:

$$C_\ell = A_\ell R^{\ell+2}$$

Usando este resultado y aplicando la condición de fronetra 2, se obtiene:

$$A_1 = \frac{1}{3}MC_1 = \frac{1}{3}MR^3$$

$A_\ell = 0$, $C_\ell = 0$ para todo $\ell \neq 1$. Con lo que se obtiene, para r¿R:

$$\Phi_{m,adentro}(r,\theta) = \frac{1}{3}Mrcos\theta$$

y para r¿R:

$$\Phi_{m,afuera}(r,\theta) = \frac{R^3}{3r^2}Mcos\theta$$

Sacando el gradiente:

$$\vec{H}_{adentro} = -\frac{1}{3}Mcos\theta\hat{r} + \frac{1}{3}Msen\theta\hat{\theta}$$

$$\vec{H}_{afuera} = -\frac{2}{3}\frac{MR^3}{r^3}cos\theta\hat{r} - \frac{1}{3}\frac{MR^3}{r^3}sen\theta\hat{\theta}$$

El campo magnético $\vec{B}$ está relacionado con $\vec{H}$ a traves de: $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$, por lo que se obtiene:

$$\vec{B}_{adentro} = \frac{2}{3}\mu_o\vec{M}$$

$$\vec{B}_{afuera} = -\frac{2}{3}\mu_0 M\frac{R^3}{r^3}cos\theta\hat{r} - \frac{1}{3}\mu_0 M\frac{R^3}{r^3}sen\theta\hat{\theta}$$

Doctorado en Ciencias - Física
Examen de Conocimientos - 2015 - 1
Mecánica Cuántica - SOLUCIÓN

Problema 1. (a) Para hallar los posibles valores de energía del sistema debemos calcular el determinante de $\hat{H} - \lambda I$, donde I es la matriz de identidad y λ una contrante arbitraria.

$$\begin{pmatrix} \epsilon & -i\epsilon \\ i\epsilon & \epsilon \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon - \lambda & -i\epsilon \\ i\epsilon & \epsilon - \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow dt[\hat{H} - I\lambda] = (\epsilon - \lambda)^2 - \epsilon^2 = 0.$$

Encontramos que $\epsilon - \lambda = \pm\epsilon$. Por lo tanto, tenemos dos posibles soluciones para λ, $\lambda_1 = 2\epsilon$ y $\lambda_2 = 0$, los cuales representan los posibles valores de energía del sistema.

(b) Dado que conocemos las dos posibles energías del sistema, podemos calcular sus estados estacionarios:

$$\begin{pmatrix} \epsilon & -i\epsilon \\ i\epsilon & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |1> \\ |2> \end{pmatrix} = 2\epsilon \begin{pmatrix} |1> \\ |2> \end{pmatrix}$$

De lo cual obtenemos dos ecuaciones:

(1) $\epsilon|1> -i\epsilon|2> = 2\epsilon|1>$ y (2) $i\epsilon|1> +\epsilon|2> = 2\epsilon|2>$. Las ecuaciones se satisfacen sí $|1> = 1$ y $|2> = i$. Por lo tanto el primer estado está dado por: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$. De forma analoga, usando el segundo valor de energía, encontramos $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$.

Problema 2. Para el primer orden de perturbación tenemos: $E_n^1 =< n|H^1|n >= \epsilon < n|x^4|n >$. Sabemos que para el oscilador armónico x está dado por: $x = \sqrt{\frac{\hbar}{2mw}}(a + a^\dagger)$, así que x^4 es:

$$x^4 = \left(\frac{\hbar}{2mw}\right)^2 (a + a^\dagger)(a + a^\dagger)(a + a^\dagger)(a + a^\dagger)$$

$$x^4 = \left(\frac{\hbar}{2mw}\right)^2 (a^4 + a^3a^\dagger + a^2a^\dagger a + a^2a^{\dagger 2} + aa^\dagger a^2 + aa^\dagger aa^\dagger + aa^\dagger a^\dagger a + aa^{\dagger 3} + a^\dagger a^3 + a^\dagger a^2 a^\dagger + a^\dagger aa^\dagger a + a^\dagger aa^{\dagger 2} + a^{\dagger 2}a^2 + a^{\dagger 2}aa^\dagger + a^{\dagger 2}a^\dagger a + a^{\dagger 4})$$

Una vez usamos el operador en el estado $|n >$, solo los términos que tienen dos veces $a^\dagger$ y a sobreviven:

