Universidad de los Andes-Departamento de Física
Examen de Conocimientos: Mecánica Cuántica Avanzada
15 de Julio de 2014

---

1. Suponga que cada uno de $2N$ electrones (masa m) está en libertad de moverse a lo largo del eje x, bajo la acción de un potencial armónico de la forma $U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$. Ignorando cualquier tipo de interacción eléctrica o magnética entre los electrones, obtenga una expresión para la energía del estado base de este sistema.

2. Para el siguiente Hamiltoniano,

$$H = \alpha J^2 + \beta J_z + \gamma J_y, \tag{1}$$

donde α, β y γ son constantes positivas, considere el término proporcional a γ como una perturbación.

(a) Obtenga, al orden más bajo no nulo posible en teoría de perturbaciones, la corrección a la energía del estado $|J = j, m = -j\rangle$.

(b) Asuma que el mismo Hamiltoniano (1) corresponde a un sistema de espín $s = 1/2$. Obtenga la energía exacta del estado base de este sistema, y compárela con el resultado del numeral anterior (tomando $j = 1/2$).

3. Considere un sistema de dos niveles, $\{|1\rangle, |2\rangle\}$, con un Hamiltoniano de la forma

$$H(t) = H_0 + V(t),$$

donde $H_0 = E_1|1\rangle\langle 1| + E_2|2\rangle\langle 2|$ representa el Hamiltoniano del sistema "no perturbado" y

$$V(t) = \lambda(t)|1\rangle\langle 2| + \lambda^*(t)|2\rangle\langle 1|$$

es una perturbación que depende del tiempo a través de la función $\lambda(t)$.

(a) ¿Cuáles son los estados y valores propios de H_0?

(b) Obtenga el operador $V(t)$ en el esquema de interacción (Dirac):

$$V_D(t) \equiv U_0^{-1}(t)V(t)U_0(t), \qquad U_0(t) = e^{-iH_0t/\hbar}.$$

(c) Suponiendo que en el instante $t = 0$ el estado del sistema está dado por

$$|\Psi_D(0)\rangle = c_1^{(0)}|1\rangle + c_2^{(0)}|2\rangle,$$

con $c_1^{(0)}, c_2^{(0)}$ constantes reales, obtenga el estado $|\Psi_D(t)\rangle$ en el esquema de interacción, mediante la solución de la ecuación de evolución temporal *en el esquema de interacción*, para el caso $\lambda(t) = \lambda_0 e^{i\omega t}$.

(d) Para el caso *resonante* $\hbar\omega = E_2 - E_1$, calcule el valor esperado del operador dipolar, cuya expresión en el esquema de Schrödinger es

$$P_z = p\left(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|\right).$$

4. Considere un sistema fermiónico (muy simple) descrito por relaciones de anticonmutación

$$a^2 = 0, \quad (a^\dagger)^2 = 0, \quad \{a, a^\dagger\} = 1.$$

(a) ¿Qué dimensión tiene el espacio de Fock que corresponde a este sistema? Exhiba una base pare este espacio.

(b) Considere el estado

$$\rho = \frac{e^{-\beta(H-\mu N)}}{Z}, \tag{2}$$

donde $N = a^\dagger a$ es el operador "número de partículas" y $Z = \operatorname{Tr} e^{-(H-\mu N)}$. Calcule el valor esperado $\langle N \rangle_\rho$ directamente a partir de la definición

$$\langle N \rangle_\rho := \operatorname{Tr}(\rho N).$$

Muestre, además, que dicho valor esperado se puede obtener, de forma alternativa, así:

$$\langle N \rangle_\rho = \frac{1}{\beta Z} \frac{\partial Z}{\partial \mu} \tag{3}$$

(c) Considere ahora un sistema fermiónico descrito por relaciones de anti-conmutación

$$\{a_i, a_j\} = 0, \quad \{a_i^\dagger, a_j^\dagger\} = 0, \quad \{a_i, a_j^\dagger\} = \delta_{ij},$$

donde ahora los índices i, j toman valores desde 1 hasta K: $1 \leq i, j \leq K$. ¿Qué dimensión tiene el espacio de Fock ahora? Exhiba una base pare este espacio.

(d) Calcule $Z = \operatorname{Tr} e^{-\beta(H-\mu N)}$ y, haciendo uso de (3), obtenga $\langle N \rangle_\rho$, donde, nuevamente, $\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta(H-\mu N)}$. Comente su resultado.

Examen de conocimientos 2014-II
Prueba de Mecánica Estadística

1.
Considere un gas monoatómico a una temperatura T y una presión P. Asuma que los átomos del gas se comportan como esferas duras de diámetro d, y use como ecuación de estado la de un gas ideal.

a) Calcule la velocidad relativa promedio entre dos átomos, $\langle v_r \rangle$, en términos de la velocidad promedio de un solo átomo, $\langle v \rangle$.

b) Calcule el numero promedio de colisiones sufridas por un átomo durante un periodo Δt.

c) Calcule el tiempo medio libre τ (tiempo medio entre una colisión y la siguiente para un átomo).

d) Calcule el camino medio libre λ en términos de T, P y d.

2.
Considere un gas de moléculas diatómicas, con momento dipolar eléctrico $\vec{p}$, con una densidad ρ y una temperatura T, sometido a un campo eléctrico $\vec{E}$. Calcule la polarización eléctrica por unidad de volumen P.

3.
La energía promedio de un sistema en equilibrio térmico es $\langle E \rangle$. Usando el formalismo del ensamble canónico, demuestre que la desviación estándar de esta energía es:

$$\Big\langle \; (\; E - \langle E \rangle \;)^2 \; \Big\rangle = \Big\langle (\Delta E)^2 \Big\rangle = kT^2 C_v \; ,$$

donde T es la temperatura del sistema y C_v es la capacidad calorífica a volumen constante.

4.
Considere un gas ideal fermiónico no relativista, descrito por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{PV}{kT} &= \int_0^\infty \rho(\varepsilon) \ln(1 + z e^{-\beta\varepsilon}) d\varepsilon \; , \\ N &= \int_0^\infty \frac{\rho(\varepsilon) d\varepsilon}{z^{-1} e^{\beta\varepsilon} + 1} \; , \end{aligned}$$

donde $\rho(\varepsilon)$ es la densidad de estados, $z = e^{\mu/kT}$ es la fugacidad, μ es el potencial químico, y $\beta = 1/kT$.

a) Demuestre que la densidad de estados para este sistema es de la forma $\rho(\varepsilon) = C\varepsilon^{1/2}$, donde C es una constante.

b) Demuestre que para este sistema $PV = \frac{2}{3} U$, donde U es la energía interna.

Examen de Conocimineto

Marek Nowakowski

14.07.2014

Nombre y Codigo: ______________________________

1. (25 *Puntos*) En un diodo unidimensional:

los electrones se emiten en $x = 0$ con una velocidad pequeña que podemos asumir igual a cero. Encontrar el potencial eléctrico $\Phi(x)$, la densidad de carga $\rho(x)$ y el campo eléctrico $E(x)$. Para lograrlo puede seguir los siguientes pasos:

   (a) (5 *Puntos*) Escriba la ecuación relevante de Poisson para el problema en una dimensión.

   (b) (5 *Puntos*) Use la ecuación de continuidad y el hecho de que ρ no depende del tiempo para reemplazar la densidad de carga por la densidad de corriente y la velocidad.

   (c) (5 *Puntos*) Use la conservación de la energía para reemplazar la velocidad por el potencial y escriba la ecuacion diferencial resultante para Φ.

   (d) (5 *Puntos*) Multiplique esta ecuación por $d\Phi/dx$ para reducirla a una ecuación diferencial de primer orden.

   (e) (5 *Puntos*) Resuelva esta ecuación tomando la raíz cuadrada positiva (Seguida de integración) y deduzca los exponentes α, β y γ de

$$\Phi(x) \propto x^{\alpha}$$
$$\rho(x) \propto x^{\beta}$$
$$E(x) \propto x^{\gamma}$$

2. (25 *Puntos*) Dado es un campo magnético constante en la dirección del eje z: $\vec{B} = B\hat{z}$. El campo eléctrico es cero.

