FÍSICA TÉRMICA

FÓRMULAS GENERALES

El operador $\vec{\nabla}$ En coordenadas cartesianas (x, y, z):

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z \quad , \quad \text{grad} f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\text{div}\ \vec{a} = \vec{\nabla}\cdot\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad , \quad \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\text{rot}\ \vec{a} = \vec{\nabla}\times\vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$$

En coordenadas cilindricas (r, φ, z) :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z \quad , \quad \text{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\text{div}\ \vec{a} = \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{a_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad , \quad \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\text{rot}\ \vec{a} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\varphi + \left(\frac{\partial a_\varphi}{\partial r} + \frac{a_\varphi}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_z$$

En coordenadas esféricas (r, θ, φ):

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} &= \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi \\
\text{grad} f &= \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi \\
\text{div}\ \vec{a} &= \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{2a_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{a_\theta}{r\tan\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \\
\text{rot}\ \vec{a} &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \theta} + \frac{a_\theta}{r\tan\theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial r} - \frac{a_\varphi}{r}\right)\vec{e}_\theta + \\
&\quad \left(\frac{\partial a_\theta}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_\varphi \\
\nabla^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\tan\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}
\end{aligned}$$

FÓRMULAS ESPECÍFICAS

Recuerde que debe ser explicito en el desarrollo de cada uno de los pasos realizados.

1. Funciones de estado y relaciones de Maxwell

Energía interna:	U	$dU = TdS - pdV$
Entalpía:	$H = U + pV$	$dH = TdS + Vdp$
Enrgía libre:	$F = U - TS$	$dF = -SdT - pdV$
Entalpía libre de Gibbs :	$G = H - TS$	$dG = -SdT + Vdp$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V , \quad \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p , \quad \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T , \quad \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T$$

2. Para un gas ideal:

$$S_m = C_V \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + R\ln\left(\frac{V}{V_0}\right) + S_{m0} \ \text{ y } \ S_m = C_p \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - R\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) + S'_{m0}$$

3. Ecuaciones de Helmholtz:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p \ , \quad \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = V - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

para una superficie muy grande: $\mathrm{d}W_{\text{rev}} = -\gamma dA$, en donde la tensión superficial es γ

$$\gamma = \left(\frac{\partial U}{\partial A}\right)_S = \left(\frac{\partial F}{\partial A}\right)_T$$

4. Valores esperados en términos de la función de partición.

$$E = -\frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta} \ , \quad p = kT\frac{\partial \ln(Z)}{\partial V} \ , \quad S = k\ln(Z) - k\beta\frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta} \ , \quad C_V = k\beta^2\frac{\partial^2 \ln(Z)}{\partial \beta^2}$$

$$F = -kT\ln(Z) \ , \quad \alpha = \frac{\partial \ln(Z)}{\partial N} \ , \quad \mu_j = -kT\frac{\partial \ln(Z)}{\partial N_j}$$

5. Fórmula de Stirling para n grandes.

$$\ln n! \approx n\ln n - n$$

Examen de Conocimientos de Doctorado
Física Térmica.
Martes 15 de Abril (2013). Horario: 2PM-6PM.

Nombre: ______________________________

Código: ________________

1. **(15 puntos)** (PREGRADO). En equilibrio termodinámico, los calores específicos de un material a presión y volumen constante C_P y C_V se pueden expresar en función de la temperatura T, el volumen V, la compresibilidad isotérmica $\kappa_T = -V^{-1}(\partial V/\partial P)_T$, la compresibilidad adiabática $\kappa_S = -V^{-1}(\partial V/\partial P)_S$ y la expansibilidad térmica $\alpha = -V^{-1}(\partial V/\partial T)_P$.

   (a) **(5 puntos).** Demuestre que:

$$TdS = C_V dT + \frac{\alpha T}{\kappa_T} dV \tag{1}$$

   y

$$TdS = C_p dT - \alpha TV dP \tag{2}$$

   (b) **(5 puntos).** Asumiendo presión constante obtenga el resultado:

$$C_P - C_V = \frac{TV\alpha^2}{\kappa_T} \tag{3}$$

   (c) **(5 puntos).** Aplique el criterio de equilibrio termodinámico a las expresiones (1) y (2) y demuestre que C_P y C_V en términos de T, V,κ_T,κ_S y α, se pueden escribir como:

$$C_P = \frac{\alpha^2 TV}{\kappa_T - \kappa_S}, \tag{4}$$

$$C_V = \frac{\alpha^2 TV \kappa_S}{\kappa_T(\kappa_T - \kappa_S)}. \tag{5}$$

SOLUCION

(a) Para la ecuación (1). Tomando la entropía en función de T y V obtenemos:

$$TdS = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV$$

Para el primer término usamos $TdS = dQ = C_V dT$, para escribir

$$T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = C_V$$

Para el segundo término usamos la relación de Maxwell.

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$$

adicionalmente usamos la identidad.

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = -\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P}{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T} = \frac{\alpha}{\kappa_T}$$

obteniendo

$$TdS = C_V dT + \frac{\alpha T}{\kappa_T} dV$$

Para la segunda ecuación.
Tomando la entropía en función de T y P obtenemos:

$$TdS = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P dT + T\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T dP$$

Para el primer término usamos $T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P = C_P$.
Para el segundo término usamos la relación de Maxwell.

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -\alpha V$$

obteniendo

$$TdS = C_P dT + \alpha T V dP$$

(b) Asumiendo presión constante $dP = 0$ e igualando (1) y (2) obtenemos

$$C_V dT + \frac{\alpha T}{\kappa_T} dV = C_P dT$$

por lo tanto

$$C_P - C_V = \frac{T\alpha}{\kappa_T}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{TV\alpha^2}{\kappa_T}$$

(c) Igualamos a cero (1) y (2) por criterio de equilibrio térmico

$$0 = C_V dT + \frac{\alpha T}{\kappa_T} dV$$

$$0 = C_p dT - \alpha T V dP$$

obteniendo

$$\frac{C_P}{C_V} = -V\kappa_T \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S = \frac{\kappa_T}{\kappa_S}$$

$$C_P = \frac{\alpha^2 T V}{\kappa_T - \kappa_S}$$

$$C_V = \frac{\alpha^2 T V \kappa_S}{\kappa_T\left(\kappa_T - \kappa_S\right)}$$

2. **(15 puntos)**(PREGRADO). Considere un sistema de N partículas idénticas pero distinguibles. Cada una de estas partículas puede ocupar dos estados con energías: $E_0 = 0$ y $E_1 = \varepsilon > 0$. Suponga que el nivel de degeneramiento de E_1 es g.

   (a) **(8 puntos).** Basado en el ensamble microcanónico, encuentre la fracción de partículas x_1 ocupando el estado E_1 y la fracción de partículas x_0 ocupando el estado E_0, en función de la temperatura T, la constante de Boltzmann k_B y aproximando su respuesta con base en la relación de Stirling.

   (b) **(7 puntos).** La expresión que acaba de encontrar en el punto anterior puede presentar temperaturas negativas cuando la energía total se aproxima a su límite superior, por ejemplo cuando la fracción de partículas en el estado E_1 es 0.75 para $g = 2$. Explique por qué tiene sentido que este sistema presente temperaturas negativas en los rangos altos de energía mientras que un gas ideal no presenta temperaturas negativas a ningún nivel de energía.

SOLUCION

(a) El número de estados con energía total $E = n_+\varepsilon$ es

$$\Omega(E,N) = \frac{N!g^{n_+}}{n_+!(N-n_+)!}$$

El coeficiente binomial cuenta el número de maneras en que n_+ partículas pueden ocupar el nivel superior de energía y es el número de maneras en que se pueden asignar estas partículas en g estados degenerados.

Usando la aproximación de Stirling calculamos la entropía:

$$S(E,N) = k_B ln\Omega(E,N) \approx -Nk_B\left[x\ln x + (1-x)\ln(1-x) - x\ln g\right]$$

donde $x = \frac{n_+}{N} = \frac{E}{N\varepsilon}$ y k_B es la constante de Boltzmann. La temperatura está dada por.

$$\beta \equiv \frac{1}{k_BT} = \frac{1}{k_B}\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_N = \frac{1}{N\varepsilon k_B}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_N = \frac{1}{\varepsilon} ln\left(\frac{g(1-x)}{x}\right)$$

Resolviendo x encontramos

$$n_+ = Nx = N\frac{ge^{-\beta\varepsilon}}{1+ge^{-\beta\varepsilon}}$$

$$n_+ = N - n_+ = N\frac{1}{1+ge^{-\beta\varepsilon}}$$

(b) Cuando la fracción de partículas ocupando el estado de alta energía se aproxima a 1 se comienza a reducir el número de microconfiguraciones disponibles para representar ese macroestado. La reducción de microconfiguraciones reduce la entropía del sistema al ir aumentando su energía total y por definición.

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)$$

la temperatura será negativa para un sistema con cota superior de energía. Para un gas ideal, la entropía del sistema aumenta continuamente al aumentar su energía total. Por lo tanto la temperatura siempre será positiva.

3. (20 puntos) (POSGRADO). Expansión libre adiabática de un fluido van der Waals

(a) (5 puntos). Demuestre que el calor específico a volumen constante C_V de un fluido van der Waals es independiente del volumen cuando la temperatura se mantiene constante. La ecuación de estado de un fluido van der Waals es:

$$\left(P + \frac{aN^2}{V}\right)\left(\frac{V}{N} - b\right) = k_BT, \tag{6}$$

donde P es la presión, V el volumen, N el número de partículas, T es la temperatura, a y b son parámetros fenomenológicos y k_B es la constante de Boltzmann.

