Examen de Conocimientos de Doctorado. 9-13 de Julio. (2012)

Universidad de los Andes
Departamento de Física

José Alejandro García
Natalia Gómez
Chad Leidy
Ferney Rodríguez

FISICA TERMICA

FORMULAS GENERALES

El operador $\vec{\nabla}$ En coordenadas cartesianas (x, y, z):

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z \quad , \quad \mathrm{grad} f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\mathrm{div}\ \vec{a} = \vec{\nabla}\cdot\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad , \quad \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\mathrm{rot}\ \vec{a} = \vec{\nabla}\times\vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$$

En coordenadas cilindricas (r, φ, z) :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z \quad , \quad \mathrm{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\mathrm{div}\ \vec{a} = \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{a_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad , \quad \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\mathrm{rot}\ \vec{a} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\varphi + \left(\frac{\partial a_\varphi}{\partial r} + \frac{a_\varphi}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_z$$

En coordenadas esféricas (r, θ, φ):

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} &= \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi \\
\mathrm{grad} f &= \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi \\
\mathrm{div}\ \vec{a} &= \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{2a_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{a_\theta}{r\tan\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \\
\mathrm{rot}\ \vec{a} &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \theta} + \frac{a_\theta}{r\tan\theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial r} - \frac{a_\varphi}{r}\right)\vec{e}_\theta + \\
&\quad \left(\frac{\partial a_\theta}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_\varphi \\
\nabla^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\tan\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}
\end{aligned}$$

FORMULAS ESPECIFICAS

Recuerde que debe ser explicito en el desarrollo de cada uno de los pasos realizados.

1. Funciones de estado y relaciones de Maxwell

Energía interna:	U	$dU = TdS - pdV$
Entalpía:	$H = U + pV$	$dH = TdS + Vdp$
Enrgía libre:	$F = U - TS$	$dF = -SdT - pdV$
Entalpía libre de Gibbs :	$G = H - TS$	$dG = -SdT + Vdp$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V , \quad \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p , \quad \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T , \quad \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T$$

$$TdS = C_V dT + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV \quad \text{y} \quad TdS = C_p dT - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dp$$

2. Para un gas ideal:

$$S_m = C_V \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + R\ln\left(\frac{V}{V_0}\right) + S_{m0} \quad \text{y} \quad S_m = C_p \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - R\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) + S'_{m0}$$

3. Ecuaciones de Helmholtz:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p \quad , \quad \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = V - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

para una superficie muy grande: $\mathrm{d}W_{\mathrm{rev}} = -\gamma dA$, en donde la tensión superficial es γ

$$\gamma = \left(\frac{\partial U}{\partial A}\right)_S = \left(\frac{\partial F}{\partial A}\right)_T$$

4. Valores esperados en términos de la función de partición.

$$\begin{aligned} E &= -\frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta} \quad , \quad p = kT\frac{\partial \ln(Z)}{\partial V} \quad , \quad S = k\ln(Z) - k\beta\frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta} \quad , \quad C_V = k\beta^2\frac{\partial^2 \ln(Z)}{\partial \beta^2} \\ F &= -kT\ln(Z) \quad , \quad \alpha = \frac{\partial \ln(Z)}{\partial N} \quad , \quad \mu_j = -kT\frac{\partial \ln(Z)}{\partial N_j} \end{aligned}$$

Examen de Conocimientos de Doctorado
Física Térmica.
Horario: 8AM-12M. 9 de Julio. (2012)

Nombre: ____

Código: ______________________

1. **(10 ptos)** (PREGRADO)

   Un mol de gas tipo van der Waals es sometido a un proceso quasiestático. Inicialmente el gas se encuentra a una temperatura T_A^0 y volumen molar v_0, y es llevado a un estado final con temperatura T_A^f y volumen molar v_f. Un segundo sistema esta en contacto térmico con el gas durante todo el proceso. Este segundo sistema tiene volumen fijo y presenta una temperatura inicial de T_B^0. La capacidad calorífica de este segundo sistema depende de la temperatura de la siguiente manera:

   $$C_2(T) = DT$$

   Donde D es una constante conocida.

   Los cambios en energía interna molar y entropía molar del gas van der Waals aparecen a continuación:

   $$\Delta U_A = cR(T_A^f - T_A^0) - \frac{a}{v_f} - \frac{a}{v_0}$$

   $$\Delta S_A = R \ln\left(\frac{v_f - b}{v_0 - b}\right) + c \ln\left(\frac{T_A^f}{T_A^0}\right)$$

   Donde a, b y c son constantes y R es la constante universal de un gas ideal.