- $< n|a^2a^{\dagger 2}|n >= \sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\sqrt{n+2}\sqrt{n+1} < n|n >$
- $< n|aa^\dagger aa^\dagger|n >= \sqrt{n+1}\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}\sqrt{n+1} < n|n >$
- $< n|aa^\dagger a^\dagger a|n >= \sqrt{n}\sqrt{n}\sqrt{n+1}\sqrt{n+1} < n|n >$
- $< n|a^\dagger aa^\dagger a|n >= \sqrt{n}\sqrt{n}\sqrt{n}\sqrt{n} < n|n >$
- $< n|a^\dagger a^2a^\dagger|n >= \sqrt{n+1}\sqrt{n+1}\sqrt{n}\sqrt{n} < n|n >$
- $< n|a^{\dagger 2}a^2|n >= \sqrt{n}\sqrt{n-1}\sqrt{n-1}\sqrt{n} < n|n >$

Factorizando nos queda: $E_n^{'} = 3\epsilon(\frac{\hbar}{2mw})^2(2n^2+2n+1)$

Problema 3. Sabemos que el Hamiltoniano es $H = H^0 + V^{'}$, donde $V^{'}$ es el potencial perturbativo. Dado que nuestro potencial depende de las coordenadas x, y, z, nuestro Hamiltoniano es:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}k(x^2+y^2+z^2) + V^{'}$$

Como tenemos un campo eléctrico perturbando el oscilador, el potencial es qE, por lo tanto: $H^1 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}k(x^2+y^2+z^2) + qAe^{-(\frac{t}{\tau})}z$.

Para el oscilador armónico en una dimensión $H^0 = \hbar w(a^\dagger a + \frac{1}{2})$, pero en nuestro caso tenemos tres coordenadas, lo cual implica que el Hamiltoniano es: $H^0 = \hbar w(a_x^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y + a_z^\dagger a_z + \frac{3}{2})$. Los estados propios de H^0 están dados por $|\mathbf{n} >= |n_x, n_y, n_z >$, donde los n_i son enteros. De acuerdo con esto, las energías estarán dadas por:

$$H^0|n_x, n_y, n_z >= \hbar w(a_x^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y + a_z^\dagger a_z + \frac{3}{2})|n_x, n_y, n_z >$$

Usando los estados propios de H^0 como base, podemos escribir una función de onda arbitraria para este sistema: $|\psi >= \sum_n c_{\mathbf{n}}|\mathbf{n} > e^{-iE_{\mathbf{n}}t/\hbar}$, donde $c_{\mathbf{n}}$ son coeficientes complejos dependientes del tiempo, y representan la amplitud de transición para el oscilador.

Ahora, para evaluar $c_n(t = +\infty)$, en el primer orden perturbativo, la terоría nos dice que:

$$|c_n(t = +\infty)|^2 = \frac{1}{\hbar^2}|\int_{-\infty}^{+\infty} < n|V^{'}|i > e^{iw_{ni}t^{'}}dt^{'}|^2$$

Donde la ecuación para $c_n(t)$ fue tomada de la tabla de formulas. Sin embargo, dado que la perturnación comienza en $t = 0$, tenemos:

$$|c_n(t = +\infty)|^2 = \frac{1}{\hbar^2}|\int_{0}^{+\infty} < n|V^{'}|i > e^{iw_{ni}t^{'}}dt^{'}|^2$$

Ahora, sabemos que la probabilidad de transición está dada por: $P = \sum_{n\neq i} |c_n(t=+\infty)|^2$.

Para evaluar esta suma, usamos $< n|V^{'}|i >$. Para el estado base, tenemos $|i >= |0,0,0>$ y para el estado $< \mathbf{n}| =< n_x, n_y, n_z|$, de esta manera:

$$< n|V^{'}|i >= qAe^{-(\frac{t}{\tau})} < n_x, n_y, n_z|z|0,0,0>$$

Podemos escribir z en términos de los operadores de creación y aniquilación:

$$z = \sqrt{\frac{\hbar}{2mw}}(a_z + a_z^{\dagger}),$$

lo cual nos da como resultado:

$$< n|V^{'}|i >= qAe^{-(\frac{t}{\tau})}\sqrt{\frac{\hbar}{2mw}}\delta_{n_z,1}\delta_{n_x,0}\delta_{n_y,0},$$

implicando que $V^{'}$ solo puede conectar valores de n_z que difieran en uno del estado base y por lo tanto solo un termino en la suma es diferente de cero. De esta manera, la probabilidad de transición es:

$$P = \frac{1}{2\hbar mw}q^2A^2|\int_0^{+\infty} e^{-(\frac{t^{'}}{\tau})}e^{iwt^{'}}dt^{'}|^2$$

Haciendo la integral obtenemos:

$$\int_0^{+\infty} e^{-(\frac{t^{'}}{\tau})}e^{iw_{ni}t^{'}}dt^{'} = \int_0^{+\infty} e^{-t^{'}(1/\tau - iw)}dt^{'} = \frac{-e^{-t(1/\tau-iw)}}{(1/\tau-iw)}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{(1/\tau-iw_{ni})}$$