(b) (5 puntos). Demuestre que:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P = \frac{aN^2}{V^2} \tag{7}$$

(c) **(5 puntos).** Si el fluido van der Waals se expande libremente y de manera adiabática desde un volumen inicial V_i a un volumen final V_f comenzando con una temperatura T_i, demuestre que la temperatura final del sistema es:

$$T_f = T_i - a\frac{N^2}{C_V}\left(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_f}\right). \tag{8}$$

(d) **(5 puntos).** Según la expresión que acaba de encontrar en (c), la temperatura del fluido van der Waals se reduce durante una expansión libre. Esto es en contraste con lo que sucede con un gas ideal en donde la temperatura se mantiene constante durante una expansión libre. Explique cualitativamente porque tiene sentido este resultado.

SOLUCION

(a) Para demostrar que C_V es independiente del volumen calculamos

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = T\left[\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V\right]_T$$

$$= T\left[\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T\right]_V = T\left(\frac{\partial^2 P}{\partial T^2}\right)_V$$

usando la relación de Maxwell $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$ en el último paso.
Con base en la ecuación de estado.

$$\left(P + \frac{aN^2}{V}\right)\left(\frac{V}{N} - b\right) = k_B T$$

se demuestra que

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial T^2}\right)_V = 0$$

por lo tanto C_V es independiente del volumen a temperatura constante.

(b)

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - P\left(\frac{\partial V}{\partial V}\right)_T$$

usando la relación de Maxwell $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P$$

(c) Tomando en cuenta que la energía total no cambia durante la expansión, consideramos el diferencial de la energía para el cambio de temperatura y volumen.

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV = C_V dT + \left[T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P\right] dV$$

$$dU = C_V dT + \frac{aN^2}{V^2} dV$$

igualando a cero la expresión anterior e integrando nos da.

$$T_f - T_i = -a\frac{N^2}{C_V}\left(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_f}\right)$$

(d) El fluido van der Waals presenta interacciones atractivas entre moléculas. Al expandirse incrementa la energía potencial del sistema por lo tanto reduciendo la energía cinética y por ende la temperatura. El gas ideal no presenta estas interacciones moleculares y la energía no es afectada durante la expansión.

4. **(20 puntos)**(POSGRADO). Una red unidimensional contiene N sitios y está a una temperatura T. En cada sitio se encuentra un átomo que puede estar en uno de dos estados $E_i = \pm\varepsilon$. Si en un instante dado, L número de átomos consecutivos se encuentran en el estado $+\varepsilon$, se define a esta serie de átomos como un cúmulo de longitud L (condicionado a que los átomos adyacentes al cúmulo estén en un estado $-\varepsilon$).

   (a) (10 puntos). Para el límite $N \to \infty$, calcule la probabilidad $\mathcal{P}_L$ de que un sitio dado se encuentre en un cúmulo de tamaño L. SUGERENCIA. Comience determinando las probabilidades de que un sitio dado de la red esté en el estado $+\epsilon$ o $-\epsilon$. Luego determine las probabilidades condicionales necesarias para tener un cúmulo de longitud L en donde todos los sitios tienen energía $+\varepsilon$. Tenga en cuenta que la temperatura es constante.

   (b) (10 puntos). Usando el resultado anterior, calcule la lóngitud promedio $< L >_T$ de un cúmulo en términos de $\beta = \frac{1}{k_B T}$ y ε. Demuestre que en el límite para bajas temperaturas $< L >_{T\to 0} = 0$ y que en el límite para altas temperaturas $< L >_{T\to\infty} = \frac{3}{2}$.

SOLUCION

(a) Definamos $\mathcal{P}_+$como las probabilidades de que un sitio dado de la red tenga energía $+\varepsilon$ y $\mathcal{P}_-$como las probabilidades de que un sitio dado de la red tenga energía $-\varepsilon$. En ausencia de interacciones entre sitios estas probabilidades están dadas por el ensamble canónico como

$$\mathcal{P}_+ = \frac{e^{-\beta\varepsilon}}{e^{-\beta\varepsilon} + e^{\beta\varepsilon}}$$

$$\mathcal{P}_- = \frac{e^{\beta\varepsilon}}{e^{-\beta\varepsilon} + e^{\beta\varepsilon}}$$

donde $\beta \equiv \frac{1}{k_B T}$

Para que se cumpla que un sitio dado x pertenece a un cúmulo de longitud L se tienen que dar las siguientes condiciones: (i) el átomo en la posición x tiene una energía $+\varepsilon$. (ii) para un determinado número de átomos n donde $0 \leq n \leq L-1$ hay n átomos a la izquierda de x y $L-n-1$ átomos a la derecha de x con energías $+\varepsilon$, y (iii) el átomo que se encuentra a $n+1$ sitios a la derecha de x y $L-n$ átomos a la izquierda de x tienen energías $-\varepsilon$. La probabilidad conjunta para que esto suceda es $\mathcal{P}_+^{\mathrm{L}}\mathcal{P}_-^2$. La probabilidad acumulada para L valores de n es

$$\mathcal{P}_L = L\mathcal{P}_+^{\mathrm{L}}\mathcal{P}_-^2 \; L \geq 1$$

El caso en donde $L = 0$ corresponde a que el sitio x tenga una energía $-\varepsilon$ por lo tanto.

$$\mathcal{P}_L = \mathcal{P}_- \; L = 0$$

Se ignoran los casos en donde el sitio x se encuentra cerca de los bordes esto es valido para $N \to \infty$.

(b) La longitud promedio de un cúmulo se puede calcular de la siguiente manera:

$$< L >= \sum_{L=0}^{\infty} L\mathcal{P}_L = \mathcal{P}_-^2 \sum_{L=1}^{\infty} \mathrm{L}^2 \mathcal{P}_+^{\mathrm{L}} = \mathcal{P}_-^2 \mathcal{P}_+ \frac{\partial}{\partial \mathcal{P}_+} \left(\sum_{\mathrm{L}=1}^{\infty} \mathrm{L}\mathcal{P}_+^{\mathrm{L}} \right)$$

$$< L >= \mathcal{P}_-^2 \mathcal{P}_+ \frac{\partial}{\partial \mathcal{P}_+} \left(\frac{\mathcal{P}_+}{(1-\mathcal{P}_+)^2} \right) = \frac{\mathcal{P}_+ \, (1+\mathcal{P}_+)}{\mathcal{P}_-}$$

Esto se puede escribir en términos de la temperatura.

$$< L >_T = e^{-2\beta\varepsilon} \frac{e^{\beta\varepsilon} + 2e^{-\beta\varepsilon}}{e^{-\beta\varepsilon} + e^{\beta\varepsilon}}$$

para $T = 0$ todos los sitios de la red están en su nivel mas bajo de energía y

$$< L >_0 = 0$$

para $T = \infty$ tanto P_+ como P_-tienen valor de $\frac{1}{2}$. Por lo tanto

$$< L >_\infty = \frac{3}{2}$$

5. **(30 puntos)** (POSGRADO). En ausencia de un campo externo, una red unidimensional de N spines con energía de interacción $J > 0$, se puede describir en términos de un Hamiltoniano tipo Ising de tres niveles: $S_i = 1, 0, -1$ como:

$$\mathcal{H} = -\mathrm{J}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{S_i S_{i+1}} \tag{9}$$

(a) **(10 puntos).** Obtenga la matriz de transferencia para el sistema.

(b) **(10 puntos).** Encuentre una expresión analítica para la función de partición.

(c) **(10 puntos).** Obtenga la energía interna del sistema en términos de J y N para el límite de bajas temperaturas y para $N \gg 1$. Discuta por qué tiene sentido su respuesta.

SOLUCION

(a) La función de partición se puede escribir en términos de la matriz de transferencia como

$$Z = Tr\mathbf{T}^{\mathrm{N}} = \lambda_1^N + \lambda_2^N + \lambda_3^N$$

T es la matriz de transferencia;

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} e^{\beta J} & 1 & e^{-\beta J} \\ 1 & 1 & 1 \\ e^{-\beta J} & 1 & e^{\beta J} \end{pmatrix}$$

y $\lambda_1^N, \lambda_2^N, \lambda_3^N$ son sus valores propios y $\beta = \frac{1}{k_B T}$

(b) Los valores propios se pueden encontrar resolviendo

$$det\,(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

$$\lambda_1^N = 2sinh(\beta J)$$

$$\lambda_2^N = \frac{1}{2}\left[1 + 2cosh\,(\beta J) + \sqrt{4cosh^2(\beta J) - 4cosh(\beta J) + 9}\right]$$

$$\lambda_3^N = \frac{1}{2}\left[1 + 2cosh\,(\beta J) - \sqrt{4cosh^2(\beta J) - 4cosh(\beta J) + 9}\right]$$

(c) Para $N \gg 1$ y a bajas temperaturas ($\beta J \to \infty$)obtenemos

$$Z \approx e^{N\beta J}$$

y la energía interna tiende a

$$U = -\left(\frac{\partial\left(lnZ\right)}{\partial\beta}\right) \to -NJ$$

Este resultado es esperado para interacciones ferromagnéticas $J > 0$ porque todos los sitios están en su estado de mínima energía.

MECANICA CLASICA

FÓRMULAS GENERALES

El operador $\vec{\nabla}$ En coordenadas cartesianas (x, y, z):

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z \quad , \quad \mathrm{grad} f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\mathrm{div}\ \vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad , \quad \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\mathrm{rot}\ \vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$$

En coordenadas cilindricas (r, φ, z) :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z \quad , \quad \mathrm{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\mathrm{div}\ \vec{a} = \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{a_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad , \quad \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\mathrm{rot}\ \vec{a} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\varphi + \left(\frac{\partial a_\varphi}{\partial r} + \frac{a_\varphi}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_z$$

En coordenadas esféricas (r, θ, φ):

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} &= \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi \\
\mathrm{grad} f &= \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi \\
\mathrm{div}\ \vec{a} &= \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{2a_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{a_\theta}{r\tan\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \\
\mathrm{rot}\ \vec{a} &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \theta} + \frac{a_\theta}{r\tan\theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial r} - \frac{a_\varphi}{r}\right)\vec{e}_\theta + \\
&\quad \left(\frac{\partial a_\theta}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_\varphi \\
\nabla^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\tan\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}
\end{aligned}$$

FÓRMULAS ESPECÍFICAS

Recuerde que debe ser explicito en el desarrollo de cada uno de los pasos realizados.

