Universidad de Los Andes
Departamento de Física

Examen de Conocimientos 2014-I

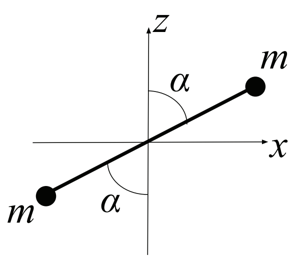
Mecánica

---

1. (20 puntos) Un observador rota junto con un disco con velocidad angular Ω constante, mientras observa a un insecto de masa m que camina sobre el disco radialmente hacia afuera con velocidad constante v_0. Cuando el insecto está a una distancia r del centro, calcule el vector de fuerza real $\vec{F}$ que actúa sobre el insecto en la dirección del plano del disco.

---

2. Una vara liviana de longitud $2l$ conecta un sistema con dos partículas de igual masa.



a) (10 puntos) Por inspección halle los ejes principales y calcule el las componentes $\tilde{I}_{ij}$ del tensor de inercia con respecto a este sistema de referencia.

b) (10 puntos) Encuentre el tensor de inercia en el marco de referencia definido en la figura y a partir de este los vectores unitarios de los ejes principales.

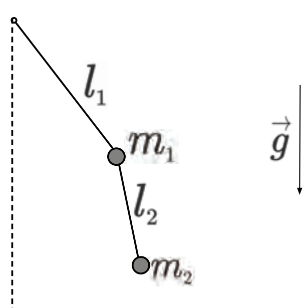
---

3. El doble péndulo de la figura oscila en el plano vertical.

a) (10 puntos) Escriba la función lagrangiana del sistema.

b) (10 puntos) Obtenga las ecuaciones de movimiento.

c) (10 puntos) Para el caso $l_1 = l_2 = l$, $m_1 = m_2 = m$ y oscilaciones pequeñas, encuentre las frecuencias de los modos normales de oscilación.



---

4. Considere una partícula de masa m con el siguiente lagrangiano descrito en coordenadas cilíndricas:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - V(\rho, a\phi + z), \tag{1}$$

donde a es una constante con unidades de longitud y V es un potencial que depende de las coordenadas tal como está escrito.

a) (20 puntos) Encuentre dos cantidades conservadas para este modelo

b) (10 puntos) Muestre explícitamente que la cantidad asociada a la simetría del potencial obtenida en el punto anterior es efectivamente una cantidad conservada.

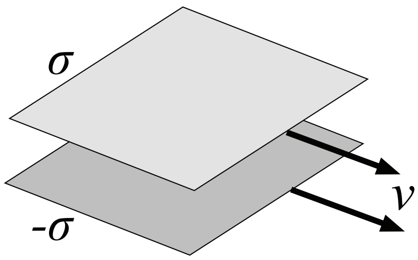
Universidad de Los Andes
Departamento de Física

Examen de Conocimientos 2014-I

Electromagnetismo

---

1. (20 puntos) Un condensador de placas paralelas que tiene carga superficial σ sobre la placa superior y $-\sigma$ sobre la placa inferior se mueve con una velocidad constante v con respecto al sistema de referencia del laboratorio como indica la figura. Suponga que la dinámica de este sistema es no-relativista y trabaje en el Sistema Internacional de Medidas.



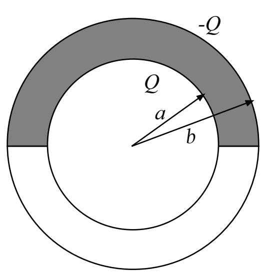
a) Encuentre los campos magnético y eléctrico en todo el espacio.

b) Encuentre la magnitud y dirección de las fuerzas magnética y eléctrica por unidad de área sobre la placa superior.

c) ¿ Para qué velocidad v la fuerza magnética es igual a la fuerza eléctrica en el caso anterior?

---

2. (20 puntos) Una esfera conductora de radio a está rodeada por un cascarón conductor de radio b, con cargas $+Q$ y $-Q$ respectivamente. El espacio entre las esferas está vació en el hemisferio inferior y está lleno con un material con permitividad ε en el hemisferio superior.



a) Halle el campo eléctrico en todo punto entre la esfera y el caparazón.

b) Calcule la distribución de carga superficial sobre la esfera interior.

c) Calcule la densidad de carga de polarización inducida sobre la superficie del dieléctrico en $r = a$.

---

3. (30 puntos) La potencia emitida por una partícula con carga q es:

$$P = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} q^2 a^2, \tag{1}$$

donde a es la aceleración de la partícula en el caso no relativista. Esta ecuación es conocida como la fórmula de Larmor.

a) ¿Cuál es la potencia emitida por una partícula que se mueve con velocidad v en un campo magnético B que es perpendicular a la velocidad? La respuesta debe estar expresada en términos de m, q, v, B y constantes fundamentales.

b) En el caso relativista, esta fórmula se modifica así:

$$P_{rel} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} q^2 a^2 \gamma^4 \tag{2}$$

y la ecuación de movimiento relativista es

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \vec{v}) = \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B}. \tag{3}$$

Para la situación de la parte (a), exprese la potencia en el caso relativista como la potencia en el caso clásico multiplicada por un factor que solamente depende de γ.

c) Usando los resultados anteriores encuentre el tiempo característico para que una partícula relativista pierda toda su energía por radiación mostrando explícitamente la dependencia con $\beta = v/c$. Prepare una gráfica esquemática mostrando la dependencia de este tiempo característico con β.

---

4. (30 puntos) Cuando una onda plana electromagnética incide perpendicularmente sobre un espejo (plano conductor) en reposo, el coeficiente de reflexión (el cociente entre el flujo de energia reflejada sobre el flujo de energía incidente) es igual a 1. ¿Cuánto vale el coeficiente de reflexión si el espejo se mueve con una velocidad v en la dirección de propagación de la onda incidente?

Polinomios de Legendre:

$$\begin{aligned}
P_n(-x) &= (-1)^n P_n(x) \\
\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x)\, dx &= \frac{2}{2n+1} \delta_{mn} \\
\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}P_n(x)\right] + n(n+1)P_n(x) &= 0 \\
(n+1)P_{n+1}(x) &= (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \\
P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right] \\
(2n+1)P_n(x) &= \frac{d}{dx}\left[P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)\right] \\
(x^2-1)\frac{d}{dx}(x^2-1)^n &= 2nx(x^2-1)^n
\end{aligned}$$

En coordenadas esféricas (r, θ, φ):

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \tan\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Universidad de Los Andes
Departamento de Física

Examen de Conocimientos 2014-I

Mecánica Cuántica

---

1. (20 puntos) Considere un oscilador armónico cuántico con hamiltoniano no perturbado

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

y estados propios $|n\rangle$ con valores propios de la energía $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$. Si se agrega un hamiltoniano de perturbación

$$H_1 = \epsilon x \, ,$$

encuentre los niveles energéticos del hamiltoniano total $H = H_0 + H_1$ a segundo órden en ϵ.