Ahora elevando al cuadrado:

$$|\int_0^{+\infty} e^{-(\frac{t^{'}}{\tau})}e^{iwt^{'}}dt^{'}|^2 = \frac{1}{(1/\tau^2+w_{ni}^2)}$$

Finalmente, la probabilidad está dada por:

$$P = \frac{q^2A^2}{(2\hbar mw)(1/\tau^2+w^2)}$$

Problema 4. (a) $H^{'} = e\vec{E}\cdot\vec{r} = e(\vec{k}\cdot\vec{r}\varepsilon)e^{-t^2/\tau^2} = ercos(\theta)\varepsilon e^{-t^2/\tau^2}$.

(b) $c_{i\to f}(t) = \delta_{if} - \frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} < f^0|H^1(t^{'})|i^0 > e^{iw_{fi}t^{'}}dt^{'}$. Dado que $i \neq f$:

$$c_{i\to f}(t) = -\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} < f^0|H^1(t^{'})|i^0 > e^{iw_{fi}t^{'}}dt^{'}.$$

Para nuestro caso (transición a un nivel n superior, entonces $i \to f$ podemos escribirlo como n):

$$c_n(t) = -\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} < 2\ell m|H^1(t')|100 > e^{iw_{fi}t'}dt'$$

$$c_n(t) = -e\varepsilon\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} < 2\ell m|rcos(\theta)|100 > e^{-t'^2/\tau^2}\exp^{iw_{fi}t'}dt'$$

(c) Para resolver la integral, debemos primero solucionar $< 2\ell m|rcos(\theta)|100 >$. Primero, debemos escribir la expresión en su forma integral, en términos de las funciones de onda asociadas:

$$< 2\ell m|rcos(\theta)|100 >= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\psi^*_{2\ell m}rcos(\theta)\psi_{100}r^2d\Omega dr$$

Ahora, escribimos las funciones de onda en términos de la función radial y los esféricos armónicos respectivos, usando la tabla de ecuaciones provista para el examen:

$$\psi_{2\ell m} = R_{2\ell}Y_{\ell m},\ \psi_{100} = R_{10}Y_{00},\ cos(\theta) = Y_{10}\sqrt{\frac{4\pi}{3}},$$

donde $Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$. Reemplazando:

$$< 2\ell m|rcos(\theta)|100 >= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}R_{2\ell}Y^*_{\ell m}(rY_{10}\sqrt{\frac{4\pi}{3}})\frac{1}{\sqrt{4\pi}}R_{10}r^2d\Omega dr$$

Ordenando los términos:

$$< 2\ell m|rcos(\theta)|100 >= \frac{1}{\sqrt{3}}(\int_0^{\infty}R_{2\ell}R_{10}r^3dr)(\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}Y^*_{\ell m}Y_{10}d\Omega)$$

Usando la tabla de formulas, nos damos cuenta que $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}Y^*_{\ell m}Y_{10}d\Omega = \delta_{\ell 1}\delta_{m0}$. Por lo tanto:

$$< 2\ell m|rcos(\theta)|100 >= (\frac{1}{\sqrt{3}}(\int_0^{\infty}R_{2\ell}R_{10}r^3dr)\delta_{\ell 1}\delta_{m0}$$

tal que: $< 2\ell m|rcos(\theta)|100 >= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\infty}R_{21}R_{10}r^3dr$

Usando las funciones radiales de la tabla:

$$< 2\ell m|rcos(\theta)|100 >= \frac{2}{\sqrt{72}a_0^4}\int_0^{\infty}e^{-\frac{3}{2a_0}r}r^4dr$$

Usando una vez mas la tabla, encontramos: $\int_0^{\infty}r^ne^{-\alpha r}dr = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$. Por lo tanto:

$$\int_0^{\infty}e^{-\frac{3}{2a_0}r}r^4dr = \frac{4!}{(\frac{3}{2}a_0)^5} = \frac{2^8}{3^4}a_0^5$$

Entonces: $< 2\ell m|rcos(\theta)|100 >= \frac{1}{\sqrt{72}}\frac{2^9}{3^4}a_0^5$.