   Tomando en cuenta que se quiere extraer la máxima cantidad de trabajo de este proceso:

   (a) **(3 puntos)** Encuentre una expresión que describa el cambio total de entropía del proceso.

   (b) **(3 puntos)** Calcule la temperatura final del segundo sistema en el caso en que se maximice el trabajo extraído.

   (c) **(4 puntos)** Encuentre el máximo trabajo que se puede extraer en función de la temperatura final del segundo sistema y las condiciones iniciales.

SOLUCION

(a) Para este ejercicio, podemos definir el cambio en la energía interna y el cambio en la entropa del primer sistema como:

$$\Delta U_1 = cR(T^f_{gas} - T^0_{gas}) - \frac{a}{v_f} + \frac{a}{v_0}$$

$$\Delta S_1 = R\ln(\frac{v_f - b}{v_0 - b}) + cR\ln\frac{T^f_{gas}}{T^0_{gas}}$$

Y del segundo sistema podemos definir la energía interna y la entropía como:

$$U_2(T) = \int C_2(T)dT = \frac{1}{2}DT^2 + K$$

$$S_2(T) = \int \frac{C_2(T)}{T}dT = DT + K$$

Donde K es la constante de integración.

Ahora calculamos el cambio en la energía interna y el cambio en la entropía del segundo sistema como:

$$\Delta U_2 = \frac{1}{2}D((T^f_2)^2 - (T^0_2)^2)$$

$$\Delta S_2 = D(T^f_2 - T^0_2)$$

(b) Para determinar T^f_2, se escribe la condición de reversibilidad como:

$$\Delta S_1 + \Delta S_2 = R\ln(\frac{v_f - b}{v_0 - b}) + cR\ln\frac{T^f_{gas}}{T^0_{gas}} + D(T^f_2 - T^0_2) = 0$$

Donde:

$$T^f_2 = T^0_2 - \frac{R}{D}\ln(\frac{v_f - b}{v_0 - b}) - c\frac{R}{D}\ln\frac{T^f_{gas}}{T^0_{gas}}$$

(c) Ahora se puede escribir la relación de conservación de energía, definiendo W_3 como el trabajo máimo extraído del sistema:

$$W_3 + \Delta U_1 + \Delta U_2 = 0$$

Donde

$$W_3 = -\left[\frac{1}{2}D((T^f_2)^2 - (T^0_2)^2)\right] - \left[cR(T^f_{gas} - T^0_{gas}) - \frac{a}{v_f} + \frac{a}{v_0}\right]$$

Para T^f_{gas} conocido, podemos hallar T^f_2 como relación de los demás parámetros.

2. **(10 ptos)** (PREGRADO)

   Asuma que la atmósfera se comporta como un gas ideal, y que la razón entre las capacidades caloríficas $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ es constante.

   (a) **(4 puntos)** Sea y la altura sobre el nivel del mar, muestre que la presión atmosférica decrece debido al aumento de dy, según la expresión

   $$\frac{dP}{p} = -\left(\frac{Mg}{RT}\right) dy$$

   donde M es la masa molar del aire, g es la aceleración gravitacional (la cual puede asumir que es constante en el rango de altura ocupado por la atmósfera) y T es la temperatura en $y = 0$

   (b) **(4 puntos)** Modelando el aire como un gas ideal adiabático, muestre que:

   $$\frac{dP}{p} = \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1}\right)\left(\frac{dT}{T}\right)$$

   (c) **(2 puntos)** Con base en los resultados de a y b, calcule el valor del gradiente de temperatura $\frac{dT}{dy}$ en Kelvin por Kilómetro. Explique si es justificable modelar el sistema como un gas ideal adiabático.
   NOTA: la masa molar del aire es $M = 28.8\frac{g}{mol}$, asumiendo un gas diatómico $c_p = \frac{7}{2}R$, $R = 8.314\frac{J}{mol\,K}$

SOLUCION

(a)

$$P = P_0 - \rho g y$$
$$dP = -\rho g dy$$
$$P = \frac{nRT}{V}$$
$$\frac{dP}{P} = \frac{-V\rho g dy}{nRT}$$

Como $\rho = \frac{m}{V}$ y $M = \frac{m}{n}$, al remplazar y simplificar se obtiene:

$$\frac{dP}{P} = \frac{-Mg}{RT}dy$$

(b) Si se asume que es un gas ideal adiabático, entonces podemos decir que:

$$PV^\gamma = cte$$
$$cte = P\left(\frac{nRT}{P}\right)^\gamma = n^\gamma R^\gamma T^\gamma P^{1-\gamma}$$