---

2. (20 puntos) Considere inicialmente un sistema de dos electrones, efectivamente confinados a una dimensión por un potencial de partícula en la caja

$$V(x) = \begin{cases} 0\, , & |x| < L/2 \\ \infty & |x| \geq L/2 \end{cases} .$$

a) Para los dos primeros niveles de energía, construya todos los estados propios simultáneos de energía y espín total, e indique cuáles son los valores propios correspondientes.

b) Suponga que se introduce un campo magnético constante B en la dirección z, de tal forma que el hamiltoniano de interacción es

$$H_{mag} = \frac{g_e \mu_B}{\hbar}(S_{1,z} + S_{2,z})B \, ,$$

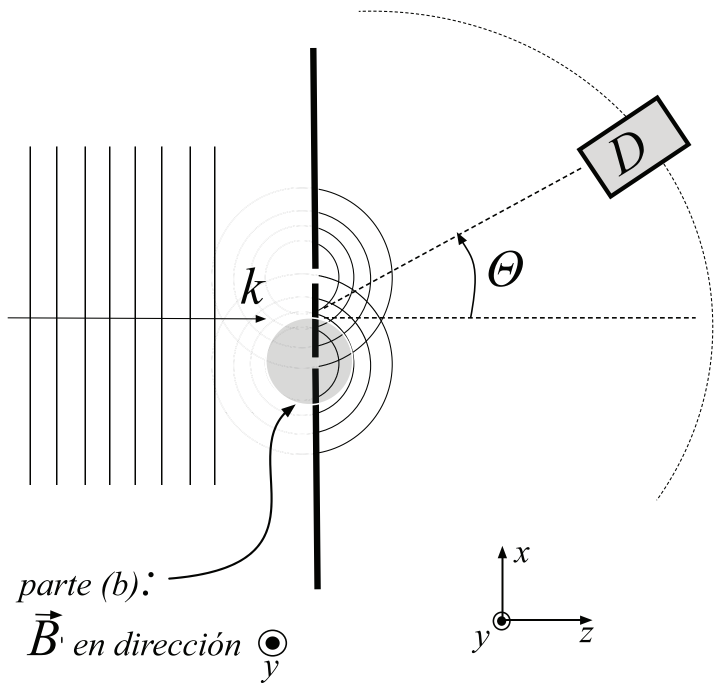
donde g_e es el factor de Landé del electrón y μ_B el magnetón de Bohr. Suponiendo que el sistema siempre está en el estado fundamental, encuentre la energía del sistema en función del campo magnético.

---

3. (30 puntos) Considere la situacón ilustarda en la figura: Un haz monoenergético de neutrones avanzando a lo largo del eje z se hace pasar por una doble rendija, con rendijas de ancho despreciable y separadas por una distancia a, para luego incidir sobre un detector distante colocado a radio constante y a un ángulo θ con respecto a la dirección de incidencia. Suponga que los neutrones del haz incidente están descritos por el estado cuántico

$$|\psi_i\rangle = |k\rangle \otimes |+\rangle_z \, ,$$

donde $|k\rangle$ describe una onda plana con número de onda k y dirección de propagacíon en z, y $|+\rangle_z$ el espín del neutrón en la dirección z con valor propio $+\hbar/2$.



a) Suponiendo que cuando se tapa una de las rendijas, el detector registra I_0 conteos por segundo independientemente del ángulo θ, encuentre una expresión para la función $I(\theta)$ que decribe el número de conteos por segundo del detector cuando están abiertas las dos rendijas, en términos de I_0, k, a y θ.

b) Suponga ahora que en la rendija inferior existe un campo magnético, el cual rota el espín del neutrón alrededor del eje y por un ángulo ϕ en la dirección contraria a las agujas del reloj. Explique cómo se comporta ahora la función $I(\theta)$ al ir variando el ángulo ϕ y sustente su explicación (sería útil responder las siguientes preguntas: ¿Cuál es la periodicidad en ϕ del patrón de interferencia?, ¿Se dá un patrón de interferencia para todos los valores de ϕ?)

---

4. (30 puntos) La configuración electrónica excitada $(1s)^1(2s)^1$ del átomo de Helio (es decir, con un electrón en el estado $1s$ y un electrón en el estado $2s$) puede existir en estados de espín total singlete (para-helio) o triplete (orto-helio). Si $\psi_{1s}(\vec{r})$ y $\psi_{2s}(\vec{r})$ son respectivamente las funciones de onda de los estados propios de energía $(1s)$ y $(2s)$ de un electrón en un átomo de Hidrógeno, encuentre una expresión para la diferencia de energía entre los estados para- y orto- de la configuración $(1s)^1(2s)^1$ en términos de ψ_{1s} y ψ_{2s} y básandose en esta expresión argumente cuál estado tiene menor energía. Use teoría de perturbaciones.

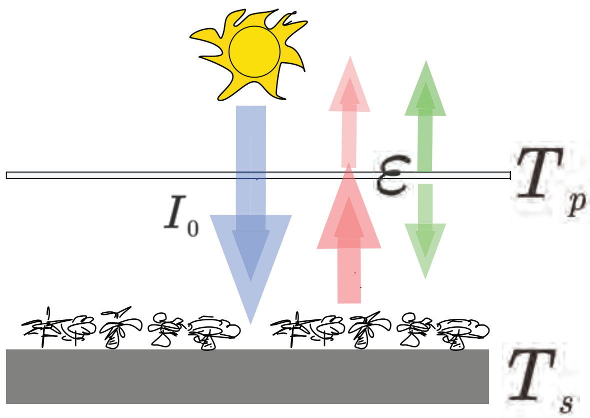
Universidad de Los Andes
Departamento de Física

Examen de Conocimientos 2014-I

Física Térmica

---

1. (20 puntos) Un invernadero tiene un techo de plástico, el cual es transparente a la luz visible pero que para radiación infrarroja tiene un coeficiente de absorción ϵ ($I_{abs} = \epsilon I_{inc}$ donde las intensidades están definidas como energía por unidad de tiempo por unidad de área). Suponga que sobre el invernadero incide normalmente luz solar exclusivamente en el rango visible con intensidad I_0, y que la luz es reemitida por el suelo en el rango infrarrojo. Si el suelo y el plástico están en equilibrio térmico a temperaturas T_s y T_p respectivamente, encuentre expresiones para T_s y T_p en función de I_0, ϵ y la constante de Stefan-Boltzmann σ.



---

2. (20 puntos) Considere un sistema de N partículas de espín-1/2 distinguibles, en presencia de un campo magnético externo B en la dirección z, de tal forma que el hamiltoniano del sistema es

$$H = -\frac{g\mu_B}{\hbar}\left(\sum_{i=1}^{N} S_{i,z}\right) B\,,$$

donde g es el factor de Landé y μ_B el magnetón de Bohr. Si el sistema se encuentra en equilibrio termodinámico a una temperatura T, encuentre una expresión para la magnetización del sistema como función de la temperatura y el campo magnético.

---

3. (30 puntos) Considere un gas de N partículas monoatómicas indistinguibles no interactuantes en un recipiente de volumen V y con energía total E. Deduzca la función de entropía $S(E, V, N)$ del gas usando el ensemble *microcanónico* en el límute semi-clásico.

---

4. (30 puntos) Definimos el índice politrópico para una sustancia termodinámica como el exponente γ que aparece en la relación entre la presión y la densidad

$$P = K\rho^{\gamma}\,,$$

donde K es un factor que generalmente depende de la temperatura. Determine el índice politrópico para un gas de fermiones a temperatura cero, en el límite no-relativista ($E = \frac{p^2}{2m}$) y en el límite ultra-relativista ($E = pc$). Para fermiones relativistas, con energía $E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$, indique que condición que debe satisfacer la densidad para que uno u otro de los anteriores resultados sea aplicable.