   (a) (10 *Puntos*) Considere la elección de los potenciales electromagneticos

$$V = 0,\ A^x = A^z = 0,\ A^y = Bx$$

$$V' = 0,\ \vec{A}' = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$$

   Cuáles potenciales corresponden al campo magnetico descrito anteriormente? Puede ser útil la identidad:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{kmn} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$$

(b) (15 *Puntos*) Si encuentra que ambos potenciales dados arriba son correctos encuentre la transformación gauge entre ellos.

ayuda:

$$\hat{y} = \sin\theta \sin\phi \hat{r} + \cos\theta \sin\phi \hat{\theta} + \cos\phi \hat{\phi}$$

3. (25 *Puntos*) Un pulso electromagnético con un campo eléctrico

$$\vec{E} = E_0 \exp\left(-c^2 t^2 / l^2\right) \hat{y}$$

impacta a un electrÃşn en reposo en el origen del sistema de coordenadas. Asuma como válido el límite no relativista

(a) (10 *Puntos*) con

$$\vec{B}_{\mathrm{rad}} = \frac{1}{\mu_0 c} \left(\hat{r} \times \vec{E}_{\mathrm{rad}}\right)$$

donde $\vec{r}$ es el vector entre la fuente de radiación y el observador y

$$\vec{E}_{\mathrm{rad}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \hat{r} \times (\hat{r} \times \dot{\vec{v}})$$

determina el vector de Poynting $\vec{S}$ en coordenadas esféricas.

(b) (12.5 *Puntos*) Calcule la potencia total radiada P.
Ayuda:

$$\int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a}$$

$$\int \sin^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a}$$

(c) (12.5 *Puntos*) Calcule la energía total radiada U.
Ayuda:

$$\int_0^\infty e^{-a^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}, \ a > 0$$

4. (25 *Puntos*) Dado el 4-potencial A_μ

(a) (12.5 *Puntos*) Encuentre las condiciones necesarias para ir de A_μ a un nuevo potencial A'_μ que satisfaga $A'_0 = 0$ y $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = 0$ (gauge de radiación) usando una transformación gauge. Estas condiciones son aplicables si hay compatibilidad con las ecuaciones de Maxwell y con las condiciones sobre la función gauge.

(b) (12.5 *Puntos*) Dada la gauge de radiación anterior resuelva la ecuación diferencial parcial para A'_μ en el vacÃŋo (es decir, sin fuentes) suponiendo la forma de la onda plana

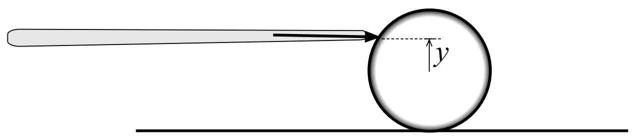
$$A'_\mu = \epsilon_\mu \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

donde ϵ_μ, $\vec{k}$ y ω son constantes. Ponga atención a las relaciones posibles entre estas constantes.

Examen de conocimientos 2014-II
Prueba de Mecánica

---

1. Una bola de billar es puesta en movimiento por el impulso que le imprime, en un tiempo despreciable, un taco de billar paralelo a la mesa y sobre un plano común con el centro de masa. Suponiendo que el taco impacta sobre la bola a una altura y medida con respecto a la altura del centro de masa, la bola generalmente saldrá rodando y deslizando contra la mesa.



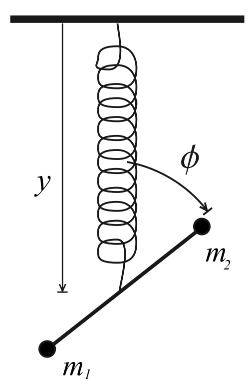
a) Encuentre la razón entre la altura y y el radio R de la bola que se necesita para que la bola salga rodando sin deslizar. Tome el momento de inercia de la bola como $I = \frac{2}{5}MR^2$.

b) Suponiendo que el taco impacta a una altura y distinta a la encontrada en el punto (a), determine el tiempo que tarda el movimiento de la bola en llegar al estado de rodamiento sin deslizamiento, en términos del coeficiente de fricción cinética μ_c, la rapidez inicial de la bola v_0, la constante de la gravedad g, y la razón y/R (tenga en cuenta valores tanto positivos como negativos de y).

c) ¿Es posible escoger y de tal forma que la bola termine invirtiendo la dirección de su movimiento?

---

2. En el sistema mecánico de la figura, dos masas puntuales distintas m_1 y m_2, con $m_1 > m_2$, se encuentran a los extremos de una barra sin masa de longitud $2a$. La barra es libre de rotar en el plano de la figura en torno a su centro, el cual a su vez se puede mover a lo largo de la vertical, sostenido por un resorte de constante k y longitud natural l.



a) Construya el Lagrangiano del sistema en términos de las coordenadas ϕ y y indicadas en la figura.

b) Deduzca las ecuaciones de Euler-Lagrange para las coordenadas generalizadas y y ϕ.

c) Determine la configuración de equilibrio estable del sistema y las frecuencias de pequeñas oscilaciones en torno a esa configuración.

---

3. El lagrangiano de una partícula cargada moviéndose en el plano xy, en presencia de un campo magnético constante perpendicular al plano es

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{q}{c}(A_x \dot{x} + A_y \dot{y}).$$

donde A_x y A_y son las componentes de un potencial vector de la forma $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ con $A_z = 0$. Sean $\vec{A}_1 = B(-y, 0, 0)$ y $\vec{A}_2 = B(0, x, 0)$ dos posibles potenciales vector, donde B es una constante.

a) Demuestre que las ecuaciones de movimiento que se obtienen usando $\vec{A}_1$ o $\vec{A}_2$ son las mismas, y que por lo tanto los lagrangianos definidos en términos de uno u otro potencial vector describen el mismo sistema físico.

b) Haciendo uso del resultado de (a), encuentre dos constantes de movimiento del problema asociadas a simetrías de los lagrangianos con respecto a translaciones en el plano. Igualmente identifique una tercera constante de movimiento asociada a invariancia temporal.

c) Usando el resultado de la parte (b), demuestre que la carga ejecuta movimiento circular uniforme e identifique la frecuencia angular del movimiento. Encuentre una expresión para el radio del círculo y las coordenadas de su centro en términos de las constantes encontradas en la parte (b).

---

4. Una partícula de masa m en una dimensión se mueve bajo la acción del potencial

$$V(q) = \lambda |q| \, .$$

Pasando a variables de ángulo-acción (θ, I), encuentre el hamiltoniano en términos de la variable de acción I, así como la frecuencia de oscilación en función de la energía.

Ayuda: $\int_0^1 \sqrt{1-x}\, dx = \frac{2}{3}$.

Universidad de los Andes-Departamento de Física
Examen de Conocimientos: Mecánica Cuántica Avanzada
15 de Julio de 2014

---

1. Suponga que cada uno de $2N$ electrones (masa m) está en libertad de moverse a lo largo del eje x, bajo la acción de un potencial armónico de la forma $U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. Ignorando cualquier tipo de interacción eléctrica o magnética entre los electrones, obtenga una expresión para la energía del estado base de este sistema.

Solución: El espectro de energía para cada electrón es de la forma

$$\hbar\omega(n + 1/2), \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Al tratarse de un sistema de fermiones, se debe tener en cuenta el principio de exclusión: no más de un electrón en cada estado cuántico. Como el número de electrones es par, cada nivel de energía se puede llenar con dos electrones, uno con espín $|\uparrow\rangle$, el otro con espín $|\downarrow\rangle$. Llenando de esta forma los N primeros niveles, y teniendo en cuenta (1), y el hecho de que los electrones no interactúan entre sí, obtenemos para la energía del estado base:

$$\begin{aligned} E_0 &= 2\sum_{n=0}^{N-1} \hbar\omega(n + 1/2) \qquad (2) \\ &= 2N\frac{\hbar\omega}{2} + 2\hbar\omega\,\underbrace{(0 + 1 + \cdots + (N-1))}_{N(N-1)/2} \\ &= \hbar\omega N + \hbar\omega N(N-1) \\ &= \hbar\omega N^2. \end{aligned}$$

2. Para el siguiente Hamiltoniano,

$$H = \alpha J^2 + \beta J_z + \gamma J_y, \tag{3}$$

donde α, β y γ son constantes positivas, considere el término proporcional a γ como una perturbación.