Ahora solucionemos la integral que depende del tiempo: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t'^2/\tau^2} \exp^{iw_{fi}t'} dt'$. Usando la tabla de formulas: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t'^2/\tau^2} \exp^{iw_{fi}t'} dt' = \sqrt{\pi}\tau e^{-\frac{w^2}{4\tau^2}}$. De esta manara, la aplitud de transición es:

$$c_2(\infty) = -\frac{e\varepsilon}{\hbar}(\frac{1}{\sqrt{72}}\frac{2^9}{3^4}a_0^5)(\sqrt{\pi}\tau e^{-\frac{w^2}{4\tau^2}})$$

(d) La probabilidad de transición es el cuadrado de la amplitud: $P(n=2) = |c_2(\infty)|^2$

EXAMEN DE CONOCIMIENTOS DE DOCTORADO

MECÁNICA ESTADÍSTICA 2015-1

SOLUCIÓN

I

1)

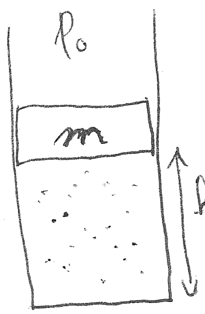
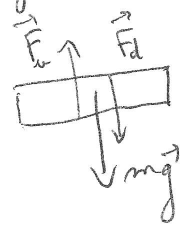


Diagrama de fuerzas sobre el piston



$$\vec{F}_u + \vec{F}_d + m\vec{g} = 0$$

con $F_d = p_0 A$

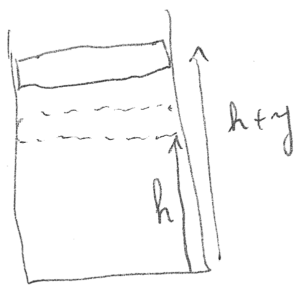
$F_u = p(h) A$

$A = \pi R^2$

$$-p_0 A + p(h) A - mg = 0$$

$$\boxed{p(h) = p_0 + \frac{mg}{A}} \qquad \boxed{p(h) = p_0 + \frac{mg}{\pi R^2}}$$

2)



El volumen que ahora ocupa el gas es $V = A(h+y)$

Como la temperatura se mantiene constante entonces $pV =$ constante

$$p(h+y)(h+y) = p(h)\, h$$

$$\boxed{p(h+y) = \frac{1}{1+y/h}\left(p_0 + \frac{mg}{\pi R^2}\right)}$$

3) Aplicando la 2da Ley de Newton al piston se tiene:

$$m\ddot{y} = -Ap_0 - \frac{mg}{A}A + A\,p(h+y)$$

$$m\ddot{y} = A\left[-p_0 - \frac{mg}{A} + \frac{1}{1+y/h}\left(p_0 + \frac{mg}{A}\right)\right]$$

$$\boxed{\ddot{y} = \frac{-A}{m}\left(p_0 + \frac{mg}{A}\right)\left[1 - \frac{1}{1+y/h}\right]}$$

Si $y/h \ll 1$ $\quad 1 - \dfrac{1}{1+y/h} = 1 - \left(1 - y/h + O\left((y/h)^2\right)\right)$

$$= \frac{y}{h} + O\left((y/h)^2\right)$$

$$\boxed{\ddot{y} = -\frac{A}{m}\left(p_0 + \frac{mg}{A}\right)\frac{1}{h}\, y}$$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{A}{m}\left(p_0 + \frac{mg}{A}\right)\frac{1}{h}}$$

La frecuencia de oscilación es $\boxed{f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{A}{m}\left(p_0 + \dfrac{mg}{A}\right)\dfrac{1}{h}}}$

(20 minutos)

4) Si el proceso fuera adiabático entonces $pV^\gamma = \text{constante}$

$$p(h)h^\gamma = p(h+y)(h+y)^\gamma \Leftrightarrow p(h+y) = \frac{1}{(1+y/h)^\gamma}\, p(h)$$

Esto cambia en la ley de Newton así:

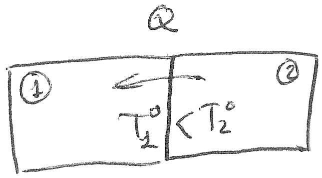
$$\ddot{y} = -\frac{A}{m}\left(p_0 + \frac{mg}{A}\right)\left(1 - (1+y/h)^{-\gamma}\right)$$

y $\quad 1 - (1+y/h)^{-\gamma} = \gamma\dfrac{y}{h} + O\left((y/h)^2\right)$

Entonces $\boxed{\omega^2 = \gamma\, \dfrac{A}{m}\left(p_0 + \dfrac{mg}{A}\right)\dfrac{1}{h}.}$

II

1)



Sistema compuesto por los dos cuerpos

$$dS = \frac{\delta Q_1}{T_1} + \frac{\delta Q_2}{T_2}$$

El calor recibido por ① es $\delta Q_1 = C_1\, dT_1$

El calor recibido por ② es $\delta Q_2 = C_2\, dT_2$

$$dS = C_1 \frac{dT_1}{T_1} + C_2 \frac{dT_2}{T_2}$$

$$\Delta S = S - S_0 = \int_{T_1^0}^{T_1} C_1 \frac{dT_1'}{T_1'} + \int_{T_2^0}^{T_2} C_2 \frac{dT_2'}{T_2'}$$

$$\boxed{\Delta S = C_1 \ln\left(\frac{T_1}{T_1^0}\right) + C_2 \ln\left(\frac{T_2}{T_2^0}\right)} \quad (1)$$