1. Momento generalizado $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$

2. Formalismo de Hamilton

$$H(p,q,t) = \dot{q}_i p_i - L(q,\dot{q},t)$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

3. Corchetes de Poisson

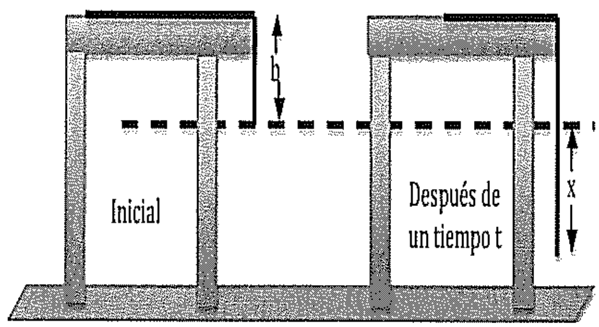
$$[g,h] = \sum_k \left(\frac{\partial g}{\partial q_k}\frac{\partial h}{\partial p_k} - \frac{\partial g}{\partial p_k}\frac{\partial h}{\partial q_k} \right)$$

Examen de Conocimientos de Doctorado
Mecánica Analítica.
Lunes 14 de Abril (2013). Horario: 2PM-6PM.

Nombre: ______________________________

Código: ______________

1. **(10 puntos)** (PREGRADO). Una cuerda inextensible uniforme de masa m y longitud a, cuelga desde el borde de una mesa horizontal lisa a una distancia b, como se muestra en la figura. Suponiendo que la cuerda se suelta desde el reposo y cae siempre de forma vertical:



   (a) **(5 puntos)**. Encontrar la velocidad de la cuerda, cuando esta se ha desplazado una distancia x.

   (b) **(5 puntos)**. Calcular el desplazamiento x, como función del tiempo.

SOLUCION

(a) Como la cuerda es uniforme, la energía cinética total es $T = \frac{mv^2}{2}$. El pedazo que cuelga ($\frac{Mx}{a}$) tiene un centro de gravedad que ha descendido una distancia $b + \frac{x}{2}$. Como no hay fricción, las fuerzas normales no hacen trabajo y la energía inicial es cero, se tiene que

$$\frac{Mv^2}{2} - \frac{Mgx}{a}(b + \frac{x}{2}) = E = 0 \rightarrow v^2 = \frac{gx}{a}(x + 2b)$$

(b) Definiendo $c = \sqrt{\frac{g}{a}}$

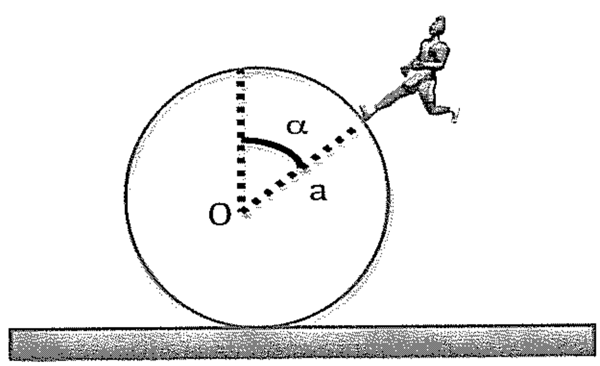
$$\frac{dx}{dt} = \pm c x^{1/2}(x + 2b)^{1/2}$$

Ya que x se incrementa como función del tiempo, solo tomo la raíz positiva e integro

$$\begin{aligned} ct &= \int_0^x \frac{dx}{x^{1/2}(x+2b)^{1/2}} = \int \frac{4b \sinh u \cosh u du}{\sqrt{2b} \sinh u \sqrt{2b \sinh^2 u + 2b}} = \frac{4b}{2b} \int \frac{\cosh u du}{\sqrt{1+\sinh^2 u}} \\ &= 2 \int \frac{\cosh u du}{\cosh u} = 2u = 2 \sinh^{-1} \sqrt{\frac{x}{2b}} \Big|_0^x \Rightarrow x = b(\cosh ct - 1) \end{aligned}$$

en donde se ha hecho el cambio de variable $x = 2b \sinh^2 u$

2. **(15 puntos)** (PREGRADO). En un truco de circo, un hombre de masa m con su movimiento provoca que una gran bola sólida de masa M y un radio a acelere hacia la derecha, mientras el corre a la izquierda sobre la superficie superior de la bola (ver figura). El hombre no se caerá de la pelota, porque él mantiene este movimiento de tal manera que el ángulo α permanece constante. Suponga que no hay deslizamiento en ninguna superficie.



(a) **(8 puntos).** Calcular la aceleración para que este movimiento se pueda dar.

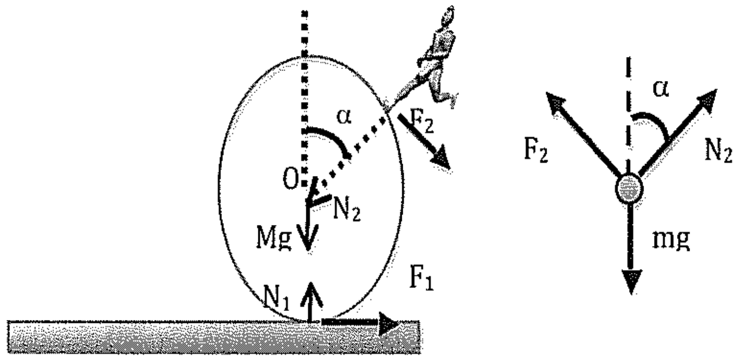
(b) **(7 puntos).** Analice y discuta el caso en que la bola es hueca, las masas del hombre y la pelota son iguales y $\alpha = 45^0$.

SOLUCION

Los diagrama de cuerpo libre para la bola y el hombre son:

(a) Como no desliza, supongo que en un instante de tiempo t, el balón se mueve hacia la derecha con una velocidad V y rota con una velocidad ángular dada por $\omega = V/a$. La velocidad V, debe ser la misma que debe tener el hombre para mantener el ángulo constante. Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento para el hombre son:

$$\begin{aligned} m\frac{dV}{dt} &= N_2 \sin\alpha - F_2 \cos\alpha \\ 0 &= N_2 \cos\alpha + F_2 \sin\alpha - mg \end{aligned}$$



Las ecuaciones de movimiento para el balón son:

$$\begin{aligned} M\frac{dV}{dt} &= F_1 - N_2\sin\alpha + F_2\cos\alpha \\ 0 &= N_1 - N_2\cos\alpha - F_2\sin\alpha - Mg \\ I_0\frac{d\omega}{dt} &= aF_2 - aF_1 \end{aligned}$$

donde I_0, es el momento de inercia respecto a O. Junto con la ecuación $V = \omega a$, se tienen 6 ecuaciones con 6 incognitas. Las cuales pueden ser resueltas como:

$$\begin{aligned} mg &= N_2\cos\alpha + F_2\sin\alpha \\ N_1 &= N_2\cos\alpha + F_2\sin\alpha + Mg \\ N_1 &= mg + Mg \\ m\frac{dV}{dt} &= N_2\sin\alpha - F_2\cos\alpha \\ M\frac{dV}{dt} &= F_1 - N_2\sin\alpha + F_2\cos\alpha = F_1 - m\frac{dV}{dt} \end{aligned}$$

Por lo tanto se pueden combinar las ecuaciones como:

$$\begin{aligned} (M+m)\frac{dV}{dt} &= F_1 = F_2 - \frac{I_0}{a^2}\frac{dV}{dt} \\ (M+m+\frac{I_0}{a^2})\frac{dV}{dt} &= F_2 \end{aligned}$$

Para despejar F_2

$$\begin{aligned} m\cos\alpha\frac{dV}{dt} &= N_2\sin\alpha\cos\alpha - F_2\cos^2\alpha \\ mg\sin\alpha &= N_2\sin\alpha\cos\alpha + F_2\sin^2\alpha \\ mg\sin\alpha - m\cos\alpha\frac{dV}{dt} &= F_2 \end{aligned}$$

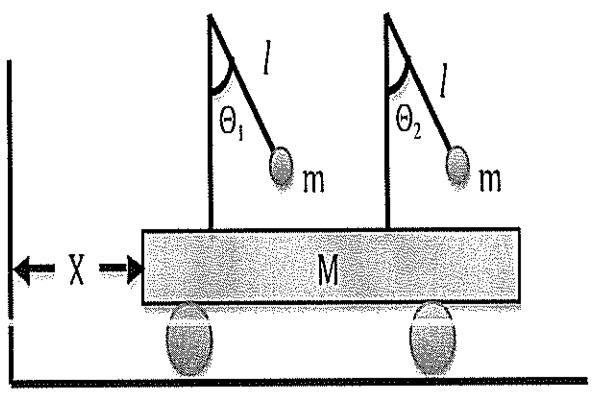
igualando las dos ecuaciones para F_2 :

$$\begin{aligned}(M + m + \frac{I_0}{a^2})\frac{dV}{dt} &= mg\sin\alpha - m\cos\alpha\frac{dV}{dt} \\ \frac{dV}{dt} &= \frac{mg\sin\alpha}{M + \frac{I_0}{a^2} + m(1+\cos\alpha)}\end{aligned}$$

(b) Si la bola es hueca $I_0 = \frac{2Ma^2}{3}$, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \frac{mg\sin\alpha}{M + \frac{2M}{3} + m(1+\cos\alpha)} = \frac{g\sin\alpha}{1 + \frac{2}{3} + (1+\cos\alpha)} = \frac{g\sin\alpha}{\frac{5}{3} + (1+\cos\alpha)} = \frac{g\sin\alpha}{\frac{8}{3} + \cos\alpha)} \\ &= \frac{g\sqrt{2}/2}{\frac{8}{3} + \sqrt{2}/2} = \frac{g\sqrt{2}}{\frac{16}{3} + \sqrt{2}} \approx 0.21g\end{aligned}$$

3. (20 puntos) (POSGRADO). Suponga que dos péndulos simples se montan sobre un carro de masa M. El carro se puede mover libremente sobre la superficie a lo largo de una línea recta al igual que los péndulos. Los péndulos tienen longitud l, masa m y oscilan sin fricción (ver figura). Si los ángulos que hacen cada uno de los péndulos con la vertical son θ_1 y θ_2,



(a) **(6 puntos).** Calcular el Lagrangiano del sistema.