(a) Obtenga, al orden más bajo no nulo posible en teoría de perturbaciones, la corrección a la energía del estado $|J = j, m = -j\rangle$.

(b) Asuma que el mismo Hamiltoniano (3) corresponde a un sistema de espín $s = 1/2$. Obtenga la energía exacta del estado base de este sistema, y compárela con el resultado del numeral anterior (tomando $j = 1/2$).

Solución: (a) Con $J_\pm = J_1 \pm iJ_2$, $J_\pm|j,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\,|j, m\pm 1\rangle$ y

$$\begin{aligned} J^2|j,m\rangle &= \hbar^2 j(j+1)|j,m\rangle \\ J_3|j,m\rangle &= \hbar m|j,m\rangle, \end{aligned}$$

tenemos ($H_0 = \alpha J^2 + \beta J_z$):

$$H_0|j,m\rangle = E^{(0)}_{j,m}|j,m\rangle,$$

con $E^{(0)}_{j,m} = \alpha\hbar^2 j(j+1) + \beta\hbar m$. Este es el término de orden cero en una serie perturbativa de la forma

$$E_{j,m} = E^{(0)}_{j,m} + \gamma E^{(1)}_{j,m} + \gamma^2 E^{(2)}_{j,m} + \cdots$$

La corrección a primer orden a esta energía ($E^{(1)}_{j,m}$), es cero. Esto se debe a que dicha corrección es proporcional a

$$\langle j,m|J_2|j,m\rangle = \frac{1}{2i}\langle j,m|(J_+ - J_-)|j,m\rangle = 0.$$

Para el siguiente orden ($E^{(2)}_{j,m}$), tenemos:

$$E^{(2)}_{j,m} = \sum_{(j',m')\neq(j,m)} \frac{|\langle j,m|J_2|j',m'\rangle|^2}{E^{(0)}_{j,m} - E^{(0)}_{j',m'}}$$

Usando

$$\begin{aligned} &\langle j,m|J_2|j',m'\rangle = \\ &\quad = \frac{\hbar}{2i}\sqrt{j(j+1) - (m-1)m}\;\delta_{j,j'}\delta_{m,m'+1} - \frac{\hbar}{2i}\sqrt{j(j+1) - (m+1)m}\,\delta_{j,j'}\delta_{m,m'-1}, \end{aligned} \tag{4}$$

obtenemos, *para el estado* $m = -j$:

$$E^{(2)}_{j,-j} = -\hbar\frac{j}{2\beta}.$$

Con esto, a orden 2 en teoría de perturbaciones, la energía que se obtiene para el estado $m = -j$ es la siguiente:

$$E^{(\leq 2)}_{j,-j} \equiv E^{(0)}_{j,-j} + \gamma E^{(1)}_{j,-j} + \gamma^2 E^{(2)}_{j,-j} = \alpha\hbar^2 j(j+1) - \beta\hbar j - \frac{\gamma^2}{2\beta}\hbar j. \qquad (5)$$

(b) Para un sistema de espín 1/2, tenemos $j = 1/2$, así que el Hamiltoniano toma la forma

$$\begin{aligned} H &= \hbar^2 \frac{\alpha}{4}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) + \beta\frac{\hbar}{2}\sigma_3 + \gamma\hbar\sigma_2 \\ &= \frac{3}{4}\hbar^2\alpha + \beta\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \gamma\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Los valores propios de la matriz

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \beta & -i\gamma \\ i\gamma & -\beta \end{pmatrix}$$

estan dados por $\pm\frac{\hbar}{2}\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}$, de tal forma que la energía *exacta* del estado base está dada por

$$E_{1/2,-1/2} = \frac{3}{4}\hbar^2\alpha - \frac{\hbar}{2}\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}. \qquad (6)$$

Tomando γ como un parámetro pequeño y expandiendo la raíz a orden 2 en γ, obtenemos

$$E_{1/2,-1/2} \approx \frac{3}{4}\hbar^2\alpha - \beta\frac{\hbar}{2} - \frac{\gamma^2}{4\beta}\hbar,$$

expresión que coincide con (5) para el caso $j = 1/2$.

3. Considere un sistema de dos niveles, $\{|1\rangle, |2\rangle\}$, con un Hamiltoniano de la forma

$$H(t) = H_0 + V(t),$$

donde $H_0 = E_1|1\rangle\langle 1| + E_2|2\rangle\langle 2|$ representa el Hamiltoniano del sistema "no perturbado" y

$$V(t) = \lambda(t)|1\rangle\langle 2| + \lambda^*(t)|2\rangle\langle 1|$$

es una perturbación que depende del tiempo a través de la función $\lambda(t)$.

(a) ¿Cuáles son los estados y valores propios de H_0?

(b) Obtenga el operador $V(t)$ en el esquema de interacción (Dirac):

$$V_D(t) \equiv U_0^{-1}(t)V(t)U_0(t), \qquad U_0(t) = e^{-iH_0t/\hbar}.$$

(c) Suponiendo que en el instante $t = 0$ el estado del sistema está dado por

$$|\Psi_D(0)\rangle = c_1^{(0)}|1\rangle + c_2^{(0)}|2\rangle,$$

con $c_1^{(0)}, c_2^{(0)}$ constantes reales, obtenga el estado $|\Psi_D(t)\rangle$ en el esquema de interacción, mediante la solución de la ecuación de evolución temporal *en el esquema de interacción*, para el caso $\lambda(t) = \lambda_0 e^{i\omega t}$.

(d) Para el caso *resonante* $\hbar\omega = E_2 - E_1$, calcule el valor esperado del operador dipolar, cuya expresión en el esquema de Schrödinger es

$$P_z = p\left(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|\right).$$

Solución:

(a) Al tratarse de un sistema de dos niveles, asumimos que $|1\rangle$ y $|2\rangle$ son ortogonales; por lo tanto tenemos

$$H_0|1\rangle = E_1|1\rangle, \qquad H_0|2\rangle = E_2|2\rangle.$$

(b) Un cálculo sencillo muestra que

$$V_D(t) = \lambda\, e^{-i\omega_{12}t}\, |1\rangle\langle 2| + \lambda^*\, e^{i\omega_{12}t}\, |2\rangle\langle 1|, \tag{7}$$

donde $\omega_{12} = (E_2 - E_1)/\hbar$.

(c) En el esquema de interacción, la ecuación de movimiento está dada por

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi_D(t)\rangle = V_D(t)|\psi_D(t)\rangle.$$

Con V_D dado por (7) y escribiendo

$$|\psi_D(t)\rangle = c_1(t)|1\rangle + c_2(t)|2\rangle,$$

obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{c}_1(t) &= \frac{\lambda_0}{i\hbar}\, e^{i(\omega-\omega_{12})}\, c_2(t),\\ \dot{c}_2(t) &= \frac{\lambda_0}{i\hbar}\, e^{-i(\omega-\omega_{12})}\, c_1(t),\end{aligned}$$

con condiciones inciciales $c_i(0) = c_i^{(0)}$, $i = 1, 2$. Podemos reescribir estas ecuaciones como dos ecuaciones de segundo orden:

$$\begin{aligned}\ddot{c}_1(t) - i(\omega-\omega_{12})\dot{c}_1(t) + (\lambda_0/\hbar)^2 c_1(t) &= 0,\\ \ddot{c}_2(t) + i(\omega-\omega_{12})\dot{c}_2(t) + (\lambda_0/\hbar)^2 c_2(t) &= 0.\end{aligned}$$

Con $c_1(t) \propto e^{i\eta t}$ y $c_2(t) \propto e^{i\xi t}$, obtenemos las siguientes frecuencias características:

$$\eta_\pm = \frac{1}{2}\left(\omega - \omega_{12} \pm \sqrt{(\omega-\omega_{12})^2 + 4\lambda_0^2/\hbar^2}\right),$$

$$\xi_\pm = \frac{1}{2}\left(\omega_{12} - \omega \pm \sqrt{(\omega-\omega_{12})^2 + 4\lambda_0^2/\hbar^2}\right).$$