2) El sistema está aislado por lo tanto $\delta Q_1 + \delta Q_2 = 0$

$$C_1\, dT_1 = -C_2\, dT_2$$

$$C_1 (T_1 - T_1^0) = -C_2 (T_2 - T_2^0)$$

$$T_2 - T_2^0 = \frac{-C_1}{C_2}(T_1 - T_1^0) \iff \boxed{T_2 = T_2^0 - \frac{C_1}{C_2}(T_1 - T_1^0)} \quad (2)$$

3) Se puede expresar ΔS en función de T_1 solamente combinando (1) y (2):

$$\boxed{\Delta S = C_1 \ln\left(\frac{T_1}{T_1^0}\right) + C_2 \ln\left(1 - \frac{C_1}{C_2}\,\frac{T_1 - T_1^0}{T_2^0}\right)}$$

Se busca cuando ΔS es máximo:

$$\frac{\partial(\Delta S)}{\partial T_1} = C_1 \frac{1}{T_1} + C_2 \frac{\frac{C_1}{C_2}\frac{1}{T_2^0}}{\frac{C_1}{C_2}\frac{T_1 - T_1^0}{T_2^0} + 1}$$

$$\frac{\partial(\Delta S)}{\partial T_1} = \frac{C_1}{T_1} + \frac{C_2}{T_1 - T_1^0 + \frac{C_2}{C_1} T_2^0}$$

El máximo es cuando $\frac{\partial(\Delta S)}{\partial T_1} = 0$

$$\frac{T_1}{C_1} = -\frac{T_1 - T_1^0 + \frac{C_2}{C_1} T_2^0}{C_2}$$

$$(C_1 + C_2) T_1 = C_1 T_1^0 + C_2 T_2^0$$

$$\boxed{T_1 = \frac{C_1 T_1^0 + C_2 T_2^0}{C_1 + C_2}} \quad (3)$$

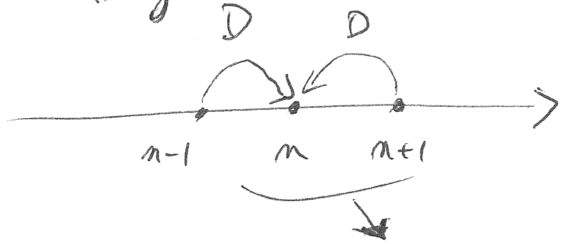
Notar que entonces por (2) se tiene que $T_2 = \frac{C_1 T_1^0 + C_2 T_2^0}{C_1 + C_2} = T_1$

Lo que corresponde bien al equilibrio térmico, y está acorde con la segunda ley de la termodinámica que S aumenta hasta llegar a equilibrio térmico.

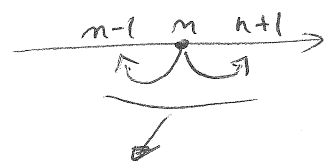
(10 minutos).

III

1) Flujo entrando a n:



Flujo saliendo de n:



$$\frac{\partial P_n(t)}{\partial t} = D\left(P_{n+1}(t) + P_{n-1}(t)\right) - 2 D P_n(t).$$

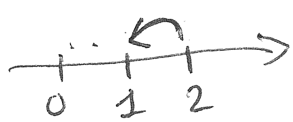
para $n \in \{2, 3, \ldots, N-2\}$

Cerca a los sitios absorbentes la ecuación es diferente:

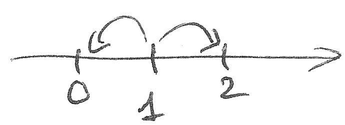
- ~~En 0: Flujo entrante. no hay flujo saliente.~~

$$\cancel{\frac{\partial P_0(t)}{\partial t} = D P_1(t)}$$

- En 1: Flujo entrante (desde 0 no hay flujo)



Flujo saliente



$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = D P_2(t) - 2 D P_1(t)$$

Similamente en $N-1$ y N las ecuaciones son

$$\frac{\partial P_{N-1}}{\partial t} = D P_{N-2}(t) - 2 D P_{N-1}$$

$$\cancel{\frac{\partial P_N}{\partial t} = D P_{N-1}(t)}$$

4

III 3) $$P_n(t) = \sum_{k=1}^{N-1} A_t(k, n_0, N) \sin\left(\frac{k\pi n}{N}\right)$$

— En los sitios absorbentes se tiene $P_0(t) = 0$ y $P_N(t) = 0$ porque la partícula desaparece. Entonces $P_n(t)$ como función de n se puede desarollar en serie de Fourier y con esas condiciones solo da términos en $\sin\left(\frac{k\pi}{N} n\right)$ que son los que satisfacen $\sin\left(\frac{k\pi}{N} n\right) = 0$ en $n = 0$ y $N = n$.