(b) **(7 puntos).** Haciendo la aproximación de ángulos pequeños, calcular las ecuaciones de Lagrange del movimiento.

(c) **(7 puntos).** Con base en el resultado de (b), resuelva las ecuaciones de Lagrange y especifique cuántos modos normales de movimiento existen.

SOLUCION

(a) El lagrangiano es $L = T - V$ con:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{m}{2}\left[(\dot{x} + l\dot{\theta}_1\cos\theta_1)^2 + l^2\dot{\theta}_1^2\sin^2\theta_1 + (\dot{x} + l\dot{\theta}_2\cos\theta_2)^2 + l^2\dot{\theta}_2^2\sin^2\theta_2\right] \\
&= \frac{(M+2m)\dot{x}^2}{2} + \frac{ml^2}{2}\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2\right) + ml\dot{x}\left(\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + \dot{\theta}_2\cos\theta_2\right) \\
V &= -mgl\left[\cos\theta_1 + \cos\theta_2\right] + cte
\end{aligned}$$

(b) El Lagrangiano se puede escribir como (usando la aproximación de ángulos pequeños:

$$L = T - V = \frac{1}{2}(M+2m)\dot{x}^2 + \frac{ml^2}{2}(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + ml\dot{x}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) - \frac{mgl}{2}(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + cte$$

Se calculan las ecuaciones de Lagrange como:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} &= 0 \\
(M+2m)\ddot{x} + ml(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) &= 0 \\
ml^2\ddot{\theta}_1 + ml\ddot{x} + mgl\theta_1 &= 0 \\
ml^2\ddot{\theta}_2 + ml\ddot{x} + mgl\theta_2 &= 0
\end{aligned}$$

(c) Sumando y restando las dos últimas ecuaciones se obtiene:

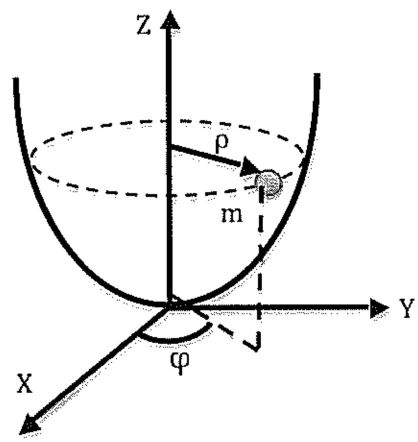
$$\begin{aligned}
& ml^2(\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2) + mgl(\theta_1 - \theta_2) = 0 \\
& \theta_1 - \theta_2 = A\cos(\omega_1 t + \phi_1) \quad \omega_1^2 = \frac{g}{l} \\
& \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \frac{2}{l}\ddot{x} + \frac{g}{l}(\theta_1 + \theta_2) = 0 \\
\ddot{x} &= -\frac{ml(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)}{(M+2m)} \\
& \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 - \frac{2}{l}\frac{ml(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)}{(M+2m)} + \frac{g}{l}(\theta_1 + \theta_2) = (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)\left(1 - \frac{2}{l}\frac{ml}{(M+2m)}\right) + \frac{g}{l}(\theta_1 + \theta_2) = 0 \\
& (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)\left(\frac{M}{(M+2m)}\right) + \frac{g}{l}(\theta_1 + \theta_2) = 0 \\
& \theta_1 + \theta_2 = B\cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad \omega_2^2 = \frac{g(M+2m)}{Ml}
\end{aligned}$$

La solución general para cada ángulo se puede escribir como

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = \frac{A}{2}\cos(\omega_1 t + \phi_1) + \frac{B}{2}\cos(\omega_2 t + \phi_2) \\
\theta_2 &= \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} + \frac{\theta_2 + \theta_1}{2} = \frac{B}{2}\cos(\omega_2 t + \phi_2) - \frac{A}{2}\cos(\omega_1 t + \phi_1)
\end{aligned}$$

Se ve claramente que existen dos modos normales de vibración. Uno corresponde a los dos péndulos oscilando hacia el mismo lado y el otro corresponde a los dos péndulos oscilando en sentidos opuestos.

4. **(25 puntos)** (POSGRADO). Una partícula de masa m, en presencia del campo gravitatorio terrestre, se mueve sin rozamiento sobre la superficie interior de un paraboloide de revolución colocado verticalmente (ver figura).



(a) **(6 puntos).** Calcular el Lagrangiano e identificar las magnitudes que se conservan durante el movimiento.

(b) **(7 puntos).** Calcular el potencial efectivo para el problema unidimensional equivalente y discutir el tipo de órbitas.

(c) **(6 puntos).** ¿Qué velocidad inicial ha de darse a la partícula para que la órbita sea circular?

(d) **(6 puntos).** Calcular la frecuencia de oscilación para pequeñas amplitudes en torno a esta órbita circular.

SOLUCION

(a) De acuerdo al dibujo, defino $z = k(x^2 + y^2)$ en donde k es una constante, y lo importante en este ejercicio es saber definir las variables

$$x = \rho\cos\phi \quad\longrightarrow\quad \dot{x} = \dot{\rho}\cos\phi - \rho\dot{\phi}\sin\phi \quad\longrightarrow\quad \dot{x}^2 = \dot{\rho}^2\cos^2\phi + \dot{\rho}^2\dot{\phi}^2\sin^2\phi - 2\rho\dot{\rho}\dot{\phi}\sin\phi$$

$$y = \rho\sin\phi \quad\longrightarrow\quad \dot{y} = \dot{\rho}\sin\phi + \rho\dot{\phi}\cos\phi \quad\longrightarrow\quad \dot{y}^2 = \dot{\rho}^2\sin^2\phi + \dot{\rho}^2\dot{\phi}^2\cos^2\phi + 2\rho\dot{\rho}\dot{\phi}\sin\phi$$

$$z = k\rho^2 \quad\longrightarrow\quad \dot{z} = 2k\rho\dot{\rho} \quad\longrightarrow\quad \dot{z}^2 = 4k^2\rho^2\dot{\rho}^2$$

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + 4k^2\rho^2\dot{\rho}^2\right) \quad ; \quad V = mgz = mgk\rho^2$$

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + 4k^2\rho^2\dot{\rho}^2\right) - mgk\rho^2$$

Claramente el Lagrangiano no depende de ϕ, luego el momento generalizado asociado a esta variable se conserva

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m\rho^2\dot{\phi} = l$$

(b) La energía total de la partícula, con $l \neq 0$, es:

$$E = T + V = \frac{m\dot{\rho}^2}{2}(1 + 4k^2\rho^2) + \frac{l^2}{2m\rho^2} + mgk\rho^2$$

El segundo término está asociado al potencial efectivo y se pueden definir una energía cinética y una potencial efectiva en términos de una sola variable unidimensional, como

$$T_e = \frac{m}{2}(1 + 4k^2\rho^2)\dot{\rho}^2 \quad V_e = \frac{l^2}{2m\rho^2} + mgk\rho^2$$

La ecuación de la energía se puede escribir como:

$$E - V_e = T_e = \frac{m}{2}(1 + 4k^2\rho^2)\dot{\rho}^2 \quad \rightarrow \quad dt = \frac{\sqrt{m(1 + 4k^2\rho^2)^2}}{\sqrt{2(E - V\breve{\ }e)}}d\rho$$

Para que esta última ecuación tenga sentido, se requiere que para cualquier valor de l, $E \geq V_e$. Quiere decir esto que cuando la energía total tome su mínimo valor, la orbita será circular, es decir cuando $E = \frac{l^2}{2m\rho^2} + mgk\rho^2$. En este caso es fácil calcular el radio de la órbita, derivando la función potencial e igualando a cero, se tiene:

$$\left.\frac{dV_e}{d\rho}\right|_{min} = 2mgk\rho_e - \frac{l^2}{m\rho_e^3} = 0 \rightarrow \rho_e^2 = \frac{l}{m\sqrt{2gk}}$$

(c) Como se trata de una trayectoria circular, la velocidad es únicamente tangencial. De la ecuación que define el momento ángular y el valor de ρ_c se tiene que:

$$l = m\rho_c^2\dot{\phi} \quad ; \quad \rho_c^2 = \frac{l}{m\sqrt{2gk}} = \frac{m\rho_c^2\dot{\phi}}{m\sqrt{2gk}} \rightarrow \dot{\phi} = \sqrt{2gk}$$

Por lo tanto, para que se mueva en una órbita circular de radio ρ_c, se necesita dar una velocidad de $\sqrt{2gk}\rho_c$