Finalmente, tenemos

$$\begin{aligned}c_1(t) &= A_+ e^{i\eta_+ t} + A_- e^{i\eta_- t},\\ c_2(t) &= B_+ e^{i\xi_+ t} + B_- e^{i\xi_- t},\end{aligned}$$

donde, para satisfacer las condiciones iniciales, las constantes $A_\pm, B_\pm$ deben ser solución de

$$A_+ + A_- = c_1^{(0)}, \quad A_+\eta_+ + A_-\eta_- = -\frac{\lambda_0}{\hbar} c_2^{(0)}, \tag{8}$$

y

$$B_+ + B_- = c_2^{(0)}, \quad B_+\xi_+ + B_-\xi_- = -\frac{\lambda_0}{\hbar} c_1^{(0)}. \tag{9}$$

(d) En el caso resonante, tenemos $\xi_\pm \equiv \eta_\pm = \pm\lambda_0/\hbar$. Esto simplifica notablemente la forma de las ecuaciones (8) y (9), dando lugar a $A_\pm = \frac{1}{2}(c_1^{(0)} \mp c_2^{(0)})$ y $B_\pm = \frac{1}{2}(c_2^{(0)} \mp c_1^{(0)})$. Los coeficientes del estado $|\psi_D(t)\rangle$ están dados, por lo tanto, por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}c_1(t) &= c_1^{(0)} \cos\frac{\lambda_0 t}{\hbar} - i c_2^{(0)} \sin\frac{\lambda_0 t}{\hbar},\\ c_2(t) &= c_2^{(0)} \cos\frac{\lambda_0 t}{\hbar} - i c_1^{(0)} \sin\frac{\lambda_0 t}{\hbar}.\end{aligned}$$

El resultado para el valor esperado de P_z es entonces:

$$\begin{aligned}\langle P_z(t)\rangle &= p\,(\,|c_1(t)|^2 - |c_2(t)|^2\,)\\ &= p\,(\,|c_1^{(0)}|^2 - |c_2^{(0)}|^2\,)\cos\frac{2\lambda_0 t}{\hbar}.\end{aligned}$$

4. Considere un sistema fermiónico (muy simple) descrito por relaciones de anticonmutación

$$a^2 = 0, \quad (a^\dagger)^2 = 0, \quad \{a, a^\dagger\} = 1.$$

(a) ¿Qué dimensión tiene el espacio de Fock que corresponde a este sistema? Exhiba una base pare este espacio.

(b) Considere el estado

$$\rho = \frac{e^{-\beta(H-\mu N)}}{Z}, \tag{10}$$

donde $N = a^\dagger a$ es el operador "número de partículas" y $Z = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta(H-\mu N)}$. Calcule el valor esperado $\langle N \rangle_\rho$ directamente a partir de la definición

$$\langle N \rangle_\rho := \mathrm{Tr}\,(\rho N)\,.$$

Muestre, además, que dicho valor esperado se puede obtener, de forma alternativa, así:

$$\langle N \rangle_\rho = \frac{1}{\beta Z}\frac{\partial Z}{\partial \mu} \tag{11}$$

(c) Considere ahora un sistema fermiónico descrito por relaciones de anti-conmutación

$$\{a_i, a_j\} = 0, \quad \{a_i^\dagger, a_j^\dagger\} = 0, \quad \{a_i, a_j^\dagger\} = \delta_{ij},$$

donde ahora los índices i, j toman valores desde 1 hasta K: $1 \leq i, j \leq K$. ¿Qué dimensión tiene el espacio de Fock ahora? Exhiba una base pare este espacio.

(d) Calcule $Z = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta(H-\mu N)}$ y, haciendo uso de (11), obtenga $\langle N \rangle_\rho$, donde, nuevamente, $\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta(H-\mu N)}$. Comente su resultado.

Solución:

(a) Al tratarse de un solo grado de libertad, es fácil ver que el espacio de estados es de dimensión dos. De hecho, si $|0\rangle$ denota el estado de "vacío", definido por $a|0\rangle = 0$, entonces el vector $|1\rangle := a^\dagger|0\rangle$ es ortogonal a $|0\rangle$ que comlpeta una base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ para el espacio de estados.

(b) El estado $\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta(H-\mu N)}$ es un estado térmico, donde H debe ser interpretado como el operador Hamiltoniano. Este operador debe ser autoadjunto y debe actuar en el espacio generado por $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. La forma más general para dicho operador es, por lo tanto,

$$H = \epsilon a^\dagger a + \text{cte.},$$

Con ϵ una constante real. Sin pérdida de generalidad, tomaremos $H = \epsilon a^\dagger a$. Primero calculamos

$$\begin{aligned} Z &= \mathrm{Tr} e^{-\beta(H-\mu N)} = \langle 0|e^{-\beta(H-\mu N)}|0\rangle + \langle 1|e^{-\beta(H-\mu N)}|1\rangle \\ &= 1 + e^{-\beta(\epsilon-\mu)}. \end{aligned}$$

Así mismo, tenemos

$$\begin{aligned}
\langle N\rangle_\rho &= \mathrm{Tr}(\rho N) = \langle 0|a^\dagger a \frac{e^{-\beta(H-\mu N)}}{Z}|0\rangle + \langle 1|a^\dagger a \frac{e^{-\beta(H-\mu N)}}{Z}|1\rangle \\
&= 0 + \langle 0|\, a\, a^\dagger\, a\, \frac{e^{-\beta(\epsilon-\mu)a^\dagger a}}{Z}\, a^\dagger\, |0\rangle = \frac{e^{-\beta(\epsilon-\mu)}}{1+e^{-\beta(\epsilon-\mu)}} \\
&= \frac{1}{1+e^{\beta(\epsilon-\mu)}},
\end{aligned}$$

resultado que coincide con $\frac{1}{\beta Z}\frac{\partial Z}{\partial \mu}$.

(c) Para el caso de K grados de libertad fermiónicos, tenemos que la dimensión del espacio de Fock es 2^K. Una base ortogonal para este espacio está dada por vectores de la forma

$$|n_1, n_2, \ldots, n_K\rangle := (a_1^\dagger)^{n_1}(a_2^\dagger)^{n_2}\cdots(a_K^\dagger)^{n_K}|0\rangle, \tag{12}$$

donde $n_i = 0, 1$ para $i = 1, 2, \ldots, K$.

(d) Al igual que en (b), para calcular $Z = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta(H-\mu N)}$ hace falta conocer el operador Hamiltoniano. Para poder realizar el cálculo de forma explícita, asumiremos que se trata del Hamiltoniano de un sistema no interactuante, con un operador Hamiltoniano que sea diagonal en la base (12):

$$H = \sum_{i=1}^{K} \epsilon_j a_j^\dagger a_j.$$

En este caso, tenemos

$$(H-\mu N)|n_1, n_2, \ldots, n_K\rangle = \sum_{j=1}^{K}(\epsilon_j - \mu)n_j,$$

de donde se sigue fácilmente que $Z = \prod_{l=1}^{K}(1+e^{-\beta(\epsilon_l-\mu)})$ y, por lo tanto, que

$$\langle \mathcal{N}\rangle_\rho = \sum_l \frac{1}{1+e^{\beta(\epsilon_l-\mu)}}.$$

Al tratarse de un sistema no interactuante, el resultado es la suma de expresiones de la misma forma que en el numeral (b), es decir, la distribución de Fermi-Dirac.

PROBLEMA #1

Considere un gas monoatomico a una temperatura T y una presión P. Asuma que los atomos del gas se comportan como esferas duras de diametro d, y use como ecuación de estado la de un gas ideal. Calcule el camino medio libre λ de un atomo en este gas.