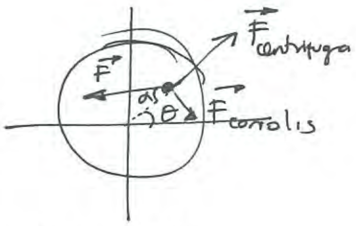
Volumen de una esfera de radio R en n dimensiones $= \frac{\pi^{n/2}}{\left(\frac{n}{2}\right)!}R^n$

Fórmula de Stirling : $\log n! \simeq n \log n - n$

M-1

En el marco de referencia en rotación la fuerza aparente sobre la masa es:

$$\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_{ficticia}$$



$$\vec{F}_{ficticia} = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}_{rot} - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$$

aquí $\vec{r} = r\hat{r}$

$\vec{v}_{rot} = v_0 \hat{r}$ $\quad \vec{\Omega} = \Omega \hat{k}$

$$\vec{F}_{coriolis} = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}_{rot} = -2m\Omega v_0 \hat{\theta}$$

$$\vec{F}_{centrífuga} = -m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = m\Omega^2 r \hat{r}$$

En este marco en rotación, con velocidad v_0 constante, el insecto está en equilibrio:

$r: \; F_{centrífuga} - F\cos\alpha = 0$

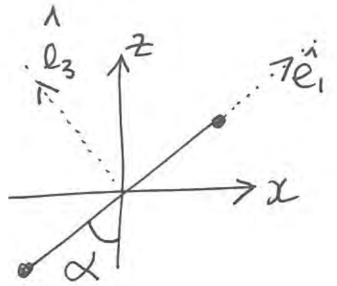
$\theta: \; F \operatorname{sen}\alpha - F_{coriolis} = 0$

$\therefore \boxed{\tan\alpha = \dfrac{2v_0}{\Omega r}}$

$\therefore \boxed{F = m\Omega\sqrt{\Omega^2 r^2 + 4v_0^2}}$

M-2

(a)



$$I_1 = 0$$

$$I_2 = I_3 = m\ell^2 + m\ell^2 = 2m\ell^2$$

$$\tilde{I}_{123} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2m\ell^2 \end{pmatrix}$$

(b) Por inspección:

$$\tilde{I}_{xyz} = 2m\ell^2 \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & 0 & -\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha & 0 & \operatorname{sen}^2\alpha \end{pmatrix}$$

$$\tilde{I}_{xyz}\hat{e}_1 = I_1\hat{e}_1 \ ?$$

$$\rightarrow \quad 2m\ell^2 \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & 0 & -\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha & 0 & \operatorname{sen}^2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\alpha \\ 0 \\ \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{para } I = 0$$

$$= \underline{0 \cdot \hat{e}_1} \quad ✓$$

$$\tilde{I}_{xyz}\hat{e}_2 = I_2\hat{e}_2 \ ?$$

$$\rightarrow 2m\ell^2 \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & 0 & -\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha & 0 & \operatorname{sen}^2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2m\ell^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{2m\ell^2 \cdot \hat{e}_2} \quad \text{para } I_2 = 2m\ell^2 \ ✓$$

$$\tilde{I}_{xyz}\hat{e}_3 = I_3\hat{e}_3 \ ?$$

$$\rightarrow 2m\ell^2 \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & 0 & -\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha & 0 & \operatorname{sen}^2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos\alpha \\ 0 \\ \operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix}$$

$$= 2m\ell^2 \begin{pmatrix} -\cos^3\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha \\ 0 \\ \operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^3\alpha \end{pmatrix} = 2m\ell^2 \begin{pmatrix} -\cos\alpha \\ 0 \\ \operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix} \quad \text{para } I_3 = 2m\ell^2 \ ✓$$

$$= \underline{2m\ell^2\,\hat{e}_3}$$

M-3

(a) Podemos definir las siguientes coordenadas para cada una de las masas:

$$x_1 = l_1 \cos\theta_1 \qquad x_2 = x_1 + l_2 \cos\theta_2$$
$$y_1 = l_1 \operatorname{sen}\theta_1 \qquad y_2 = y_1 + l_2 \operatorname{sen}\theta_2$$

Así tenemos:

$$\dot{x}_1 = -l_1\dot\theta_1 \operatorname{sen}\theta_1 \qquad \dot{x}_2 = -l_1\dot\theta_1 \operatorname{sen}\theta_1 - l_2\dot\theta_2 \operatorname{sen}\theta_2$$
$$\dot{y}_1 = l_1\dot\theta_1 \cos\theta_1 \qquad \dot{y}_2 = l_1\dot\theta_1\cos\theta_1 + l_2\dot\theta_2\cos\theta_2$$

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$
$$= \frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot\theta_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left[l_1^2\dot\theta_1^2 + l_2^2\dot\theta_2^2 + 2l_1l_2\dot\theta_1\dot\theta_2\cos(\theta_1-\theta_2)\right]$$

La energía potencial, tomando como referencia el plano a distancia l_1+l_2 por debajo del punto de suspensión es:

$$V = m_1 g(l_1 + l_2 - l_1\cos\theta_1) + m_2 g(l_1 + l_2 - (l_1\cos\theta + l_2\cos\theta_2))$$

Con esto el Lagrangiano es:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot\theta_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left[l_1^2\dot\theta_1^2 + l_2^2\dot\theta_2^2 + 2l_1l_2\dot\theta_1\dot\theta_2\cos(\theta_1-\theta_2)\right]$$
$$- m_1 g(l_1 + l_2 - l_1\cos\theta_1) - m_2 g\left[l_1 + l_2 - (l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2)\right]$$

(b) Las ecuaciones de Lagrange asociadas con θ_1 y θ_2 son:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta_1} = 0 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta_2} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta_1} = -m_2 l_1 l_2\dot\theta_1\dot\theta_2 \operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2) - m_1 g l_1\operatorname{sen}\theta_1 - m_2 g l_1 \operatorname{sen}\theta_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\theta_1} = m_1 l_1^2\dot\theta_1 + m_2 l_1^2\dot\theta_1 + m_2 l_1 l_2\dot\theta_2\cos(\theta_1-\theta_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta_2} = m_2 l_1 l_2\dot\theta_1\dot\theta_2\operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2) - m_2 g l_2\operatorname{sen}\theta_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\theta_2} = m_2 l_2^2\dot\theta_2 + m_2 l_1 l_2\dot\theta_1\cos(\theta_1-\theta_2)$$

De esta manera las ecuaciones de movimiento son:

$$(m_1+m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1-\theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2) = -(m_1+m_2) g l_1 \operatorname{sen}\theta_1$$

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1-\theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2) = -m_2 g l_2 \operatorname{sen}\theta_2$$

(c) Las ecuaciones se simplifican a:

$$2l\ddot{\theta}_1 + l\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) + l\dot{\theta}_2^2 \operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2) = -2g\operatorname{sen}\theta_1$$

$$l\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2) + l\ddot{\theta}_2 - l\dot{\theta}_1^2\operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2) = -g\operatorname{sen}\theta_2$$

y con $\operatorname{sen}\theta \simeq \theta$, $\cos\theta \simeq 1$ y despreciando términos $\dot{\theta}^2\theta$

$$2l\ddot{\theta}_1 + l\ddot{\theta}_2 = -2g\theta_1$$
$$l\ddot{\theta}_1 + l\ddot{\theta}_2 = -g\theta_2$$

Suponiendo $\theta_1 = A_1\cos\omega t$ $\quad \theta_2 = A_2\cos\omega t$

y reemplazando en las ecuaciones de movimiento

$$2(g - l\omega^2)A_1 - l\omega^2 A_2 = 0$$
$$-l\omega^2 A_1 + (g - l\omega^2)A_2 = 0,$$

matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 2(g-l\omega^2) & -l\omega^2 \\ -l\omega^2 & g-l\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad MA = 0$$

para que $A \neq 0$ la matriz M debe tener determinante nulo

$$2(g-l\omega^2)^2 - l^2\omega^4 = 0$$
$$2g^2 - 4gl\omega^2 + 2l^2\omega^4 - l^2\omega^4 = 0$$
$$l^2\omega^4 - 4lg\omega^2 + 2g^2 = 0 \quad \text{, resolviendo para } \omega^2$$
$$\omega^2 = \frac{(2 \pm \sqrt{2})g}{l}$$

$$\boxed{\omega_1^2 = \frac{(2+\sqrt{2})g}{l}} \qquad \boxed{\omega_2^2 = \frac{(2-\sqrt{2})g}{l}}$$

M-4

(a) Este modelo tiene una simetría helicoidal, la siguiente transformación deja al Lagrangiano invariante

$$\tilde{\rho} = \rho$$
$$\tilde{\phi} = \phi + \lambda$$
$$\tilde{z} = z - \lambda a$$

dado que : $a\tilde{\phi} + \tilde{z} = a\phi + a\lambda + z - \lambda a$
$= a\phi + z$

la cantidad conservada para esta simetría se puede encontrar usando el teorema de Noether.

$$\Lambda = \frac{\partial L}{\partial \dot\rho}\frac{\partial \tilde\rho}{\partial \lambda}\bigg|_{\lambda=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot\phi}\frac{\partial \tilde\phi}{\partial \lambda}\bigg|_{\lambda=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot z}\frac{\partial \tilde z}{\partial \lambda}\bigg|_{\lambda=0}$$
$$= 0 \qquad + \quad m\rho^2\dot\phi \quad + m\dot z(-a)$$
$$\Lambda = m\rho^2\dot\phi - ma\dot z$$

La otra cantidad conservada es la energía.