(d) Para hacer este procedimiento, toca usar las ecuaciones que faltan con respecto a la variable ρ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \rho} &= m\rho\dot{\phi}^2 + 4mk^2\rho\dot{\rho}^2 - 2mgk\rho \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} &= m\dot{\rho} + 4mk^2\rho^2\dot{\rho} \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} - \frac{\partial L}{\partial \rho} = 0 &= m\ddot{\rho} + 4mk^2 2\rho\dot{\rho}^2 + 4mk^2\rho^2\ddot{\rho} - m\rho\dot{\phi}^2 - 4mk^2\rho\dot{\rho}^2 + 2mgk\rho \\
&= m(1 + 4mk^2\rho^2)\ddot{\rho} + 4mk^2\rho\dot{\rho}^2 - m\rho\frac{l^2}{m^2\rho^4} + 2mgk\rho = 0
\end{aligned}$$

Sí el movimiento se aparta de la órbita circular, se puede suponer que $\rho = \rho_c(1+\epsilon)$ con $\epsilon << 1$. Por lo tanto si se sustituye este valor en la ecuación anterior y sin tener en cuenta términos que escalan como ϵ^2, se tiene:

$$
\begin{aligned}
m(1+4k^2\rho_c^2(1+\epsilon)^2)\rho_c\ddot{\epsilon} + 4mk^2\rho_c(1+\epsilon)\rho_c^2\dot{\epsilon}^2 - \frac{l^2}{m\rho_c^3(1+\epsilon)^3} + 2mgk\rho_c(1+\epsilon) = \\
m(1+4k^2\rho_c^2(1+\epsilon)^2)\rho_c\ddot{\epsilon} - \frac{l^2}{m\rho_c^3}(1-3\epsilon) + 2mgk\rho_c(1+\epsilon) = \\
m(1+4k^2\rho_c^2)\rho_c\ddot{\epsilon} - \frac{m^2\rho_c^4}{m\rho_c^3}(1-3\epsilon) + 2mgk\rho_c(1+\epsilon) = \\
m(1+4k^2\rho_c^2)\rho_c\ddot{\epsilon} - m\rho_c 2gk + 3\epsilon\rho_c 2mgk + 2mgk\rho_c + 2mgk\rho_c\epsilon = \\
m(1+4k^2\rho_c^2)\rho_c\ddot{\epsilon} + 8mgk\rho_c\epsilon = 0 \\
\ddot{\epsilon} + \frac{8gk}{1+\frac{4k^2 l}{m\sqrt{2gk}}}\epsilon = 0
\end{aligned}
$$

En donde claramente se puede identificar la frecuencia del oscilador armónico, que viene dada por:

$$\omega^2 = \frac{8gk}{1+\frac{4k^2 l}{m\sqrt{2gk}}}$$

5. **(30 puntos)** (POSGRADO). Suponga dos funciones continuas que dependen de sus coordenadas generalizadas: $g(q_k, p_k)$ y $h(q_k, p_k)$, demuestre que:

   (a) **(5 puntos).**

   $$\frac{dg}{dt} = [g, h] + \frac{\partial g}{\partial t}$$

   (b) **(5 puntos).**

   $$\frac{dq_j}{dt} = [q_j, H] \qquad \frac{dp_j}{dt} = [p_j, H]$$

   (c) **(5 puntos).**

   $$[p_l, p_j] = 0 \qquad [q_l, q_j] = 0$$

   (d) **(5 puntos).**

   $$[q_l, p_j] = \delta_{l,j}$$

   (e) **(5 puntos).** Demuestre que los corchetes de Poisson son invariantes bajo una transformación canónica.

(f) (5 puntos). Explique y de dos ejemplos sobre del significado del teorema de Noether.

SOLUCION

(a) Usando la definición de la derivada total de la función g, y las ecuaciones canonicas, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{dg}{dt} &= \frac{\partial g}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial g}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial t} \right) \\
\frac{dg}{dt} &= \frac{\partial g}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial g}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial g}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k} \right) \\
\frac{dg}{dt} &= \frac{\partial g}{\partial t} + [g, H]
\end{aligned}$$

(b) Se tiene que recordar que $\frac{\partial q_j}{\partial q_k} = \delta_{jk}$ y que $\frac{\partial q_j}{\partial p_k} = 0$ y que el corchete de Poisson es $[g, H] = \sum_k \left(\frac{\partial g}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial g}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k} \right)$

$$\begin{aligned}
\dot{q}_j &= \frac{\partial q_j}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_j} \\
[q_j, H] &= \sum_k \left(\frac{\partial q_j}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial q_j}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k} \right) = \sum_k \left(\delta_{jk}\frac{\partial H}{\partial p_k} - 0 \right) = \frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j
\end{aligned}$$

Siguiendo el mismo procedimiento que antes y recordando que $\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$, se tiene que

$$[p_j, H] = \sum_k \left(\frac{\partial p_j}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial p_j}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k} \right) = \sum_k \left(0 - \delta_{jk}\frac{\partial H}{\partial q_k} \right) = -\frac{\partial H}{\partial q_j} = \dot{p}_j$$

(c) Teniendo en cuenta nuevamente la definición del corchete de Poisson

$$[p_k, p_j] = \sum_l \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_l}\frac{\partial p_j}{\partial p_l} - \frac{\partial p_k}{\partial p_l}\frac{\partial p_j}{\partial q_l} \right)$$

como cada una de las variables no dependen entre si, es decir $\frac{\partial p_k}{\partial q_l} = 0$, entonces el lado derecho de la ecuación anterior es cero y $[p_k, p_j] = 0$. El mismo procedimiento se sigue para la otra variable conjugada

$$[q_k, q_j] = \sum_l \left(\frac{\partial q_k}{\partial q_l}\frac{\partial q_j}{\partial p_l} - \frac{\partial q_k}{\partial p_l}\frac{\partial q_j}{\partial q_l} \right)$$

como las variables no dependen entre si, es decir $\frac{\partial q_k}{\partial p_l} = 0$, entonces el lado derecho de la ecuación anterior es cero y $[q_k, q_j] = 0$.

(d) Se sigue usando la definición de los corchetes de Poisson

$$[q_k, p_j] = \sum_l \left(\frac{\partial q_k}{\partial q_l} \frac{\partial p_j}{\partial p_l} - \frac{\partial q_k}{\partial p_l} \frac{\partial p_j}{\partial q_l} \right) = \sum_l \delta_{kl} \delta_{jl} = \delta_{kj}$$

(e) Para demostrar esto supondré que existen otras variables (Q, P, t), que son variables independientes. Usando la definición del corchete de Poisson, se tiene

$$\begin{aligned}
[A, B]_{q,p} &= \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial A}{\partial q_i} \\
&= \left(\frac{\partial A}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} + \frac{\partial A}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial q_i} \right) \left(\frac{\partial B}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} + \frac{\partial B}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial p_i} \right) - \\
&\quad \left(\frac{\partial B}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} + \frac{\partial B}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial q_i} \right) \left(\frac{\partial A}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} + \frac{\partial A}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial p_i} \right) \\
&= \frac{\partial A}{\partial Q_j} \frac{\partial B}{\partial Q_k} [Q_j, Q_j] + \frac{\partial A}{\partial Q_j} \frac{\partial B}{\partial P_k} [Q_j, P_k] - \frac{\partial B}{\partial Q_j} \frac{\partial A}{\partial P_k} [Q_j, P_k] + \frac{\partial A}{\partial P_j} \frac{\partial B}{\partial P_k} [P_j, P_k] \\
&= \left(\frac{\partial A}{\partial Q_j} \frac{\partial B}{\partial P_k} - \frac{\partial B}{\partial Q_j} \frac{\partial A}{\partial P_k} \right) \delta_{jk} = [A, B]_{Q,P}
\end{aligned}$$

Por lo tanto el corchete de Poisson, cuando se aplica a algún observable físico, es invariante bajo una transformación canónica.

(f) El teorema de Noether demuestra que a cada simetria quesea continua le corresponde una cantidad asociada que se conserva y viceversa. Por ejemplo si existe en el lagrangiano invariancia de traslación el momento líneal se conserva. Si existe en el Lagrangiano invariancia temporal la energía se conserva.

EXAMEN ESCRITO

Pregunta	NOTA/100	NOTA ESTUDIANTE/100	Comentarios
1			
2			
3			
4			
5			
Nota Final			

EXAMEN ORAL

Pregunta	Puntaje	Pregunta escogida	Habilidad matemática	Interpretación cualitátiva	Análisis cuantitátivo	Habilidad, discusión y capacidad crítica	Comentarios
(1)		.					
(2)		.					
(3)		.					
(4)		.					
(5)		.					

ELECTROMAGNETISMO

FÓRMULAS GENERALES

El operador $\vec{\nabla}$ En coordenadas cartesianas (x, y, z):

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z \quad , \quad \mathrm{grad} f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\mathrm{div}\ \vec{a} = \vec{\nabla}\cdot\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad , \quad \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\mathrm{rot}\ \vec{a} = \vec{\nabla}\times\vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$$

En coordenadas cilindricas (r, φ, z) :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z \quad , \quad \mathrm{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\mathrm{div}\ \vec{a} = \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{a_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad , \quad \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\mathrm{rot}\ \vec{a} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\varphi + \left(\frac{\partial a_\varphi}{\partial r} + \frac{a_\varphi}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_z$$

En coordenadas esféricas (r, θ, φ):

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} &= \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi \\
\mathrm{grad} f &= \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi \\
\mathrm{div}\ \vec{a} &= \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{2a_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{a_\theta}{r\tan\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \\
\mathrm{rot}\ \vec{a} &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \theta} + \frac{a_\theta}{r\tan\theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial r} - \frac{a_\varphi}{r}\right)\vec{e}_\theta + \\
&\quad \left(\frac{\partial a_\theta}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_\varphi \\
\nabla^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\tan\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}
\end{aligned}$$

FÓRMULAS ESPECÍFICAS

Recuerde que debe ser explicito en el desarrollo de cada uno de los pasos realizados.