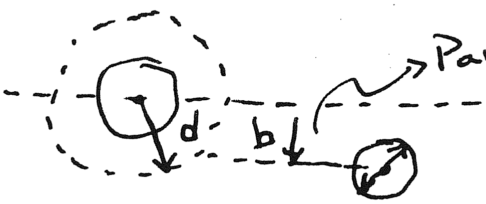
Solución

$\lambda = \langle v \rangle \tau$

$\langle v \rangle$: velocidad promedio de un atomo en el gas

τ : tiempo libre medio

$\sigma = \pi d^2 \leftarrow$ Seccion transversal total



Parametro de impacto $\rightarrow$ $b < d \Rightarrow$ colisión.

$\tau = ?$ $\qquad \rho$: densidad del gas. $\rightarrow P = \rho k T$

Numero de colisiones sufridas por un atomo durante un periodo Δt ?

$\rho \sigma \langle v_r \rangle \Delta t \leftarrow$ Volumen del cilindro cubierto por el atomo * (particulas/volumen)

$\hookrightarrow \langle v_r \rangle$: velocidad relativa entre atomos

$\Rightarrow \dfrac{\Delta t}{\tau}$: numero de colisiones sufridas por un atomo durante el periodo Δt

$$\Rightarrow \frac{\cancel{\Delta t}}{\tau} = \rho \sigma \langle v_r \rangle \cancel{\Delta t} \qquad \tau = \frac{1}{\rho \sigma \langle v_r \rangle} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\rho \sigma} \frac{\langle v \rangle}{\langle v_r \rangle}$$

$$\frac{\langle v \rangle}{\langle v_r \rangle} = ? \qquad \vec{v}_r = \vec{v} - \vec{v}' \qquad v_r^2 = \vec{v}_r \cdot \vec{v}_r = v^2 + v'^2 - 2(\vec{v} \cdot \vec{v}')$$

$$\langle v_r^2 \rangle = \langle v^2 \rangle + \langle v'^2 \rangle - 2 \langle \vec{v} \cdot \vec{v}' \rangle$$

$\langle \vec{v} \cdot \vec{v}' \rangle = 0 \quad \longleftarrow$ todos los angulos entre $\vec{v}$ y $\vec{v}'$ son igualmente probables

$\langle v'^2 \rangle = \langle v^2 \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle v_r^2 \rangle = 2 \langle v^2 \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle v_r \rangle = \sqrt{2} \langle v \rangle$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\langle v \rangle}{\langle v_r \rangle} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \qquad \lambda = \dfrac{1}{\sqrt{2}\, \rho \sigma}$

$\rho = \dfrac{P}{KT} \qquad \sigma = \pi d^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda = \dfrac{KT}{\sqrt{2}\, P \pi d^2}}$

PROBLEMA # 2

Considere un gas de moleculas diatomicas con momento dipolar electrico $\vec{p}$, con una densidad ρ y una temperatura T, sometido a un campo electrico $\vec{E}$. Calcule la polarización electrica por unidad de volumen P.

Solución: $U = -\vec{p}\cdot\vec{E} = -pE\cos\theta \qquad P = \frac{1}{V} N p \langle\cos\theta\rangle$

$\langle\cos\theta\rangle = ?$

$$\langle\cos\theta\rangle = \frac{\int \cos\theta \, e^{pE\cos\theta/KT} \, d\Omega}{\int e^{pE\cos\theta/KT} \, d\Omega}$$

$$\langle\cos\theta\rangle = \frac{\int_0^\pi e^{pE\cos\theta/KT} \cos\theta \, \mathrm{sen}\theta \, d\theta}{\int_0^\pi e^{pE\cos\theta/KT} \, \mathrm{sen}\theta \, d\theta}$$

$x = \cos\theta \qquad dx = -\mathrm{sen}\theta \, d\theta$

$$\langle\cos\theta\rangle = \frac{\int_{-1}^{1} x e^{ax} dx}{\int_{-1}^{1} e^{ax} dx} \qquad a \equiv pE/KT$$

$$\int_{-1}^{1} e^{ax} dx = \frac{1}{a}\left(e^{a} - e^{-a}\right) = \frac{2}{a}\,\mathrm{senh}\, a$$

$$\frac{d}{da}\int_{-1}^{1} e^{ax} dx = \int_{-1}^{1} x e^{ax} dx \implies \int_{-1}^{1} x e^{ax} dx = \frac{d}{da}\left(\frac{2}{a}\,\mathrm{senh}\, a\right)$$

$$\frac{\int_{-1}^{1} x e^{ax} dx}{\int_{-1}^{1} e^{ax} dx} = \frac{\frac{d}{da}\left(\frac{1}{a}\,\mathrm{senh}\, a\right)}{\frac{1}{a}\,\mathrm{senh}\, a} =$$

$$\frac{\frac{d}{da}\left(\frac{1}{a}\,\mathrm{senh}\,a\right)}{\frac{1}{a}\,\mathrm{senh}\,a} = \frac{1}{\frac{1}{\cancel{a}}\,\mathrm{senh}\,a}\left\{\frac{a\cosh a - \mathrm{senh}\,a}{a^{\cancel{2}}}\right\}$$

$$= \coth a - \frac{1}{a} \equiv L(a) \qquad a = pE/KT$$

$$\Rightarrow \quad P = \varrho\, p \left\{ \coth\left[\frac{pE}{KT}\right] - \frac{KT}{pE} \right\}$$

PROBLEMA #3

La energía promedio de un sistema en equilibrio termico es $\langle E\rangle$. Demuestre que la desviación estandar de esta energía es

$$\langle (E-\langle E\rangle)^2\rangle = \langle (\Delta E)^2\rangle = KT^2 C_v$$

Solución:

$$\langle (E-\langle E\rangle)^2\rangle = \langle (E^2 - 2E\langle E\rangle + \langle E\rangle^2)\rangle$$

$$= \langle E^2\rangle - 2\langle E\rangle^2 + \langle E\rangle^2$$

$$= \langle E^2\rangle - \langle E\rangle^2$$

$$\langle E\rangle = \frac{\sum_n E_n e^{-E_n\beta}}{\sum_n e^{-E_n\beta}} \; ; \quad \langle E^2\rangle = \frac{\sum_n E_n^2 e^{-\beta E_n}}{\sum_n e^{-\beta E_n}}$$

$$\frac{\partial\langle E\rangle}{\partial\beta} = \frac{-\sum_n E_n^2 e^{-\beta E_n} * \sum_n e^{-\beta E_n} + \sum_n E_n e^{-\beta E_n} * \sum_n E_n e^{-\beta E_n}}{\left[\sum_n e^{-\beta E_n}\right]^2}$$

$$= -\frac{\sum_n E_n^2 e^{-\beta E_n}}{\sum_n e^{-\beta E_n}} + \frac{\left[\sum_n E_n e^{-\beta E_n}\right]^2}{\left[\sum_n e^{-\beta E_n}\right]^2}$$

$$= -\langle E^2\rangle + \langle E\rangle^2 = -(\langle E^2\rangle - \langle E\rangle^2) = -\langle(\Delta E)^2\rangle$$

$$\Rightarrow \langle(\Delta E)^2\rangle = -\frac{\partial\langle E\rangle}{\partial\beta} \qquad \frac{\partial}{\partial\beta} = -KT^2\frac{\partial}{\partial T}$$

$$\Rightarrow \langle(\Delta E)^2\rangle = KT^2\frac{\partial\langle E\rangle}{\partial T} = KT^2 C_v$$

PROBLEMA #4

Concidere un gas ideal fermionico no-relativista descrito por las ecuaciones:

$$\frac{PV}{KT} = \int_0^\infty \rho(\varepsilon) \ln(1+z e^{-\beta\varepsilon})\, d\varepsilon$$

$$N = \int_0^\infty \frac{\rho(\varepsilon)\, d\varepsilon}{z^{-1} e^{\beta\varepsilon}+1}$$

$\rho(\varepsilon)$: densidad de estados

$z = e^{\mu/KT}$

μ: potencial quimico

$\beta = 1/KT$

Demuestre que $PV = \frac{2}{3} U$

Solución

$$N = \int_0^\infty \frac{\rho(\varepsilon)\, d\varepsilon}{z^{-1} e^{\beta\varepsilon}+1} \longrightarrow U = \int_0^\infty \frac{\varepsilon\, \rho(\varepsilon)\, d\varepsilon}{z^{-1} e^{\beta\varepsilon}+1}$$