(b) Para mostrar explícitamente que Λ es una cantidad conservada podemos usar las ecuaciones de movimiento

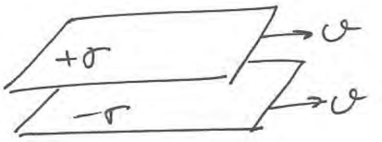
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\phi}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \qquad \frac{d}{dt}(m\rho^2\dot\phi) + \overbrace{a\frac{\partial V}{\partial z}}^{\frac{\partial V}{\partial \phi}} = 0$$
$$\frac{d}{dt}(m\rho^2\dot\phi) = -a\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot z}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \qquad \frac{d}{dt}(m\dot z) + \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$
$$\frac{d}{dt}(m\dot z) = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

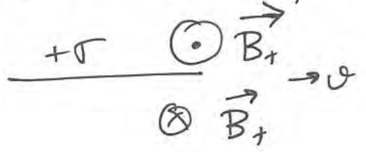
$$\dot\Lambda = \frac{d}{dt}(m\rho^2\dot\phi) - \frac{d}{dt}(ma\dot z) = \frac{d}{dt}(m\rho^2\dot\phi) - a\frac{d}{dt}(m\dot z)$$
$$= -a\frac{\partial V}{\partial z} + a\frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

EM-1

(a)

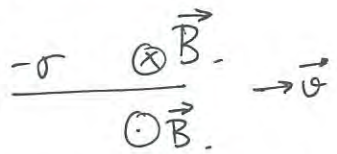


La placa superior produce campo B_+



$|\vec{B}_+| = \frac{\mu_0}{2}|\vec{K}|$ donde K es la densidad superficial de corriente

La placa inferior produce $|\vec{B}_-| = \frac{\mu_0}{2}|\vec{K}|$



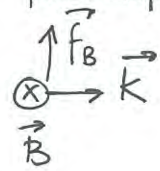
Entre las placas los campos se refuerzan: $|\vec{B}| = \mu_0|\vec{K}| = \mu_0 \sigma|\vec{v}|$
$= \mu_0 \sigma v$

Por fuera los campos se cancelan $|\vec{B}| = 0$

(b) $\vec{F}_B = \int \vec{K} \times \vec{B}\, da$, la fuerza por unidad de área es:

$\vec{f}_B = \vec{K} \times \vec{B}$ $\quad \vec{K} = \sigma \vec{v}$ $\quad |\vec{B}| = \frac{\mu_0 \sigma v}{2}$ $\quad |\vec{f}_B| = \frac{\mu_0}{2}\sigma^2 v^2$

Para la placa ~~inferior~~ superior.

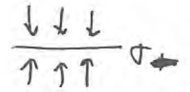


la fuerza va hacia arriba.

Para la placa inferior

la fuerza va hacia abajo.

(c) El campo que produce una placa es: $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$



para la placa inferior.

Así que la fuerza que siente la placa superior por este campo, va hacia abajo y tiene magnitud

$$|\vec{f}_E| = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

Para el balance $|\vec{f}_E| = |\vec{f}_B|$

$$\frac{\mu_0}{2}\sigma^2 v^2 = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \to v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c$$

EM-2

(a) El potencial es simétrico respecto al angulo azimutal ϕ.

Las condiciones de frontera son: continuidad de la normal de $\vec{D}$ y de la tangencial de $\vec{E}$.

Además se requiere que la carga total en $r=b$ es $-Q$, y en $r=a$ es $+Q$.

Para el hemisferio superior:

$$\Phi' = \sum_{\ell} [A_\ell r^\ell + B_\ell r^{-\ell-1}] P_\ell(\cos\theta)$$

Para el hemisferio inferior:

$$\Phi = \sum_{\ell} [C_\ell r^\ell + D_\ell r^{-\ell-1}] P_\ell(\cos\theta)$$

Al final:

$$\Phi = \frac{2Q}{1+\varepsilon} \cdot \frac{1}{b^2-a^2+ab}\left[-2(a+b)r + \frac{a^2b^2}{r^2}\right]\cos\theta$$

$$\Phi' = \frac{2Q\varepsilon}{1+\varepsilon} \frac{1}{b^2+ab-a^2}\left[-2(a+b)r + \frac{a^2b^2}{r^2}\right]\cos\theta$$

(b) La distribución de carga superficial en la superficie interior en el hemisferio inferior:

$$\sigma = \frac{Q}{\pi(1+\varepsilon)} \frac{1}{b^2+ab-a^2}\left[\frac{a^2+ab+b^2}{a}\right]\cos\theta$$

Con dieléctrico:

$$\sigma' = \frac{\varepsilon Q}{\pi(1+\varepsilon)} \frac{1}{b^2+ab-a^2}\left[\frac{a^2+ab+b^2}{a}\right]\cos\theta$$

(c) La densidad de carga de polarización inducida sobre la superficie del dieléctrico en $r=a$

$$\sigma' = \sigma + \sigma_{pol}$$

$$\therefore \sigma_{pol} = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\frac{Q}{\pi}\frac{1}{b^2+ab-a^2}\left[\frac{a^2+ab+b^2}{a}\right]\cos\theta$$

EM-3

(a) La ecuación de movimiento esta dada por:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\,(\vec{v} \times B)$$

Separando esto en componentes perpendiculares y paralelas al campo magnético:

$$m\frac{d\vec{v}_{\parallel}}{dt} = 0 \quad (1) \qquad m\frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} = q\,\vec{v}_{\perp} \times \vec{B} \quad (2)$$

En este caso $\vec{v}_{\parallel} = 0$

De (2) tenemos que la velocidad y la aceleración son ~~constantes~~ perpendiculares, con lo que $|v_{\perp}|$ debe ser constante y solo cambia su dirección.

Esto describe entonces un movimiento circular uniforme donde la aceleración es:

$$ma = qvB \qquad a = \frac{q}{m}vB$$

de esta manera.

$$P = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0 c^3} q^2 a^2 = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0 c^3} q^2 \left(\frac{q}{m}vB\right)^2 = \boxed{\frac{1}{6\pi\varepsilon_0 c^3} q^4 \frac{v^2 B^2}{m^2}}$$

(b) En el caso relativista

$$P_{rel} = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0 c^3} q^2 a^2 \gamma^4, \quad \text{con} \quad \frac{d}{dt}(\gamma m\vec{v}) = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\gamma m a = qvB, \quad a = \frac{q}{\gamma m}vB$$

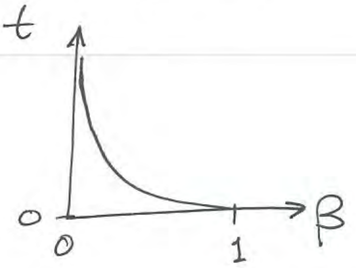
$$P_{rel} = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0 c^3} q^2 \gamma^4 \left(\frac{q}{\gamma m}\right)^2 (vB)^2 = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0 c^3} q^4 \frac{v^2 B^2}{m^2} \frac{\gamma^4}{\gamma^2} = \boxed{\gamma^2 P_{non\text{-}rel}}$$