1. Ecuaciones de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \ , \ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{\jmath} + \epsilon_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \ , \ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_{+} - \vec{D}_{-}) = \sigma \ , \ \hat{n} \cdot (\vec{B}_{+} - \vec{B}_{-}) = 0$$

$$\hat{n} \times (\vec{E}_{+} - \vec{E}_{-}) = 0 \ , \ \hat{n} \times (\vec{H}_{+} - \vec{H}_{-}) = \vec{\kappa}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \ , \ \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu \vec{H}$$

2. Fuerza magnética y campo magnético de dipolos.

$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{1}{r^3} \left[3(\vec{m}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \vec{m}_1 \right] \tag{10}$$

$$\vec{F} \ = \ \nabla(\vec{m}_2 \cdot \vec{B}) \tag{11}$$

3. Onda progresiva

$$E_i = E_o \mathrm{e}^{j(\omega t - kx)} \ , \ \vec{B} = \frac{k}{\omega} \hat{n} \times \vec{E} \ , \ k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \sin x$$

4. Polinomios de Legendre

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn}$$

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}P_n(x)\right] + n(n+1)P_n(x) = 0$$

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]$$

$$(2n+1)P_n(x) = \frac{d}{dx}\left[P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)\right]$$

$$(x^2-1)\frac{d}{dx}(x^2-1)^n = 2nx(x^2-1)^n$$

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 (x-1)^{n-k}(x+1)^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{-n-1}{k}\left(\frac{1-x}{2}\right)^k = \\ & 2^n \cdot \sum_{k=0}^{n} x^k \binom{n}{k}\binom{\frac{n+k-1}{2}}{n} \end{aligned}$$

n	$P_n(x)$
0	1
1	x
2	$(3x^2-1)/2$
3	$(5x^3-3x)/2$
4	$(35x^4-30x^2+3)/8$
5	$(63x^5-70x^3+15x)/8$

Examen de Conocimientos de Doctorado
Electromagnétismo.
Martes 15 de Abril (2013). Horario: 8AM-12M.

Nombre: ______________________________

Código: ________________

1. **(10 puntos)** (PREGRADO). Considere un cilindro sólido, infinitamente largo de radio R, cargado uniformemente con una carga positiva, en donde la densidad de carga por unidad de volumen es ρ.

   (a) **(4 puntos).** Encuentre la ecuación que describe el campo eléctrico $\vec{E}$ en todo el espacio.

   (b) **(4 puntos).** Definiendo $V = 0$ sobre la superficie del cilindro, calcule el potencial V en todo el espacio.

   (c) **(2 puntos).** Grafique $|\vec{E}|$ y V como función de la distancia al eje del cilindro r, mostrando los valores para $r = 0$, $r = R$, y $r = 3R$.

SOLUCION

(a) El problema tiene una simetría cilíndrica, asi que se puede usar la ley de Gauss para resolver el problema.

Para $r > R$:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_o}. \tag{12}$$

En donde se escoge la superficie de Gauss como un cilindro de radio r y largo L, luego:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 2\pi\, r\, L\, E. \tag{13}$$

Por otro lado, la carga encerrada por esa superficie de Gauss es proporcional al volumen del cilindro encerrado, $V = \pi\, R^2\, L$. Conocemos la densidad de carga por unidad de volumen:

$$\rho = \frac{dq}{dV} = \frac{Q_{enc}}{\pi\, R^2\, L}. \tag{14}$$

Usando las ecuaciones 13 y 14 se encuentra:

$$2\pi\, r\, L\, E = \frac{\rho\, \pi\, R^2\, L}{\epsilon_o} \tag{15}$$

luego:

$$E = \frac{\rho}{2\epsilon_o} \frac{R^2}{r} \tag{16}$$

Por simetría sabemos que el campo eléctrico apunta en la dirección radial hacia afuera, luego, para $r > R$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_o}\frac{R^2}{r}\hat{\mathbf{r}}} \tag{17}$$

Para $r < R$ se puede seguir el mismo razonamiento que para $r > R$, sin embargo el volumen encerrado por la superficie de Gauss es $V = \pi r^2 L$, por lo tanto la carga encerrada es:

$$Q_{enc} = \rho\,\pi\,r^2\,L \tag{18}$$

y para $r < R$:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_o} r\,\hat{\mathbf{r}}} \tag{19}$$

(b) Dado que el campo eléctrico apunta en dirección radial se puede escribir el potencial como:

$$V(r) = -\int_i^f \mathbf{E}(r')\cdot d\mathbf{r}' \tag{20}$$

Para $r > R$ el potencial decrece como función de r. Como $V(R) = 0$ es máximo, los valores de $V(r > R)$ deben ser negativos, por lo tanto:

$$V(r) - V(R) = -\int_R^r \mathbf{E}(r')\cdot d\mathbf{r}' = -\int_R^r \frac{\rho}{2\epsilon_o}\frac{R^2}{r'}\,dr' = \frac{-\rho\,R^2}{2\epsilon_o}\left[\ln\frac{r}{R}\right] \tag{21}$$

es decir:

$$\boxed{V(r) = \frac{\rho\,R^2}{2\epsilon_o}\ln\frac{R}{r}.} \tag{22}$$

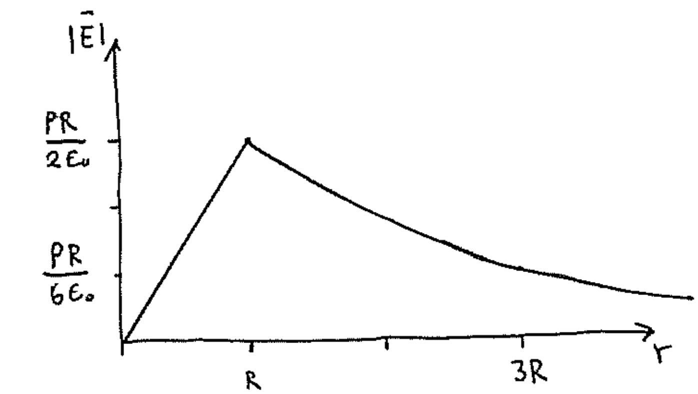
Para $r < R$ el potencial incrementa como función de r, luego el potencial debe ser positivo.

$$V(r) - V(R) = -\int_R^r \mathbf{E}(r')\cdot d\mathbf{r}' = -\int_R^r \frac{\rho}{2\epsilon_o} r'\,dr' = \frac{\rho}{2\epsilon_o}\left[R^2 - r^2\right]. \tag{23}$$

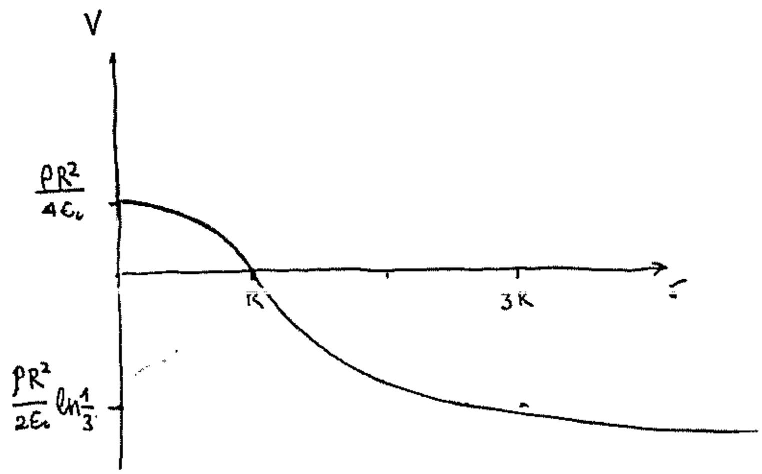
$$\boxed{V(r) = \frac{\rho}{2\epsilon_o}\left[R^2 - r^2\right].} \tag{24}$$

(c)

FALTA!!

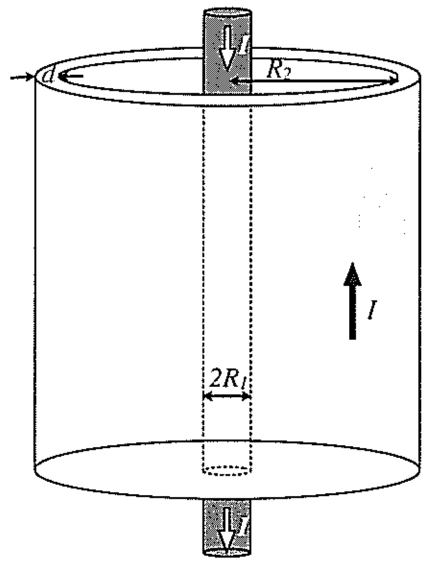


|E|
ρR/2ε₀
ρR/6ε₀
R
3R
r



V
ρR²/4ε₀
R
3R
ρR²/2ε₀ ln 1/3

2. **(10 puntos)** (PREGRADO). Considere un cable coaxial hecho de un alambre hueco con radio interno R_2 y una pared de grosor d. Dentro de éste, se encuentra un alambre de radio R_1, orientado con el eje de simetría del alambre hueco. Existe una corriente



I que fluye por el alambre interno hacia abajo. Además existe una corriente I en el alambre hueco que fluye hacia arriba, como se muestra en la figura. Asuma que la densidad de corriente es homogénea sobre el volumen de cada uno de los alambres y que $\vec{B}$ representa el campo magnético.

(a) **(3 puntos).** Encuentre $\vec{B}$ para $r < R_1$.

(b) **(3 puntos).** Encuentre $\vec{B}$ para $R_1 < r < R_2$.

(c) **(3 puntos).** Encuentre $\vec{B}$ para $R_2 < r < R_2 + d$.