— Remplazando en la ecuación maestra, se tiene:

$$P_{n+1}(t) + P_{n-1}(t) - 2P_n(t) = \sum_{k=1}^{N-1} A_t(k, n_0, N)\left(\sin\left(\frac{k\pi(n+1)}{N}\right) + \sin\frac{k\pi(n-1)}{N} - 2\sin\left(\frac{k\pi n}{N}\right)\right)$$

Usando $2\cos a \sin b = \sin(a+b) + \sin(b-a)$ tenemos

$$\sin\frac{k\pi(n+1)}{N} + \sin\frac{k\pi(n-1)}{N} = 2\cos\frac{k\pi}{N}\sin\frac{k\pi n}{N}$$

Así $$D\sum_{k=1}^{N-1} A_t(k, n_0, N)\left(\cos\frac{k\pi}{N} - 1\right) 2\sin\frac{k\pi n}{N} = \frac{\partial P_n}{\partial t}$$

Entonces: $$\frac{\partial A_t}{\partial t} = 2\left(\cos\frac{k\pi}{N} - 1\right) A_t D$$

$$\boxed{A_t(k, n_0, N) = C_{k,n_0,N}\, e^{-2D\left(1-\cos\frac{k\pi}{N}\right)t}}$$

Las constantes $C_{k,n_0,N}$ se encuentran aplicando la condición ~~de frontera~~ inicial $P_n(0) = \delta_{n,n_0}$ y $A_0(k, n_0, N) = \frac{2}{N}\sum P_n(0)\sin\left(\frac{k\pi n}{N}\right) = \frac{2}{N}\sin\left(\frac{k\pi n_0}{N}\right)$

$$\boxed{A_t(k,n_0,N) = \frac{2}{N}\sin\left(\frac{k\pi n_0}{N}\right) e^{-2\left(1-\cos\left(\frac{k\pi}{N}\right)\right)tD}}$$

Nota: para $n=1$ o $n=N-1$ la ecuación es:

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = D\left(P_2 - 2P_1\right) = \sum_{k=1}^{N-1} A_t(k,n_0,N)\left(\sin\frac{k\pi(1+1)}{N} + 0 - 2\sin\frac{k\pi 1}{N}\right)$$

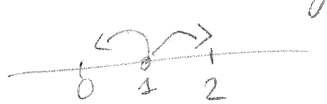
La ecuación anterior también valida. $\leftarrow$ $\sin\frac{k(1-1)\pi}{N} = 0$

~~2) Si N = 2 el sistema de ecuaciones es:~~

$$\cancel{\frac{\partial P_1}{\partial t} = DP_2 - 2DP_1}$$

$$\cancel{\frac{\partial P_2}{\partial t}} =$$

2). Si $N=2$ solo hay un sitio en $n=1$ y la ecuación maestra es



$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = -2DP_1(t) \Leftrightarrow P_1(t) = Ce^{-2Dt}$$

Con la condición inicial $P_1(0) = 1 = C$

$$\boxed{P_1(t) = e^{-2Dt}}$$

• Si $N=3$ tenemos un sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{\partial P_1}{\partial t} = DP_2(t) - 2DP_1(t) \\ \frac{\partial P_2}{\partial t} = DP_1(t) - 2DP_2(t) \end{cases}$$

Tenemos ~~$\rho_1(t)+\rho_2(t) = 1$ = constante~~

$$\cancel{\frac{\partial(\rho_1+\rho_2)}{\partial t} = 0} \qquad \frac{\partial(\rho_1+\rho_2)}{\partial t} = -D(\rho_1+\rho_2)$$

$$y \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho_1-\rho_2) = +3(\rho_2-\rho_1)D.$$

$K=1$ si $\rho_1(0)-\rho_2(0)=1$ es decir $n_0=1$

$K=-1$ si $n_0=2$.

$$\rho_1(t)-\rho_2(t) = K e^{-3Dt}$$

$$y \quad \rho_1(t)+\rho_2(t) = 1\times e^{-Dt}$$

$$\boxed{\rho_1(t) = \frac{1}{2}\left(K e^{-3Dt} + e^{-Dt}\right)}$$

$$\boxed{\rho_2(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-Dt} - K e^{-3Dt}\right)}$$

Verificación con el resultado general:

$$\rho_n(t) = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{2}{N}\sin\left(\frac{k\pi n_0}{N}\right) e^{-2\left(1-\cos\frac{k\pi}{N}\right)Dt}\sin\left(\frac{k\pi}{N}n\right)$$