$\rho(\varepsilon) = G\varepsilon^{1/2} \longleftarrow$ No-relativista.

$$\frac{PV}{KT} = G \int_0^\infty \varepsilon^{1/2} \ln(1+z e^{-\beta\varepsilon})\, d\varepsilon$$

$$\int_0^\infty \varepsilon^{1/2} \ln(1+z e^{-\beta\varepsilon})\, d\varepsilon = \frac{2}{3} \varepsilon^{3/2} \ln(1+z e^{-\beta\varepsilon}) \Big|_0^\infty + \frac{2}{3}\beta \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2} z e^{-\beta\varepsilon}\, d\varepsilon}{1+z e^{-\beta\varepsilon}}$$

$$= \frac{2}{3}\beta \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2}\, d\varepsilon}{z^{-1} e^{\beta\varepsilon}+1} = \frac{2}{3}\beta \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2}\, \varepsilon\, d\varepsilon}{z^{-1} e^{\beta\varepsilon}+1}$$

$$\Rightarrow \frac{PV}{KT} = \frac{2}{3} \frac{1}{KT} G \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2}\, \varepsilon\, d\varepsilon}{z^{-1} e^{\beta\varepsilon}+1} \Rightarrow PV = \frac{2}{3} \int_0^\infty \frac{\varepsilon\, \rho(\varepsilon)\, d\varepsilon}{z^{-1} e^{\beta\varepsilon}+1}$$

$$\Rightarrow \boxed{PV = \frac{2}{3} U}$$

Solutions

1.

a.) $\vec{\nabla}^2 \Phi = -\rho/\varepsilon_0$; here 1-dim: $\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} = -\rho/\varepsilon_0$

$\rho < 0$ here

b.) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$; $\rho(x) \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot j = 0 \Rightarrow \frac{\partial j_x}{\partial x} = 0$

$\Rightarrow J = |j_x| = |\rho| v \Rightarrow |\rho| = J/v$

$\Rightarrow \frac{d^2\Phi}{dx^2} = J/\varepsilon v$

c.) $\frac{1}{2} m \vec{v}^2 - e\Phi = 0$

$\Rightarrow \vec{v}^2 = \frac{2e\Phi}{m}$, $v = \sqrt{\frac{2e\Phi}{2m}} =$

$= \left(\frac{2e\Phi}{m}\right)^{1/2}$, $e > 0$

$\Rightarrow \frac{d^2\Phi}{dx^2} = \frac{J}{\varepsilon_0}\left(\frac{m}{2e\Phi}\right)^{1/2}$

d.) $$\frac{d\Phi}{dx}\frac{d^2\Phi}{dx^2} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2$$

$$= \frac{J}{\varepsilon_0}\left(\frac{m}{2e}\right)^{1/2}\Phi^{-1/2}\frac{d\Phi}{dx}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2 = 2\frac{J}{\varepsilon_0}\left(\frac{m}{2e}\right)^{1/2}\Phi^{1/2}$$

$$\int dx\, \Phi^{-1/2}\frac{d\Phi}{dx} = \int d\Phi\, \Phi^{-1/2} = \boxed{\Phi^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \frac{d\Phi}{dx} = \sqrt{2J/\varepsilon_0}\left(\frac{m}{2e}\right)^{1/2}\Phi^{1/4}$$

e.) $$\Rightarrow \frac{d\Phi}{\Phi^{1/4}} = \left(2J/\varepsilon_0\right)^{1/2}\left(\frac{m}{2e}\right)^{1/4}dx$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\Phi^{3/4} = \left(\frac{2J}{\varepsilon_0}\right)^{1/2}\left(\frac{m}{2e}\right)^{1/4}x$$

$$\Rightarrow \Phi(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^{4/3}\left(\frac{2J}{\varepsilon_0}\right)^{2/3}\left(\frac{m}{2e}\right)^{1/3}x^{4/3}$$

$$\alpha = 4/3$$

$$\rho = \frac{J}{v} = J \left(\frac{2e}{m}\right)^{-1/2} \Phi^{-1/2}$$

$$\Rightarrow \rho \propto x^{-2/3}, \quad \beta = -2/3$$

$$E(x) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \propto x^{1/3}, \quad \gamma = 1/3$$

2.

a.) $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, $\vec{B} = B\hat{z}$

$$B_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k = \varepsilon_{ij2} \partial_j A^2$$

$$= \varepsilon_{ij2} \partial_j (Bx) = \varepsilon_{i12} \partial_1 (Bx)$$

$$\Rightarrow i = 3 \Rightarrow$$

$$\vec{B} = B\hat{z}$$

$$B_i = (\vec{\nabla} \times \vec{A})_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k =$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{kmn} B_m x_n =$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} \partial_j B_m x_n$$

$$= \frac{1}{2} \left(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm} \right) \partial_j B_m x_n$$

$$= \frac{1}{2} \left(B_i \partial_j x_j - \partial_j B_j x_i \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(3 B_i - B_j \delta_{ij} \right) = \frac{1}{2} \left(3B_i - B_i \right)$$

$$= B_i \checkmark$$

Both vector potentials are correct.

b.) $\vec{A}^{\ast} = \vec{A}' + \vec{\nabla} \Lambda$

$$\Lambda = \frac{xy}{2} B \,, \quad \vec{\nabla}\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{y}{2} B \\ \frac{x}{2} B \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_1' = -\frac{1}{2} By \,, \quad A_2' = \frac{1}{2} Bx \,, \quad A_3' = 0$$

$$\vec{A}' + \vec{\nabla}\Lambda = \begin{pmatrix} -1/2\, By \\ 1/2\, Bx \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{y}{2} B \\ \frac{x}{2} B \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ xB \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{A} \checkmark$$

3.

a.) $$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{E} \times \vec{B}\right)$$

$$= \frac{1}{\mu_0 c} \vec{E}_{rad} \times \left(\hat{r} \times \vec{E}_{rad}\right)$$

$$= \frac{1}{\mu_0 c}\left[\hat{r}\, \vec{E}^2_{rad} - \vec{E}_{rad}\left(\hat{r}\cdot\vec{E}_{rad}\right)\right]$$

$$\vec{E}_{rad} \propto \hat{r} \times \left(\hat{r} \times \mathring{\vec{v}}\right) = \hat{r}\left(\hat{r}\cdot\mathring{\vec{v}}\right) - \mathring{\vec{v}}$$

$$\Rightarrow \hat{r}\cdot\vec{E}_{rad} = \hat{r}\cdot\mathring{\vec{v}} - \hat{r}\cdot\mathring{\vec{v}} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{S} = \frac{1}{\mu_0 c}\hat{r}\, \vec{E}^2_{rad}$$

now $$\hat{r} \times \left(\hat{r} \times \mathring{\vec{v}}\right) = \hat{r} \times \left(\hat{r} \times \hat{y}\right)\mathring{v}$$

$$= -\left[\cos\theta \sin\varphi\, \hat{\theta} + \cos\varphi\, \hat{\varphi}\right]\mathring{v}$$

since

$$\mathring{\vec{v}} = \frac{\hat{y}\, q E_0}{m} e^{-c^2t^2/\ell^2} = \hat{y}\, \mathring{v}$$

$$c^4 = \mu_0^2 \varepsilon_0^2$$

$$\vec{E}_{rad}^2 = \frac{q^2 \dot{v}^2}{m^2} \frac{1}{16\pi^2} \frac{\mu_0^2}{r^2}$$

$$\vec{S} = S_r \hat{r} \qquad \Rightarrow$$

$$S_r = \frac{\mu_0 q^2 \dot{v}^2}{16\pi^2 r^2 c} \left[\cos^2\theta \sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right]$$

b.) $P = \int S_r r^2 \, d\Omega$

$$= \frac{\mu_0 q^2 \dot{v}^2}{16\pi^2 c} \int_{\pi}^{0} d\cos\theta \int_0^{2\pi} \left[\cos^2\theta \sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right] d\varphi$$

$$= \frac{\mu_0 q^2 \dot{v}^2}{16\pi^{\cancel{2}} c} \cancel{\pi} \underbrace{\int_{-1}^{1} d\cos\theta \, (1 + \cos^2\theta)}_{= 8/3}$$