(d) **(1 punto).** Encuentre $\vec{B}$ para $R_2 + d < r$.

SOLUCION

(a) Para cada una de las partes se puede usar la ley de Ampère,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_o I_{enc}. \tag{25}$$

Si se escoge el lazo de Ampère como un círculo de radio r con su eje de simetría paralelo al eje de simetría de los alambres, es posible resolver la integral para:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B\, 2\pi r. \tag{26}$$

Aqui $\vec{B}$ tiene la dirección azimutal, $\hat{\phi}$. Para encontrar la corriente encerrada es necesario tener en cuenta que la densidad de corriente es homogénea sobre el alambre central. Por lo tanto:

$$\sigma = \frac{I}{\pi R_1^2} = \frac{I_{enc}}{\pi r^2}, \tag{27}$$

con esto se encuentra que:

$$I_{enc} = I \frac{r^2}{R_1^2}. \tag{28}$$

Finalmente, usando la ley de Ampère:

$$B\, 2\pi r = -\mu_o I \frac{r^2}{R_1^2} \tag{29}$$

en donde el signo menos de la parte de la mano derecha de la igualdad viene de la regla de la mano derecha. Con esto encontramos que, para $r < R_1$:

$$\boxed{\vec{B} = \frac{-\mu_o}{2\pi R_1^2} I\, r\, \hat{\phi}} \tag{30}$$

(b) Para $R_1 < r < R_2$ es posible escoger un lazo de Ampère similar al de la pregunta anterior. En este caso $I_{enc} = I$. Escribiendo la ley de Ampère se encuentra:

$$B\, 2\pi r = -\mu_o I. \tag{31}$$

Por lo tanto, para $R_1 < r < R_2$:

$$\boxed{\vec{B} = \frac{-\mu_o}{2\pi} \frac{I}{r}\, \hat{\phi}} \tag{32}$$

(c) En este caso es posible usar el mismo tipo de lazo para usar la ley de Ampère. Sin embargo, la corriente total encerrada será la suma de las corrientes sobre el alambre interno $(-I)$ y la que encierra el lazo dentro del alambre externo(I_2): $I_{enc} = -I + I_2$. Similarmente al primer punto sabemos que la densidad de corriente es homogénea sobre el alambre hueco, por lo tanto para calcular I_2:

$$\sigma_2 = \frac{I}{\pi\left((R_2+d)^2 - R_2^2\right)} = \frac{I_2}{\pi\left(r^2 - R_2^2\right)}. \tag{33}$$

Con esto se encuentra que :

$$I_2 = I \frac{r^2 - R_2^2}{2R_2 d + d^2}, \tag{34}$$

así que la corriente encerrada:

$$I_{enc} = I\left(\frac{r^2 - R_2^2}{2R_2 d + d^2} - 1\right), \tag{35}$$

Usando la ley de Ampère el vector de campo magnético puede ser escrito como:

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_o}{2\pi\, r} I\left(\frac{r^2 - R_2^2}{2R_2 d + d^2} - 1\right)\hat{\phi}} \tag{36}$$

(d) Para encontrar $\vec{B}$ en el caso de $r > R_2 + d$, la corriente encerrada es $I_{enc} = -I + I = 0$. Por lo tanto el campo magnético es nulo:

$$\boxed{\vec{B} = 0} \tag{37}$$

3. **(25 puntos)** (POSGRADO). Un disco de radio R, hecho de un material no-conductor, tiene una masa M y una densidad de carga superficial $\sigma = \sigma_o r/R$, en donde r es la distancia al centro del disco y σ_0 es una constante. El disco da vueltas con una velocidad angular $\vec{\omega}$ normal a la superficie del disco a lo largo del eje de simetría del mismo.

   (a) **(7 puntos).** Calcular el momento magnético, $\vec{\mu}$, del disco.

   (b) **(7 puntos).** Calcular el valor de la carga total Q y expresar $\vec{\mu}$ en términos de Q.

   (c) **(7 puntos).** El disco tiene una densidad superficial de masa $\sigma_m = M\sigma/Q$. Calcular el momento de inercia, I.

   (d) **(4 puntos).** Encuentre la relación entre el momento magnético, $\vec{\mu}$, y la magnitud del momento angular.

SOLUCION

(a) El disco se puede dividir en anillo de ancho dr. Una vez se sabe cual es la corriente sobre cada uno de los anillos, se puede integrar y calcular el momento magnético del disco. Para un anillo de radio $r < R$:

$$dQ = \sigma\, dA = \sigma\, 2\pi\, r\, dr = \sigma_o\, 2\pi\, r^2/R\, dr \tag{38}$$

Para calcular la corriente en un anillo:

$$dI = \frac{dq}{dt} = \frac{dQ}{T} = \sigma_o\, 2\pi\, r^2/R\, \frac{\omega}{2\pi} dr = \sigma_o\, \omega \frac{r^2}{R} dr \tag{39}$$

El área encerrada por un anillo de radio r es πr^2, así que el momento magnético de un anillo se puede escribir como:

$$d\mu = dI\, \pi r^2 \tag{40}$$

Con esto se puede calcular el momento magnético del disco:

$$\mu = \frac{\pi\,\sigma_o\omega}{R}\int_0^R r^4\,dr = \frac{\pi\,\sigma_o\omega}{R}\frac{R^5}{5} \tag{41}$$

$$\boxed{\vec{\mu} = \pi\,\sigma_o\omega\frac{R^4}{5}\hat{\mathbf{z}}} \tag{42}$$

(b) Se puede calcular la carga total del disco como:

$$Q = \int_0^R \sigma\,2\pi\,r\,dr = \int_0^R \sigma_o\frac{r}{R}\,2\pi\,r\,dr = \frac{2\pi\sigma_o}{R}\int_0^R r^2\,dr \tag{43}$$

así que la carga total es

$$Q = \frac{2\pi\,\sigma_o}{3}R^2 \tag{44}$$

y por lo tanto el momento magnético en función de la carga total es:

$$\boxed{\vec{\mu} = \frac{3}{10}Q\,R^2\,\omega\,\hat{\mathbf{z}}} \tag{45}$$

(c) La densidad de masa es:

$$\sigma_m = \sigma_o\,\frac{M}{Q}\frac{r}{R} = \frac{dM}{dA}, \tag{46}$$

luego:

$$I = \int r^2\,dM = \int r^2\,\sigma_m\,dA = \int_0^R r^2\,\frac{\sigma_o\,M}{R\,Q}\,r\,(2\pi\,r\,dr) = \frac{2\pi\,\sigma_o\,M}{R\,Q}\int_0^R r^4\,dr \tag{47}$$

$$I = \pi\,\sigma_o\frac{2\,M}{Q}\frac{R^4}{5} = \pi\,\sigma_o\,2M\frac{R^4}{5}\,\frac{3}{2\pi\,\sigma_o}R^{-2} = \frac{3}{5}MR^2 \tag{48}$$

(d) La magnitud delmomento angular es: $L = I\omega$, es decir:

$$L = \left(\frac{3M}{5}\right)R^2\,\omega \tag{49}$$

por lo que se puede escribir:

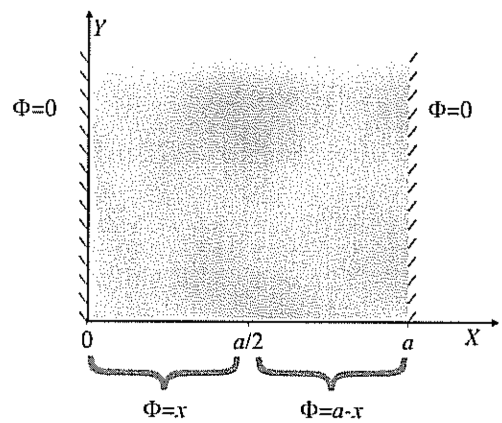
$$\boxed{\frac{L}{\mu} = \frac{3M}{5}\frac{10}{3Q} = \frac{2M}{Q}} \tag{50}$$

4. **(30 puntos)** (POSGRADO). La figura muestra una cinta larga semi-infinita de ancho a, hecha de un material resistente. El potencial eléctrico, ϕ, satisface la ecuación de Laplace en la cinta y está sujeto a las siguientes condiciones:

$$\lim_{y\to\infty} \phi = 0$$
$$\phi(x=0) = 0$$
$$\phi(x=a) = 0,$$

para y=0:

$$\phi(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \le x \le a/2 \\ a - x & \text{si } a/2 \le x \le a. \end{cases} \tag{51}$$



(a) **(20 puntos)** (POSGRADO). Use separación de variables para encontrar ϕ sobre toda la cinta.

(b) **(10 puntos).** Si la superficie tiene una resistividad ρ, encuentre una expresión para la corriente total entrando a la cinta por el lado $x = 0$.

SOLUCION

(a) El potencial cumple la equación de Laplace, por lo tanto si tomamos $\phi(x, y) = X(x)Y(y)$:

$$\nabla^2\phi = 0 = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \tag{52}$$

Así que necesariamente existe una constante k tal que:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -k^2 \tag{53}$$

y

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = k^2 \tag{54}$$

por lo tanto las soluciones para estas dos ecuaciones diferenciales son:

$$X(x) = A\,\cos kx + B\,\sin kx \tag{55}$$

$$Y(y) = C\,e^{-ky} + D\,e^{ky} \tag{56}$$

Ahora se pueden usar las condiciones de frontera para encontrar los valores de k, A, B, C y D.
Primero, sabemos que

$$\lim_{y\to\infty} \phi = 0, \tag{57}$$

luego

$$\lim_{y\to\infty} Y(y) = 0 + D\,e^{ky} = 0. \tag{58}$$

Adicionalmente, $\phi(x=0)=0$, y, $\phi(x=a)=0$. Reemplazando en la primera expresión:

$$X(x=0) = A\,\cos 0 + B\,\sin 0 = A + 0 = 0. \tag{59}$$

Y reemplazando en la segunda:

$$X(x=a) = B\,\sin ka = 0, \tag{60}$$

luego $ka = n\pi$, en donde n es un entero positivo. Es decir:

$$X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n\,\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \tag{61}$$

Por último la función para el potencial para $y=0$ se define como:

$$\phi(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \le x \le a/2 \\ a-x & \text{si } a/2 \le x \le a \end{cases} \tag{62}$$

En este caso se puede encontrar la tansformada de Fourier de la función para igualar los coeficientes y encontrar el valor de C_n y B_n. Para $y=0$:

$$\phi(x, y=0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\,B_n\,\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \tag{63}$$

Esta sumatoria debe ser equivalente a la función por partes descrita en el enunciado.