(c) $$t_{caracteristico} = \frac{\text{Energia}}{\text{Potencia}} = \frac{\gamma m c^2}{\frac{1}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \frac{q^4 v^2 B^2}{m^2} \gamma^2}$$

$$= 6\pi\varepsilon_0 \frac{m^3 c^3}{q^4 B^2} \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{\gamma}$$

$$= \boxed{6\pi\varepsilon_0 \frac{m^3 c^3}{q^4 B^2} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta^2}}$$

Esquemáticamente



EXAMEN DOCTORAL DE FISICA → 2014-1

MECANICA CUANTICA → SOLUCION

PROBLEMA # 1

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 \qquad \hat{H}_1 = \epsilon\hat{x} \longrightarrow \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 + \epsilon\hat{x}$$

Metodo directo: completar cuadrado

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(\hat{x} + \frac{\epsilon}{m\omega^2}\right)^2 - \frac{\epsilon^2}{2m\omega}$$

$$\hat{x}' \equiv \hat{x} + \frac{\epsilon}{m\omega^2} \longrightarrow \hat{a}' = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x}' + i\frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,\hat{p}$$

$$\Rightarrow \hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}'^{\dagger}\hat{a}' + \frac{1}{2}\right) - \frac{\epsilon^2}{2m\omega^2} \longrightarrow \boxed{E_n = \hbar\omega(n + 1/2) - \frac{\epsilon^2}{2m\omega^2}}$$

Metodo perturbativo: $\Delta H_n = \epsilon\langle n|\hat{x}|n\rangle + \epsilon^2 \sum_{n\neq m} \frac{|\langle n|\hat{x}|n\rangle|^2}{E_n - E_m}$

$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$

$\hat{a}^{\dagger}|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$

$$\langle n|\hat{x}|n\rangle = 0 \quad (\langle n|\hat{a}^{\dagger}|n\rangle = 0\ ;\ \langle n|\hat{a}|n\rangle = 0) \longleftarrow \hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^{\dagger})$$

$$\langle m|\hat{x}|n\rangle \neq 0 \longrightarrow \begin{cases} m = n-1 \\ m = n+1 \end{cases}$$

$$\langle n|\hat{x}|n+1\rangle = \sqrt{n+1}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

$$\langle n|\hat{x}|n-1\rangle = \sqrt{n}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

$$\Delta H_n = \epsilon^2\frac{\hbar}{2m\omega}\left\{\frac{n}{\hbar\omega} - \frac{(n+1)}{\hbar\omega}\right\} = -\epsilon^2\frac{1}{2m\omega^2} \longrightarrow \boxed{E_n = \hbar\omega(n + 1/2) - \frac{\epsilon^2}{2m\omega^2}}$$

24/11/2013

PROBLEMA #2

$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| < L/2 \\ \infty & |x| \geq L/2 \end{cases}$$

Estados propios de energia de una particula son: $\{|n,\pm\rangle \,;\, n=1,2,3,\dots\} \rightarrow E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}n^2$

$\hat{S}_z|n,\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|n,\pm\rangle$

Las funciones de onda del sistema compuesto deben ser combinaciones completamente anti-simetricas

Estado base: $|n_1=1, n_2=1; S_{TOT}=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|1,+\rangle|1,-\rangle - |1,-\rangle|1,+\rangle\} \longleftarrow E_0 = \frac{\hbar^2\pi^2}{mL^2}$

Primer estado excitado: $n_1=1, n_2=2$ ó $n_1=2, n_2=1$

$$E_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} + \frac{4\hbar^2\pi^2}{2mL^2} = \frac{5\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$$

Singlete: $|1,2; S_{TOT}=0\rangle = \frac{1}{2}\{|1,+\rangle|2,-\rangle + |2,+\rangle|1,-\rangle - |1,-\rangle|2,+\rangle - |2,-\rangle|1,+\rangle\}$

Triplete:

$$|1,2; S_{TOT}=1, m=0\rangle = \frac{1}{2}\{|1,+\rangle|2,-\rangle - |2,+\rangle|1,-\rangle + |1,-\rangle|2,+\rangle - |2,-\rangle|1,+\rangle\}$$

$$|1,2; S_{TOT}=1, m=\pm 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|1,\pm\rangle|2,\pm\rangle - |2,\pm\rangle|1,\pm\rangle\}$$

(b) Con campo magnetico:

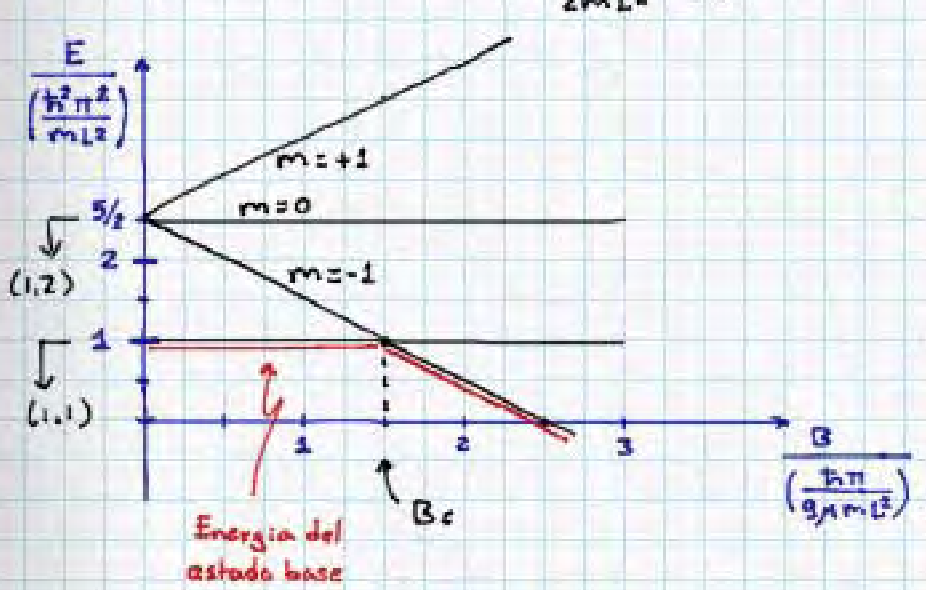
$|1,1; S_{TOT}=0, m=0\rangle \longrightarrow E = \frac{\hbar^2\pi^2}{mL^2}$ ← No se acopla al campo magnetico (m=0)

$|1,2; S_{TOT}=0, m=0\rangle \longrightarrow E = \frac{5\hbar^2\pi^2}{mL^2}$

$|1,2; S_{TOT}=1, m=+1\rangle \longrightarrow E = \frac{5\hbar^2\pi^2}{2mL^2} + g\mu\hbar B$

$|1,2; S_{TOT}=1, m=0\rangle \longrightarrow E = \frac{5\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$