$$= \frac{\mu_0 q^2 \dot{v}^2}{6\pi c}$$

d. $$u = \int_{-\infty}^{\infty} P\,dt = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{v}\,dt$$

$$= \frac{\mu_0 q^4 E_0^2}{6\pi c m^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2c^2t^2/\ell^2}\,dt$$

$$a = \sqrt{2}\, c/\ell$$

$$= \frac{\mu_0 q^2 E_0^2 \ell}{6\sqrt{2}\,\pi m^2 c^2}$$

4. $$A_\mu' = A_\mu + \partial_\mu \Lambda$$

a.) $$A_0' = 0 \Rightarrow -A_0 = \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\Lambda = -\int_0^t dt'\,A_0(\vec{r},t') + \Lambda'(\vec{r})}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\Lambda)$$

$$= \vec{\nabla}\cdot\vec{A} - \int_0^t dt'\,\vec{\nabla}^2 A_0(\vec{r},t') + \vec{\nabla}^2\Lambda'(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}^2\Lambda'(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \int_0^t dt'\,\vec{\nabla}^2 A_0(\vec{r},t')}$$

b.) $$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0,\quad \vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \Rightarrow$$ this gauge fixing is possible only in vacuum; $\rho = 0$

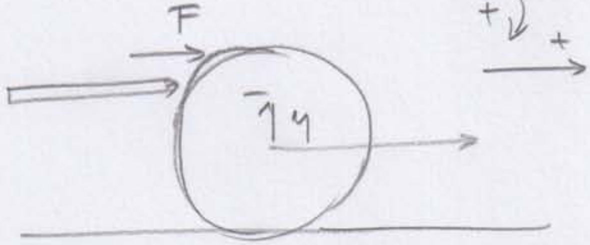
$$\Box\vec{A} = 0 \Rightarrow \boxed{k^2 = \omega^2};\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{k}\cdot\vec{\varepsilon} = 0}$$

EXAMEN DE CONOCIMIENTOS

MECÁNICA

SOLUCIÓN

1 a)



Durante el Impacto tenemos:

Rotación: $\quad yF = I\alpha \Rightarrow y\int_{\text{Impacto}} F(t)\,dt = I\,\Delta\omega$

Translación: $\quad F = Ma \Rightarrow \int_{\text{Impacto}} F(t)\,dt = M\,\Delta v$

Sean ω_0, v_0 las velocidades inmediatamente después del impacto

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} I\,\Delta\omega = I\omega_0 \\ M\,\Delta v = M v_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{I\omega_0}{y} = M v_0$$

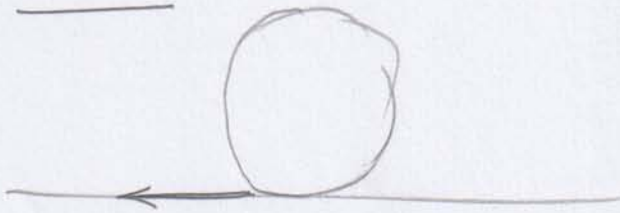
$$\Rightarrow R\,\omega_0 = \frac{5}{2}\left(\frac{y}{R}\right) v_0$$

Para rodamiento sin deslizamiento se requiere

$$R\omega_0 = v_0 \Rightarrow \boxed{\frac{y}{R} = \frac{2}{5}}$$

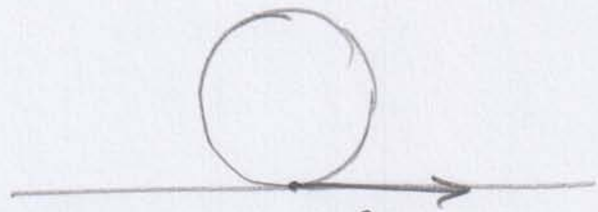
1b Cuando la bola entra en movimiento estará sujeta a fricción cinética a no ser que $R\omega = v$. Sea f_x la componente x de la fricción cinética. Tenemos entonces:

$\underline{\omega R < v}$



$$f_x = -\mu_c N$$

$\underline{\omega R > v}$



$$f_x = +\mu_c N$$

$$\begin{cases} R\mu_c M g = I\alpha \\ -\mu_c M g = M a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha(t) = +\frac{5}{2}\mu_c \frac{g}{R} \\ a(t) = -\mu_c g \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega(t) = \omega_0 + \frac{5}{2}\mu_c \frac{g}{R} t \\ v(t) = v_0 - \mu_c g t \end{cases}$$

$$\begin{cases} -R\mu_c M g = I\alpha \\ \mu_c M g = M a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha(t) = -\frac{5}{2}\mu_c \frac{g}{R} \\ a(t) = \mu_c g \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega(t) = \omega_0 - \frac{5}{2}\mu_c g t \\ v(t) = v_0 + \mu_c g t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R\omega_0(t) = \frac{5}{2}\left(\frac{g}{R}\right)\mu_c \mp \frac{5}{2}\mu_c g t \\ v(t) = v_0 \pm \mu_c g t \end{cases} \quad (t : \omega R > v$$

Rodamiento sin deslizamiento: se logra cuando $\omega R = v$:

$$\frac{5}{2}\left(\frac{y}{R}\right)v_0 \mp \frac{5}{2}\mu_c g t = v_0 \pm \mu_c g t$$

$$\Rightarrow \left[\frac{5}{2}\left(\frac{y}{R}\right) - 1\right]v_0 = \pm \frac{7}{2}\mu_c g t$$

$$\Rightarrow t = \pm \frac{5}{7}\left[\frac{y}{R} - \frac{2}{5}\right]\frac{v_0}{\mu_c g}$$

si $\frac{y}{R} > 0 \rightarrow$ signo $+$, $\frac{y}{R} < 0 \rightarrow$ signo $-$

$$\Rightarrow \boxed{t^* = \frac{5}{7}\left|\frac{y}{R} - \frac{2}{5}\right|\frac{v_0}{\mu_c g}}$$

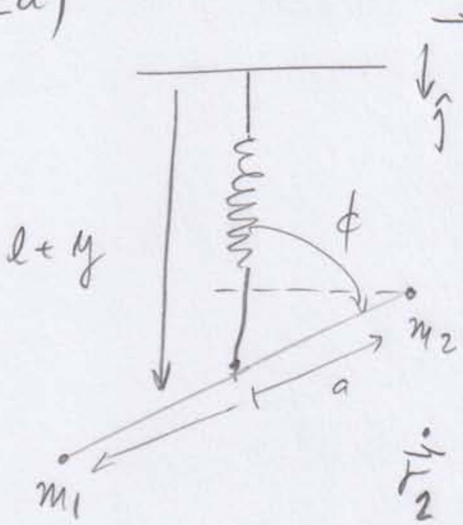
---

c) Para que la bola se devuelva se necesita que la velocidad en el tiempo t^* sea negativa, por lo que debemos tomar la solución con signo $(-)$:

$$v(t^*) = v_0 - \mu_c g\left[\frac{5}{2}\left(\frac{2}{5} - \frac{y}{R}\right)\right]\frac{v_0}{\mu_c g} < 0$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{5}{2}\left(\frac{2}{5} - \frac{y}{R}\right) < 0 \Rightarrow \boxed{\frac{y}{R} < 0}$$

2a)



$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r}_2 = a\sin\phi\,\hat{i} + \left[(l+y) - a\cos\phi\right]\hat{j} \\ \vec{r}_1 = -a\sin\phi\,\hat{i} + \left[(l+y) + a\cos\phi\right]\hat{j} \end{array} \right.$$

$$\downarrow$$

$$\dot{\vec{r}}_2 = \dot{y}\,\hat{j} + a(\cos\phi\,\hat{i} + \sin\phi\,\hat{j})\,\dot{\phi}$$
$$\dot{\vec{r}}_1 = \dot{y}\,\hat{j} - a(\cos\phi\,\hat{i} + \sin\phi\,\hat{j})\,\dot{\phi}$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}(m_1\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + m_2\dot{\vec{r}}_2^{\,2}) = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{y}^2 + \frac{1}{2}(m_1+m_2)a^2\dot{\phi}^2$$
$$+ (m_2 - m_1)a\dot{\phi}\dot{y}\sin\phi$$

$$V = \frac{1}{2}ky^2 - m_1 g y_1 - m_1 g y_2$$
$$= \frac{1}{2}ky^2 - (m_1+m_2)gy + (m_2-m_1)ga\cos\phi$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} L = T - V = \\ \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{y}^2 + \frac{1}{2}(m_1+m_2)a^2\dot{\phi}^2 + (m_2-m_1)a\dot{\phi}\dot{y}\sin\phi \\ \quad - \frac{1}{2}ky^2 + (m_1+m_2)gy - (m_2-m_1)ga\cos\phi \end{array}}$$