Para escribir una función cualquiera $f(x)$ en series de senos y cosenos es posible usar las transformaciones de Fourier:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} g_m \cos(mx) + h_m \sin(mx). \tag{64}$$

En está expresión los coeficientes se pueden encontrar a partir de las expresiones:

$$g_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x') \cos(mx') dx' \tag{65}$$

y

$$h_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x') \sin(mx') dx' \tag{66}$$

Como ya se encontró antes, el valor de g_m debe ser nulo si se cumple que $\phi(x = 0) = 0$ y $\phi(x = a) = 0$, asi que se puede escribir :

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq a/2 \\ a - x & \text{si } a/2 \leq x \leq a \end{cases} \tag{67}$$

y con esto encontrar el valor de h_m:

$$h_m = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} x' \sin(mx') dx' + \int_{\pi}^{2\pi} (a - x') \sin(mx') dx' \right) \tag{68}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} h_m \pi &= \frac{1}{m^2} \left(-mx \cos mx + \sin mx \right) \Big|_0^{\pi} \\ &+ \frac{-a}{m} \cos(mx) \Big|_{\pi}^{2\pi} \\ &+ \frac{-1}{m^2} \left(-mx \cos mx + \sin mx \right) \Big|_{\pi}^{2\pi} \end{aligned} \tag{69}$$

$$\begin{aligned} h_m \pi &= \frac{1}{m^2} \left(-m\pi(-1)^m + 0 + 0 - 0 \right) \\ &+ \frac{-a}{m} \left(1 - (-1)^m \right) \\ &+ \frac{-1}{m^2} \left(-2\pi m + 0 + m\pi(-1)^m - 0 \right). \end{aligned} \tag{70}$$

$$h_m \pi = \frac{1}{m^2} \left(-2m\pi(-1)^m + 2\pi m \right) + \frac{a}{m} \left((-1)^m - 1 \right) \tag{71}$$

$$= \frac{2\pi}{m} \left(1 - (-1)^m \right) + \frac{a}{m} \left((-1)^m - 1 \right) \tag{72}$$

$$h_m \pi = \begin{cases} 0, & \text{si } m \text{ es par} \\ \frac{4\pi}{m} - \frac{2a}{m} & \text{si } m \text{ es impar} \end{cases} \tag{73}$$

es decir,

$$\phi(x,y=0)=\sum_{m\text{ impar}}\left(\frac{4}{m}-\frac{2a}{m\pi}\right)\sin mx=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\,B_n\,\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \tag{74}$$

dando nuevas restricciones a n. por ejemplo $n\pi/a$ debe ser un número impar:$2m'+1=n\pi/a=m$, ó

$$m=\frac{n\pi}{a}, \tag{75}$$

Finalmente,

$$\phi(x,y)=\sum_{n\text{ impar}}\left(\frac{2\pi-a}{n\pi^2}\right)2a\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\,e^{\frac{n\pi}{a}y} \tag{76}$$

(b) La densidad de corriente superficial es :

$$\vec{\sigma}(x,y)=\frac{1}{\rho}\vec{E}=\frac{-1}{\rho}\overrightarrow{\nabla\phi} \tag{77}$$

Por lo tanto la corriente que atraviesa la línea vertical x es:

$$I(x)=\int_0^{\infty}\sigma_x(x,y)dy. \tag{78}$$

Primero se puede calcular la componenete en x de la densidad de corriente:

$$\sigma_x=2\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^{l+1}\cos\left(\frac{(2l+1)\pi}{a}x\right)\exp\left(\frac{(2l+1)\pi}{a}y\right) \tag{79}$$

Lo que implica:

$$I(x) = 2\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^{l+1}\cos\left(\frac{(2l+1)\pi}{a}x\right)\int_0^{\infty}\exp\left(\frac{(2l+1)\pi}{a}y\right)dy \tag{80}$$

$$= 2\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{l+1}a}{(2l+1)\pi}\cos\left(\frac{(2l+1)\pi}{a}x\right) \tag{81}$$

Y para encontrar la corriente entrando por el lado izquierdo, $x=0$:

$$\boxed{I_{iz}=\frac{2a}{\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{l+1}}{(2l+1)}.} \tag{82}$$

La sumatoria en la expresión de la corriente:

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{l+1}}{(2l+1)}=\frac{4}{\pi}. \tag{83}$$

lo que simplifica la ecuación para la corriente:

$$I_{iz}=\frac{8a}{\pi^2}. \tag{84}$$

5. **(25 puntos)** (POSGRADO). Suponga que una partícula con carga q se mueve en el vacío describiendo un círculo de radio a en el plano xy, con una velocidad angular ω y que, para $t = 0$, su ángulo azimutal es $\phi(t = 0) = \phi_0$. Asuma $\omega a < c$

   (a) **(7 puntos)**. ¿Cuál es el vector potencial en el centro del disco, (x,y,z)=(0,0,0) para un tiempo t?
   Suponga ahora que hay $N > 1$ partículas cargadas moviendose en el círculo y para $t = 0$ sus ángulos azimutales son $\phi_{0n} = 2\pi\frac{n}{N}$, $n = 1, 2, ...N-1, N$

   (b) **(8 puntos)**. ¿Cuál es el vector potencial ahora? use $I = N\,q\frac{\omega}{2\pi}$.

   (c) **(5 puntos)**. ¿Qué pasa en el límite cuando $N \to \infty$ y $q \to 0$ pero I permanece constante?

   (d) **(5 puntos)**. ¿Cuál es el vector potencial magnetostático en el centro de un aro que lleva una corriente constante I?

SOLUCION

(a) La posición y la velocidad como función de tiempo son:

$$\vec{x}(t) = a\left(\cos\left(\omega t + \phi_0\right)\vec{e}_x + \sin\left(\omega t + \phi_0\right)\vec{e}_y\right) = a\,\vec{e}(t, \phi_0)$$

y

$$\vec{v}(t) = a\,\omega\left(-\sin\left(\omega t + \phi_0\right)\vec{e}_x + \cos\left(\omega t + \phi_0\right)\vec{e}_y\right) = a\,\omega\,\vec{e}_z \times \vec{e}(t, \phi_0)$$

La densidad de corriente se puede escribir entonces como:

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = q\vec{v}(t, \phi_0)\,\delta^3(\vec{r} - a\,\vec{e}(t, \phi_0)) = q\,a\,\omega\,\vec{e}_z \times \vec{e}(t, \phi_0)\,\delta^3(\vec{r} - a\,\vec{e}(t, \phi_0))$$

Definiendo $t_r = t - \frac{\vec{r}-\vec{r'}}{c}$, en donde $|\vec{r} - \vec{r'}| = a$ en el origen, se puede encontrar entonces una ecuación para $\vec{A}$:

$$\begin{aligned}
\vec{A}(\vec{r} = 0, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r'}, t_r)}{\vec{r} - \vec{r'}} d^3\vec{r'} && (85)\\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{q\,a\,\omega\,\vec{e}_z \times \vec{e}(t_r, \phi_0)\,\delta^3(\vec{r'} - a\,\vec{e}(t_r, \phi_0))}{\vec{r} - \vec{r'}} d^3\vec{r'} && (86)\\
&= \frac{\mu_0\,q\,a\,\omega}{4\pi}\int \frac{\vec{e}_z \times \vec{e}(t - a/c, \phi_0)}{a}\,\delta^3(\vec{r'} - a\,\vec{e}(t_r, \phi_0))\,d^3\vec{r'} && (87)\\
&= \frac{\mu_0\,q\,\omega}{4\pi}\left(\vec{e}_z \times \vec{e}(t - a/c, \phi_0)\right) && (88)
\end{aligned}$$

es decir:

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r} = 0, t) = \frac{\mu_0\,q\,\omega}{4\pi}\left(\vec{e}_z \times \vec{e}(t - a/c, \phi_0)\right)}$$

(b) Para N partículas girando el vector potencial se puede escribir como:

$$\vec{A}_N(\vec{r}=0,t) = \frac{\mu_0}{2}\frac{N\,q\,\omega}{2\pi}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\vec{e}_z \times \vec{e}(t-a/c,\phi_{0n})\right)$$

es decir:

$$\boxed{\vec{A}_N(\vec{r}=0,t) = \frac{\mu_0}{2}\frac{I}{N}\sum_{n=1}^{N}\vec{e}_z \times \vec{e}(t-a/c,\phi_{0n})}$$

(c) Cuando $N \to \infty$ la sumatoria que caracteríza al $\vec{A}$ es un promedio de las direcciones del producto cruz, es decir es cero.

$$\boxed{\lim_{N\to\infty} \vec{A}_N(\vec{r}=0,t) = 0}$$

(d) Para magnetostática:

$$\begin{aligned}\vec{A}_{ms}(\vec{r}=0) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}d^3\vec{r'} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r'})}{|\vec{r'}|}d^3\vec{r'} \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{A}_{ms} = 0}$$

Lo que es igual al resultado que se obtuvo cuando $N \to \infty$