Con $N=3$ y $n_0=1$:

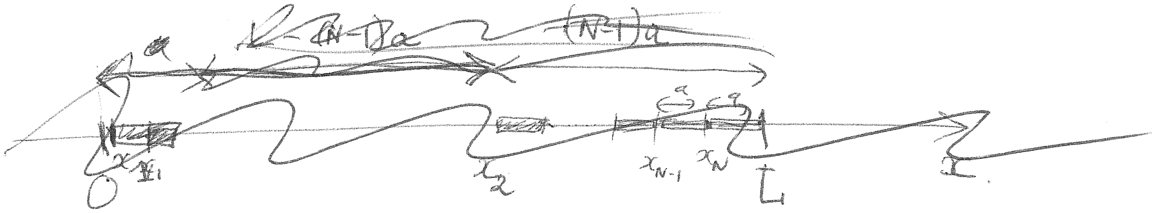
$$\rho_1(t) = 2\sin\frac{\pi}{3}\, e^{-2\left(1-\cos\frac{\pi}{3}\right)Dt}\sin\frac{\pi}{3} + 2\sin\frac{2\pi}{3}\, e^{-2\left(1-\cos\frac{2\pi}{3}\right)Dt}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\frac{1}{3}e^{-2\left(1-\frac{1}{2}\right)Dt} + \frac{3}{2}\frac{1}{3}e^{-2\left(1+\frac{1}{2}\right)Dt}$$

$$= \frac{3}{2}\frac{1}{3}e^{-Dt} + \frac{3}{2}\frac{1}{3}e^{-3Dt} = \frac{1}{2}\left(e^{-3Dt}+e^{-Dt}\right) \text{ OK.}$$

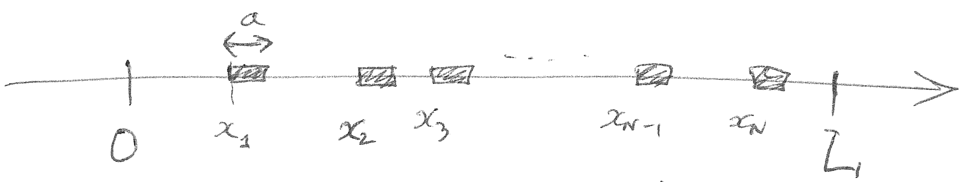
IV

1)

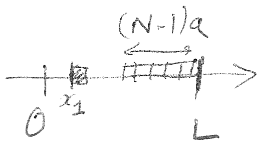


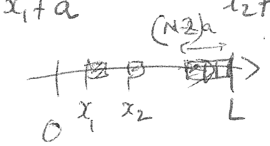
$$Z_c = \frac{1}{N!\lambda^N}\int_{[0,L]^N} e^{-\beta \sum_{1\le i<j\le N} v(|x_i - x_j|)}\, dx_1 \dots dx_N = \frac{1}{\lambda^N}\int_{0\le x_1 < x_2 < \dots < x_N \le L} e^{-\beta \sum_{i<j} v(|x_i - x_j|)}\, dx_1 \dots dx_N$$

Con λ la longitud térmica de de Broglie.



$$Z = \frac{1}{\lambda^N}\int_0^{L-Na} dx_1 \int_{x_1+a}^{L-(N-1)a} dx_2 \int_{x_2+a}^{L-(N-2)a} dx_3 \times \dots \times \int_{x_{N-1}+a}^{L-a} dx_N$$





Definimos: $y_1 = x_1$; $y_2 = x_2 - a$; $y_3 = x_3 - 2a$; ... ; $y_k = x_k - (k-1)a$; ...

$y_N = x_N - (N-1)a$

$$Z = \frac{1}{\lambda^N}\int_0^{L-Na} dy_1 \int_{y_1}^{L-Na} dy_2 \int_{y_2}^{L-Na} dy_3 \dots \int_{y_{N-1}}^{L-Na} dy_N$$

$$Z = \frac{1}{\lambda^N}\int_0^{L-Na} dy_1 \int_{y_1}^{L-Na} dy_2 \times \dots \times \int_{y_{N-2}}^{L-Na} (L - Na - y_{N-1})\, dy_{N-1}$$

$$Z = \frac{1}{\lambda^N}\int_0^{L-Na} dy_1 \int_{y_1}^{L-Na} dy_2 \times \dots \times \int_{y_{N-3}}^{L-Na} \frac{(L - Na - y_{N-2})^2}{2}\, dy_{N-2}$$

$$Z = \frac{1}{\lambda^N}\int_0^{L-Na} dy_1 \int_{y_1}^{L-Na} dy_2 \times \dots \times \int_{y_{N-k-1}}^{L-Na} \frac{1}{k!}(L - Na - y_{N-k})^k\, dy_{N-k} = \dots = \frac{1}{N!}(L - Na)^N \frac{1}{\lambda^N}$$

$$\beta F_c(N,L,T) = -\ln Z_c = \ln(N!\,\lambda^N) - N\ln(L-Na)$$

$$\beta F_c \underset{\substack{N\to\infty \\ L\to\infty \\ \text{con } \frac{N}{L}=n<\infty}}{=} N\ln N - N + N\ln\lambda - N\ln(L-Na)$$