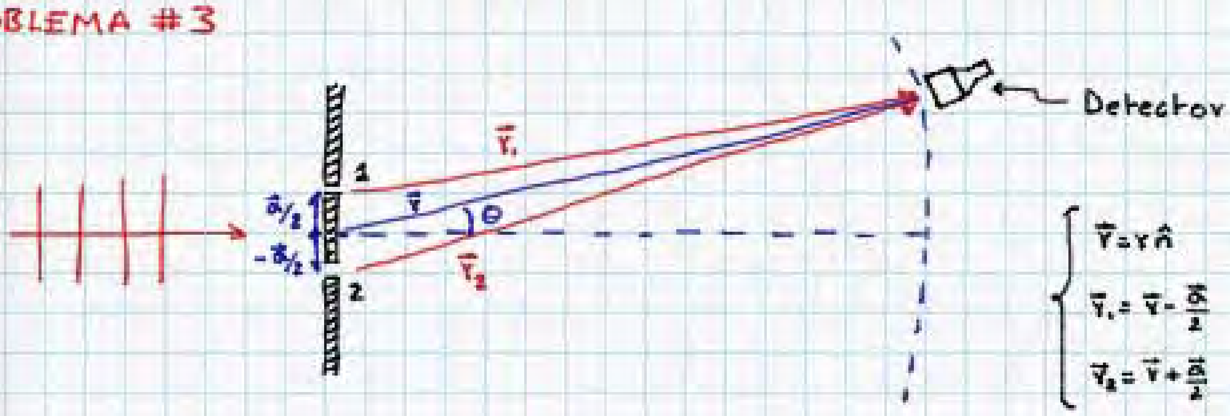
$|1,2; S_{TOT}=1, m=-1\rangle \longrightarrow E = \frac{5\hbar^2\pi^2}{2mL^2} - g\mu\hbar B$



$$E_0 = \begin{cases} \frac{\hbar^2\pi^2}{mL^2} & B < B_c \\ \frac{5}{2}\frac{\hbar^2\pi^2}{mL^2} - g\mu B & B > B_c \end{cases}$$

$$B_c = \frac{3}{2}\left(\frac{\hbar\pi}{g\mu mL^2}\right)$$

PROBLEMA #3



$$\begin{cases} \vec{r} = r\hat{n} \\ \vec{r}_1 = \vec{r} - \frac{\vec{a}}{2} \\ \vec{r}_2 = \vec{r} + \frac{\vec{a}}{2} \end{cases}$$

Despues de las rendijas: $|\Psi\rangle = |\phi_1\rangle|+\rangle_z + |\phi_2\rangle|+\rangle_z$ $\qquad \langle\vec{r}|\phi_1\rangle = \frac{C}{r_1}e^{ikr_1} \qquad \langle\vec{r}|\phi_2\rangle = \frac{C}{r_2}e^{ikr_2}$

Ondas esfericas

La probabilidad de detección en $\vec{r}$ es:

$$P(\vec{r}) = \langle\Psi|\vec{r}\rangle\langle\vec{r}|\Psi\rangle = |\phi_1(\vec{r}) + \phi_2(\vec{r})|^2 \simeq \frac{C^2}{r^2}\left|e^{ikr_1} + e^{ikr_2}\right|^2 = \frac{\text{Const.}}{r^2}\left(1 + \cos(k(r_1 - r_2))\right)$$

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{r^2 - \vec{r}\cdot\vec{a} + a^2/4} \simeq r\left[1 - \frac{\hat{n}\cdot\vec{a}}{r} + \frac{1}{4}\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \cdots\right]^{1/2} \simeq r\left[1 - \frac{\hat{n}\cdot\vec{a}}{2r} + \cdots\right] \\ r_2 &= \sqrt{r^2 + \vec{r}\cdot\vec{a} + a^2/4} \simeq r\left[1 + \frac{\hat{n}\cdot\vec{a}}{r} + \frac{1}{4}\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \cdots\right]^{1/2} \simeq r\left[1 + \frac{\hat{n}\cdot\vec{a}}{2r} + \cdots\right] \end{aligned}\right\} \quad r_1 - r_2 \simeq -\hat{n}\cdot\vec{a} = -a\,\text{Sen}\,\theta$$

$$P(r) = \text{Const.} * (1 + \text{Cos}(ka\,\text{Sen}\,\theta))$$

Si I_0 es la intensidad en el detector con una sola rendija $\Rightarrow$ $\boxed{I(\theta) = I_0(1 + \text{Cos}(ka\,\text{Sen}\,\theta))}$

dos rendijas.

(b) Si en la rendija 2 hay un campo magnetico $\Rightarrow$ al pasar tenemos

$$|\Psi\rangle = |\phi_1\rangle|+\rangle_z + |\phi_2\rangle|+\rangle_\phi$$

$$|+\rangle_\phi = \hat{U}_y(\phi)|+\rangle_z = e^{-i/\hbar\,\phi\hat{S}_y}|+\rangle_z = e^{-i/2\,\phi\hat{\sigma}_y}|+\rangle_z = [\cos(\phi/2)\hat{1} - i\hat{\sigma}_y\,\text{Sen}(\phi/2)]|+\rangle_z$$

$$|+\rangle_\phi = \cos(\phi/2)|+\rangle_z + \text{Sen}(\phi/2)|-\rangle_z$$

$$\Rightarrow |\Psi\rangle = \{|\phi_1\rangle + \cos(\phi/2)|\phi_2\rangle\}|+\rangle_z + \text{Sen}(\phi/2)|\phi_2\rangle|-\rangle_z$$

$$\begin{aligned} P(\vec{r}) = \langle\Psi|\vec{r}\rangle\langle\vec{r}|\Psi\rangle &= \{|\phi_1(\vec{r})|^2 + \cos^2(\phi/2)|\phi_2(\vec{r})|^2 + \langle\phi_1|\phi_2\rangle\cos(\phi/2) + \langle\phi_2|\phi_1\rangle\cos(\phi/2) + \text{Sen}^2(\phi/2)|\phi_2(\vec{r})|^2 \\ &= |\phi_1(\vec{r})|^2 + |\phi_2(\vec{r})|^2 + (\phi_1^*(\vec{r})\phi_2(\vec{r}) + \phi_2^*(\vec{r})\phi_1(\vec{r}))\cos(\phi/2) \\ &= \frac{C^2}{r^2}\left[1 + 1 + e^{ik(r_1 - r_2)}\cos(\phi/2) + e^{-ik(r_1 - r_2)}\cos(\phi/2)\right] \\ &= \frac{2C^2}{r^2}\left[1 + \cos(\phi/2)\cos(ka\,\text{Sen}\,\theta)\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{I(\theta) = I_0\left[1 + \cos(\phi/2)\cos(ka\,\text{Sen}\,\theta)\right]} \end{aligned}$$

8/01/2014

MECANICA CUANTICA

PROBLEMA #4

El Hamiltoniano del atomo de Helio es:

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}_1^2}{2m} + \frac{\hat{P}_2^2}{2m} - \frac{2e^2}{r_1} - \frac{2e^2}{r_2} + \frac{e^2}{r_{12}} \qquad \text{donde } r_{12} \equiv |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$$

La idea es tratar el último término como una perturbación. $\Rightarrow \hat{H} = \hat{H}_0 + \frac{e^2}{r_{12}}$

$\hat{H}_0$ es la suma de dos atomos de Hidrogeno, salvo que la carga es $+2$ y la masa es $m_{He} \sim 4M_H$

Vamos a despreciar la diferencia en masa reducida entre un atomo de Hidrogeno y un atomo de Helio

$$m \simeq m_e$$

Sin embargo debemos reescalar las coordenadas debido al cambio de carga electrica en el nucleo

$r_1 = \lambda r_1'$; $P_1 = \frac{P_1'}{\lambda}$ $\Rightarrow$

$$\hat{H} = \frac{1}{\lambda^2}\frac{P_1'^2}{2m} - \frac{z}{\lambda}\frac{e^2}{r_1'} + \frac{1}{\lambda^2}\frac{P_2'^2}{2m} - \frac{z}{\lambda}\frac{e^2}{r_2'} + \frac{e^2}{\lambda r_{12}'}$$

Escogiendo $\lambda = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\hat{H} = 4\{\mathcal{H}_{0,1}' + \mathcal{H}_{0,2}'\} + \frac{2e^2}{r_{12}'}$

Donde $\mathcal{H}_{0,1}'$ y $\mathcal{H}_{0,2}'$ Son los Hamiltonianos para un electron en un atomo de Hidrogeno

$H = \mathcal{H}_0 + V$

$\mathcal{H}_0 = 4(\mathcal{H}_{0,1}' + \mathcal{H}_{0,2}') \qquad V = \frac{2e^2}{r_{12}'}$

Las funciones propias del Hamiltoniano no perturbada son: $|n_1, n_2, S, m\rangle$

Los grados de libertad externos tienen funciones de onda: $\psi_{n_1}(\vec{r}_1')$

↳ Función propia del atomo de Hidrogeno

$$\mathcal{H}_0 |n_1 n_2, S, m\rangle = -4R\left(\frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_2^2}\right)|n_1, n_2, S, m\rangle$$

$n_1, n_2 : 1, 2, 3, \ldots$

R: Constante de Rydberg $= \frac{me^4}{2\hbar^2}$

En el caso del atomo de Helio en la configuración $(1s)^1(2s)^1$ tenemos:

<u>PARAHELIO</u>

$$|para\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|n_1 = 1s\rangle|n_2 = 2s\rangle + |n_2 = 1s\rangle|n_1 = 2s\rangle\}\,|s=0\rangle$$

↑ Antisimetrica.