2b)

y: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\left[(m_1+m_2)\dot{y} + (m_2-m_1) a \dot{\phi} \sin\phi \right] = -ky + (m_1+m_2) g}$$

ϕ: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\left[(m_1+m_2) a^2 \dot{\phi} + (m_2-m_1) a \dot{y} \sin\phi \right] = (m_2-m_1)\left[a\dot{\phi}\dot{y}\cos\phi + ga\sin\phi \right]}$$

2c) La configuración de equilibrio estable se da cuando

$$\left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_* = 0 \quad y \quad \left.\frac{\partial V}{\partial \phi}\right|_* = 0 \qquad y \qquad H|_* > 0 \quad \text{donde } H_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}$$

De la primera condición:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 0 \Rightarrow \quad + k y^* - (m_1+m_2) g \Rightarrow \boxed{y^* = (m_1+m_2)\frac{g}{k}}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \quad (m_2 - m_1) ga \sin\phi = 0 \qquad \boxed{\phi^* = 0, \pi}$$

Para la segunda:

Para la segunda:

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_* = k \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial \phi} = 0 \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = -(m_2 - m_1) g a \cos\phi^*$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} > 0 \quad \text{cuando} \quad \phi^* = \pi$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} y^* = \dfrac{(m_1 + m_2) g}{k} \\ \phi^* = \pi \end{cases}}$$

$\Rightarrow$ Sea $\delta y = y - \frac{m_1 + m_2 g}{k}$, $\delta\phi = \phi - \pi$

$\Rightarrow$ Expandemos L a orden cuadrático en los δ's:

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,\delta\dot{y}^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2) a^2 \delta\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} k\,\delta y^2 - (m_2 - m_1) g a \delta\phi^2 + \text{const}$$

$\Rightarrow$ dando lugar a las ec's de movimiento:

$$\delta\ddot{y} = -\frac{k}{m_1 + m_2}\,\delta y \quad \Rightarrow$$

$$\delta\ddot{\phi} = -\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\left(\frac{g}{a}\right)\delta\phi \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_y &= \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \\ \omega_\phi &= \sqrt{\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}}\sqrt{\frac{g}{a}} \end{aligned}}$$

3.

a)
$$L_1 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - \frac{qB}{c} y\dot{x}$$
$$L_2 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + \frac{qB}{c} x\dot{y}$$

de L_1:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_1}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L_1}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(m\dot{x} - \frac{qB}{c}y\right) = 0 \quad (i)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{y}) + \frac{qB}{c}\dot{x} = 0 \quad (ii)$$

de L_2:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_2}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L_2}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{x}) - \frac{qB}{c}\dot{y} = 0 \quad (iii)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(m\dot{y} + \frac{qB}{c}x\right) = 0. \quad (iv)$$

$\boxed{(i) = (iii)}$, $\boxed{ii = iv}$

b) • de (1) $p_x^{(1)} = m\dot{x} - \frac{qB}{c}y = \text{const}$ (invarianza transl. x)

•• de (2) $p_y^{(2)} = m\dot{y} + \frac{qB}{c}x = \text{const}$ (invarianz. transl. y)

••• $\frac{\partial L_1}{\partial t} = \frac{\partial L_2}{\partial t} = 0 \Rightarrow h = \dot{x}p_x^{(1)} + \dot{y}p_y^{(1)} - L = \text{const}$

$$\Rightarrow \boxed{h = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) = \text{cnt}}$$

(Energía)

tenemos:

$$K_1 = m\dot{x} - \frac{qB}{c}y \Rightarrow m\dot{x} = \frac{qB}{c}\left(y + \frac{c}{qB}K_1\right)$$

$$K_2 = m\dot{y} + \frac{qB}{c}x \Rightarrow m\dot{y} = -\frac{qB}{c}\left(x - \frac{c}{qB}K_2\right)$$

Defina:

$$\vec{r} = \left(x - \frac{c}{qB}K_2\right)\hat{i} + \left(y + \frac{c}{qB}K_1\right)\hat{j}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}} = \dot{x}\,\hat{i} + \dot{y}\,\hat{j}$$

$$= \frac{qB}{mc}\left[\left(y + \frac{c}{qB}K_1\right)\hat{i} - \left(x - \frac{c}{qB}K_2\right)\hat{j}\right]$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}} = \left(\frac{qB}{mc}\right)^2\left[-\left(x - \frac{c}{qB}K_2\right)\hat{i} - \left(y + \frac{c}{qB}K_1\right)\hat{j}\right]$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}} = -\left(\frac{qB}{mc}\right)^2\vec{r}$$ $\Rightarrow$ Ecuación de movimiento circular uniforme, con

$$\boxed{\omega = \frac{qB}{mc}}$$

Centro del círculo: $\boxed{X_0 = \frac{c}{qB}K_2,\quad Y_0 = -\frac{c}{qB}K_1}$

Radio: $E = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}\omega^2|\vec{r}|^2$

$$\Rightarrow \boxed{|\vec{r}|^2 = \frac{2E}{m\omega^2}}$$ $E \equiv$ Energía $(= h)$

4

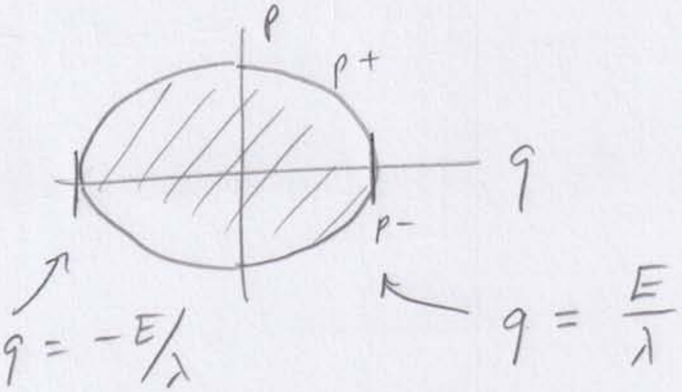
Tenemos:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \lambda |q|$$

y por definición:

$$I(E) = \frac{1}{2\pi} \oint_{C(E)} p\, dq$$

donde $C(E)$ es la curva en el espacio de fase con $H = E$.



$$p^{+}(q) = \sqrt{2m(E - V(q))}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{\pi} \int_{-E/\lambda}^{E/\lambda} \sqrt{2m(E - \lambda|q|)}\, dq$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{E/\lambda} \sqrt{2m(E - \lambda|q|)}\, dq$$

$$I(E) = \frac{2}{\pi\lambda}\sqrt{2mE}\;E\int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx$$

$$\Rightarrow I = \frac{4}{3\pi\lambda}(2m)^{1/2}E^{3/2} \qquad H = E(I)$$

$$\Rightarrow \boxed{H = \frac{1}{(2m)^{1/3}}\left(\frac{4}{3\pi\lambda}\right)^{2/3} I^{2/3}}$$

$$\omega(I) = \frac{\partial H}{\partial I} = \frac{1}{(2m)^{1/3}}\left(\frac{4}{3\pi\lambda}\right)^{2/3}\frac{2}{3}\,I^{-1/3}$$

$$= \frac{1}{(2m)^{1/3}}\left(\frac{4}{3\pi\lambda}\right)^{2/3}\frac{2}{3}\left(\frac{4}{3\pi\lambda}(2m)^{1/2}E^{3/2}\right)^{-1/3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega(E) = \frac{8}{9\pi\lambda\sqrt{2mE}}}$$