$n = \frac{N}{L}$ = densidad.

$$\beta F_c = N\left(\ln\left(\frac{N\lambda}{L-Na}\right) - 1\right) = N\left(\ln\left(\frac{n\lambda}{1-na}\right) - 1\right)$$

3) $$\beta p = +\frac{N}{L-Na} = \frac{n}{1-na}.$$

$$\boxed{\beta p = \frac{n}{1-na}}$$

4) $$\beta p = n(1-na)^{-1} = n\sum_{k=0}^{\infty}(na)^k = n + \underbrace{n^2 a}_{\downarrow} + n^3 a^2 + O(n(na)^3).$$

$B_2 = a.$

$$B_2 = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{-\beta v(2)} - 1\right)dx = -\frac{1}{2}(-2a) = a. \quad \text{OK}.$$

5) $$Z_p(N,p,T) = \int_0^\infty \frac{dL}{a} e^{-\beta pL} \int_{x_1<x_2\cdots<x_N} dx_1 \cdots dx_N \prod_{i<j} f(|x_i - x_j|)$$

En donde $f(|x_i-x_j|) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x_i-x_j| < a \\ 1 & \text{si } |x_i-x_j| > a. \end{cases}$

Como las partículas están ordenadas en la integral, solo es necesario tener en cuenta dos posiciones sucesivas:

$f(x_1+a)$?? ~~[illegible]~~

$$Z_p(N,p,T) = \int_0^\infty \frac{dL}{a\lambda^N} e^{-\beta pL} \int_0^\infty dx_1 \cdots \int_0^\infty dx_N\, \underbrace{f(|x_2-x_1|)\, f(|x_3-x_4|)\, f(|x_4-x_5|) \cdots f(L-x_N)}_{f(x_1')\, f(x_2'-x_1') \cdots f(L-a-x_N')}$$

Definiendo $x_i' = x_i + a$.

$$Z_p(N,p,T) = \int_0^\infty \frac{dL}{a\lambda^N} e^{-\beta pL}\, \underbrace{f * f * f * \cdots * f}_{N+1}(L-a)$$

$$Z_p(N,p,T) = \frac{1}{a\lambda^N}\left((\mathcal{L}f)(\beta p)\right)^{1+N} e^{+\beta p a}$$

en donde $\mathcal{L}f(\beta p) = \int_0^\infty e^{-\beta p L} f(L)\,dL$ es la transformada de Laplace de f. $\cancel{= \int_0^a e^{-\beta p L}\,dL = \frac{1-e^{-\beta p a}}{\beta p}}$

$$\cancel{\boxed{Z_p(N,p,T) = \frac{1}{a\lambda^N}\left(\frac{1-e^{-\beta p a}}{\beta p L}\right)^N}}$$

6)

$$\mathcal{L}f(\beta p) = \int_a^\infty e^{-\beta p L}\,dL = \frac{e^{-\beta p a}}{\beta p}$$

$$Z_p(N,p,T) = \frac{1}{a\lambda^N}\,\frac{\cancel{e^{-\beta p(N+1)a}}}{(\beta p)^{N+1}}\left(e^{-\beta p a}\right)^{N+1} e^{\beta p a}$$

$$Z_p(N,p,T) = \frac{1}{a\lambda^N}\,\frac{e^{-\beta p N a}}{(\beta p)^{N+1}}$$

$$Z_c(N,L,T) = \frac{1}{\lambda^N}\,\frac{1}{N!}\,(L-Na)^N$$

7)

$$\langle L\rangle_p = \frac{-\partial}{\beta\partial p}(\ln Z_p) = \frac{\partial}{\partial\beta p}\left[+\beta p (N)a + (\ln(\beta p))(N+1)\right]$$

$$\langle L\rangle_p = (N)a + \frac{N+1}{\beta p}$$

8)

$$\frac{N+1}{\beta p} = \left(\langle L\rangle_p - (N)a\right) \Leftrightarrow \boxed{\beta p = \frac{(N+1)}{\langle L\rangle_p - (N)a}}$$

En el límite termodinámico $N\to\infty$

$$\beta p = \frac{n}{1-na} \qquad \text{Con } n = \lim_{N\to\infty}\frac{N}{\langle L\rangle_p}.$$