$\hookrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\{|+;-\rangle - |-;+\rangle\} \leftarrow$ Singlete

<u>ORTOHELIO</u>

$m = -1, 0, 1 \leftarrow$ Triplete simetrico

$$|orto\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|n_1 = 1s\rangle|n_2 = 2s\rangle - |n_2 = 1s\rangle|n_1 = 2s\rangle\}\,|s=1, m\rangle$$

↑ Antisimetrico.

12/01/2014

A primer orden en perturbaciones tenemos:

$$\langle para|\hat{V}|para\rangle = \frac{2e^2}{2}\int\frac{d^3r_1'\,d^3r_2'}{|\vec{r}_1'-\vec{r}_2'|}\Big\{|\psi_{1s}(\vec{r}_1')|^2|\psi_{2s}(\vec{r}_2')|^2+|\psi_{2s}(\vec{r}_1')|^2|\psi_{1s}(\vec{r}_2')|^2+$$
$$\psi_{1s}(\vec{r}_1')\psi_{2s}^*(\vec{r}_1')\psi_{2s}(\vec{r}_2')\psi_{1s}^*(\vec{r}_2')+\psi_{2s}(\vec{r}_1')\psi_{1s}^*(\vec{r}_1')\psi_{1s}(\vec{r}_2')\psi_{2s}^*(\vec{r}_2')\Big]$$

$$= 2e^2\int\frac{d^3r_1'\,d^3r_2'}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}\Big\{|\psi_{1s}(\vec{r}_1')|^2|\psi_{2s}(\vec{r}_2')|^2+\mathbb{R}e\left(\psi_{1s}(\vec{r}_1')\psi_{2s}^*(\vec{r}_1')\psi_{2s}(\vec{r}_2')\psi_{1s}^*(\vec{r}_2')\right)\Big\}$$

Similarmente:

$$\langle orto|\hat{V}|orto\rangle = 2e^2\int\frac{d^3r_1'\,d^3r_2'}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}\Big\{|\psi_{1s}(\vec{r}_1')|^2|\psi_{2s}(\vec{r}_2')|^2-\mathbb{R}e\left(\psi_{1s}(\vec{r}_1')\psi_{2s}^*(\vec{r}_1')\psi_{2s}(\vec{r}_2')\psi_{1s}^*(\vec{r}_2')\right)\Big\}$$

Así que:

$$\langle para|\hat{V}|para\rangle - \langle orto|\hat{V}|orto\rangle = 4e^2\int\frac{d^3r_1\,d^3r_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}\Big[\mathbb{R}e\left(\psi_{1s}(\vec{r}_1)\psi_{2s}^*(\vec{r}_1)\psi_{2s}(\vec{r}_2)\psi_{1s}^*(\vec{r}_2)\right)\Big]$$

Usando el hecho de que $\psi_{1s}(\vec{r})$ y $\psi_{2s}(\vec{r})$ se pueden tomar reales $\Rightarrow$

$$\Delta E = 4e^2\int\frac{d^3r_1\,d^3r_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}\Big[\psi_{1s}(\vec{r}_1)\psi_{2s}(\vec{r}_1)\psi_{1s}(\vec{r}_2)\psi_{2s}(r_2)\Big]$$

ΔE es positiva ya que es de la forma $\Delta E = \int d^3r_1\,d^3r_2\,\frac{f(\vec{r}_1)f(\vec{r}_2)}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}$
ya que tiene la forma de la interacción entre dos distribuciones de carga identicas $f(\vec{r})$, que por ende tienen el mismo signo y en consecuencia poseen una energía de interacción positiva.

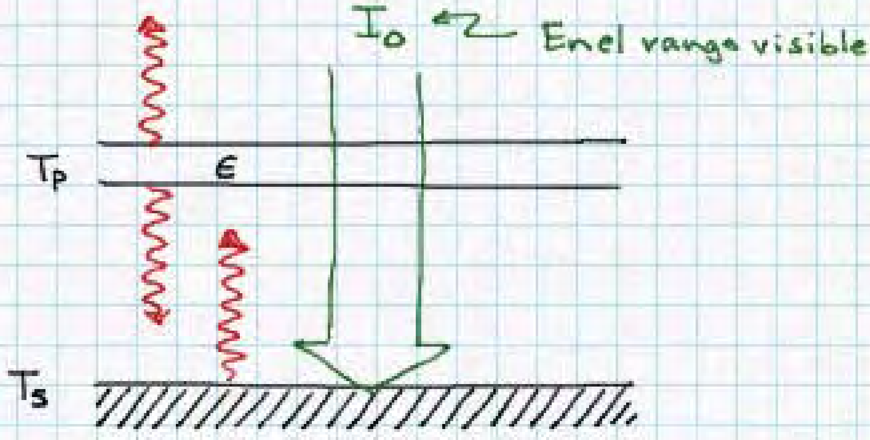
$\Rightarrow \Delta E > 0 \Rightarrow \langle para|\hat{V}|para\rangle > \langle orto|\hat{V}|orto\rangle$

$\Rightarrow$ El parahelio posee mayor energía que el ortohelio.

24/11/2013

MECANICA ESTADISTICA

PROBLEMA # 1



En el suelo: $I_0 + \sigma T_p^4 = \sigma T_s^4$

En el plastico: $\epsilon \sigma T_s^4 = 2 \sigma T_p^4$ $\Rightarrow$ $\boxed{T_s = \sqrt[4]{\frac{2}{\epsilon}}\, T_p^4}$

$I_0 = \sigma (T_s^4 - T_p^4) = \sigma \left(\frac{2}{\epsilon} - 1\right) T_p^4$ $\Rightarrow$ $\boxed{T_p = \left[\frac{I_0}{\sigma\left(\frac{2}{\epsilon} - 1\right)}\right]^{1/4}}$

24/11/2013

PROBLEMA #2

$$\hat{H} = -g\mu_B \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z \right) B \qquad \mu_B \equiv \frac{e\hbar}{2mc} \qquad \mu_z = g\mu_B m \qquad m = \pm 1/2 \qquad \mu \equiv g\mu_B/2$$

$$\mu_z = \pm \mu \qquad \beta \equiv 1/KT$$

Función de Partición: $Q_1(\beta) = \exp(\mu B\beta) + \exp(-\mu B\beta)$

$x \equiv \beta B\mu \implies Q_1(\beta) = e^{x} + e^{-x} = 2\cosh(x)$

$$M_z = N\bar{\mu}_z = \frac{N}{\beta}\frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial Q_1}{\partial x} = \frac{1}{2\cosh x}\, 2\,\mathrm{Senh}\, x \cdot \beta\mu \implies M_z = \beta\mu \tanh(x)$$

$$\boxed{M_z = \frac{g\mu_B N}{2}\tanh\left[\frac{g\mu_B B}{2KT}\right]}$$

7/01/2014

MECANICA ESTADISTICA

PROBLEMA #3

Calculamos el numero de microestados con energía $\leq E$

$$\Gamma(E) = \left(\frac{1}{N!}\right)\frac{1}{h^{3N}}\int d^3r_1 \cdots d^3r_N \int d^3p_1 \cdots d^3p_N$$

↑ Conteo semiclasico; $\vec{r} \in V$; $\sum_{i=1}^{N} \frac{|p_i|^2}{2m} \leq E$

$$\Gamma(E) = \frac{1}{N!}\frac{V^N}{h^{3N}}(2m)^{3N/2}\int d^3q_1 \cdots d^3q_N$$ ← Donde hemos hecho la sustitución $\vec{p}_i = \sqrt{2m}\,\vec{q}_i$

$\sum_i |q_i|^2 \leq E$

Esta integral es el volumen de una esfera 3N-dimensional de radio $\sqrt{E}$ → $\dfrac{\pi^{3N/2} E^{3N/2}}{(3N/2)!}$

$$\Gamma(E) = \frac{1}{N!}\frac{1}{h^{3N}} V^N (2m)^{3N/2}\frac{\pi^{3N/2}E^{3N/2}}{\left(\frac{3N}{2}\right)!}$$

Usamos la aproximación de stirling: $N! \sim N^N e^{-N} \Rightarrow N!\left(\frac{3N}{2}\right)! = \left(\frac{3}{2}\right)^N N^{2N} e^{-5N/2}$

$$\Gamma(E) = \left(\frac{V}{N}\right)^N\left(\frac{2\pi m}{h^2}\right)^{3N/2}\left(\frac{2E}{3N}\right)^{3N/2} e^{5N/2} = \left(\frac{V}{N}\right)^N\left(\frac{4\pi m E}{3h^2 N}\right)^{3N/2} e^{5N/2}$$

El numero de microestados con energía entre E y $E+\Delta E$ es $\Omega(E) = \frac{\partial \Gamma}{\partial E}\Delta E$

La derivada de $\left(\frac{2E}{3N}\right)^{3N/2}$ es $\left(\frac{2E}{3N}\right)^{3N/2-1} = \left(\frac{2E}{3N}\right)^{3N/2} \Big/ \left(\frac{2E}{3N}\right) = \frac{3N}{2}\frac{1}{E}\left(\frac{2E}{3N}\right)^{3N/2}$

$$\Rightarrow \Omega(E) = \frac{3N}{2}\Gamma(E)\frac{\Delta E}{E}$$

En el ensamble microcanonico la entropia es: $S = k \ln \Omega$

$$S = k\ln\left[\left(\frac{3N\Delta E}{2E}\right)\left(\frac{V}{N}\right)^N\left(\frac{4\pi m E}{3h^2 N}\right)^{3N/2} e^{5N/2}\right]$$

$$= Nk\left\{\log\left[\left(\frac{V}{N}\right)\left(\frac{4\pi m E}{3h^2 N}\right)^{3/2}\right] + \frac{5}{2} + \frac{1}{N}\log\left(\frac{3N\Delta E}{E}\right)\right\}$$

En el limite termodinamico el último término desaparece $\Rightarrow$

$$S = Nk\left\{\frac{5}{2} + \log\left[\frac{V}{h^3}\left(\frac{4\pi m E}{3N}\right)^{3/2}\right]\right\}$$

8/01/2014

MECANICA ESTADISTICA

PROBLEMA #4

A temperatura $T=0$ tenemos:

$N = \int_0^{\epsilon_F} g(\epsilon)\,d\epsilon$ define la energía de Fermi: ϵ_F

$E = \int_0^{\epsilon_F} \epsilon\, g(\epsilon)\,d\epsilon$ donde $g(\epsilon)$ es la densidad de estados para una partícula

La presión se puede encontrar usando la relación de Gibbs-Duheim:

$E = TS - PV + \mu N$ ya que a $T=0$ $\mu = \epsilon_F$ $\Rightarrow$ $PV = N\epsilon_F - E$

$$P = \frac{N}{V}\epsilon_F - \frac{E}{V} = \rho\,\epsilon_F - E/V$$

Ahora para partículas ultra-relativistas: $\epsilon = pc \Rightarrow \int_0^{\epsilon_F} g(\epsilon)\,d\epsilon = \frac{2V}{h^3}\int d\Omega \int_{p^2<\frac{\epsilon_F}{c}} p^2\,dp$

$$\Rightarrow N = 2\frac{V}{h^3c^3}(4\pi)\int_0^{\epsilon_F}\epsilon^2\,d\epsilon = \frac{8\pi V}{3h^3c^3}\epsilon_F^3$$

$$\Rightarrow \epsilon_F = hc\left(\frac{3\rho}{8\pi}\right)^{1/3}$$

$$E = \int_0^{\epsilon_F}\epsilon\, g(\epsilon)\,d\epsilon = \frac{2V}{h^3}\int d\Omega\int (pc)\,p^2\,dp = \frac{8\pi V}{h^3c^3}\int_0^{\epsilon_F}\epsilon^3\,d\epsilon = \frac{8\pi V}{4h^3c^3}\epsilon_F^4 = \left(\frac{8\pi V}{3h^3c^3}\epsilon_F^3\right)\frac{3}{4}\epsilon_F = \frac{3N}{4}\epsilon_F$$

$$\Rightarrow E = \frac{3N}{4}\epsilon_F \longrightarrow P = \rho\,\epsilon_F - \frac{3N}{4V}\epsilon_F = \frac{\rho}{4}\epsilon_F \longrightarrow P = \frac{1}{4}\rho\,\epsilon_F$$

Remplazando la expresión para la energía de Fermi tenemos:

$$\boxed{P = \left[\frac{hc}{4}\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/3}\right]\rho^{4/3} \qquad \gamma = 4/3}$$

Caso no relativista:

$$N = \int_0^{\epsilon_F} g(\epsilon)\,d\epsilon = \frac{2V}{h^3}(4\pi)\int_{p^2<2m\epsilon_F} p^2\,dp \longrightarrow N = \frac{2V}{h^3}\frac{4\pi}{3}(2m\epsilon_F)^{3/2} \Rightarrow \epsilon_F = \frac{h^2}{2m}\left(\frac{3\rho}{8\pi}\right)^{2/3}$$

$$E = \int_0^{\epsilon_F}\epsilon\, g(\epsilon)\,d\epsilon = \frac{2V}{h^3}\frac{4\pi}{2m}\int p^4\,dp \longrightarrow E = \left[\frac{8\pi V}{3h^3}(2m\epsilon_F)^{3/2}\right]\frac{3}{5}\epsilon_F = \frac{3N}{5}\epsilon_F$$

$$P = \rho\,\epsilon_F - \frac{3}{5}\rho\,\epsilon_F = \frac{2}{5}\rho\,\epsilon_F \longrightarrow \boxed{P = \frac{2}{5}\left(\frac{h^2}{2m}\right)\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{2/3}\rho^{5/3} \qquad \gamma = 5/3}$$

8/01/2014

En la zona de transición $P_{non\text{-}rel} \simeq P_{rel}$

$$\Rightarrow \frac{h^2}{5m}\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{2/3}\rho^{5/3} = \frac{hc}{4}\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/3}\rho^{4/3} \Rightarrow \rho^{1/3} = \frac{5mc}{4h}\left(\frac{8\pi}{3}\right)^{1/3} \qquad \rho \sim 1/\lambda^3 \qquad \lambda = \frac{h}{mc}$$

$1/\rho \sim \lambda^3$ $\quad 1/\rho$: volumen por partícula $\Rightarrow$ la transición se da cuando $1/\rho \sim \lambda^3$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} 1/\rho >> \lambda^3 \Rightarrow P_{no\text{-}rel} \\ 1/\rho << \lambda^3 \Rightarrow P_{rel} \end{array}}$$