Como n y R son constantes, las podemos agrupar en la constante cte, y proponer que:

$$T^\gamma P^{1-\gamma} = cte$$

Diferenciando como un producto, se obtiene que:

$$D(T^\gamma P^{1-\gamma}) = 0$$
$$T^\gamma(1-\gamma)P^{1-\gamma-1}dP + P^{1-\gamma}\gamma T^{\gamma-1}dT = 0$$

Simplificando y organizando términos se llega a:

$$T^\gamma(1-\gamma)P^{-\gamma}dP = -\gamma T^{\gamma-1}P^{1-\gamma}dT$$
$$\frac{P^{-\gamma}}{P^{1-\gamma}}dP = -\frac{\gamma T^{\gamma-1}}{(1-\gamma)T^\gamma}dT$$
$$\frac{dP}{p} = \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)\left(\frac{dT}{T}\right)$$

(c) Dado que $\frac{dP}{p} = \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)\left(\frac{dT}{T}\right)$ y además que $\frac{dP}{P} = \frac{-Mg}{RT}dy$, entonces

$$\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)\left(\frac{dT}{T}\right) = \frac{-Mg}{RT}dy$$

Despejando $\frac{dT}{dy}$, se obtiene:

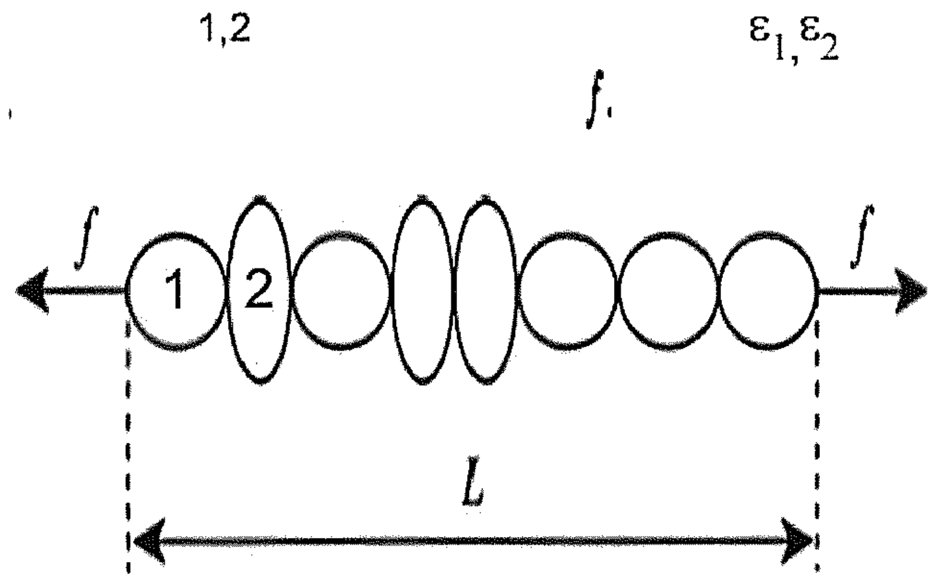
$$\frac{dT}{dy} = -\frac{Mg}{R}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)$$

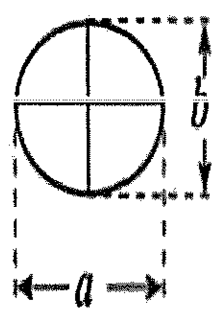
como $c_p - c_v = R$ y $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$, se obtiene que $\gamma = \frac{7}{5}$. Remplazando los demás valores en $\frac{dT}{dy}$, se obtiene:

$$\frac{dT}{dy} = -\frac{(0.028kg/mol)(9.8m/s^2)}{(8.314kg\cdot m^2/s^2\cdot mol\cdot K)}\left(\frac{1.4-1}{1.4}\right)\left(\frac{1000m}{1km}\right) = 9.7K/km$$

3. **(25 ptos)** (POSGRADO)

Considere una cadena unidimensional que consiste de N moléculas que pueden existir en dos configuraciones 1 y 2 con energías correspondientes ε_1 y ε_2 y longitudes a y b, respectivamente. La cadena es sometida a una fuerza de tensión f en cada uno de sus extremos, como se muestra en la figura.





(a) **(5 puntos)** Escriba la función de partición canónica Z_N para el sistema en términos de ε_1, ε_2, a, b, f y β. Donde $\beta = \dfrac{1}{k_b T}$ es el inverso de la temperatura.

(b) **(5 puntos)** Encuentre una expresión para la longitud promedio $\langle L \rangle$ en función de la fuerza de tensión f y la temperatura T.

(c) **(7.5 puntos)** Encuentre los limites de $\langle L \rangle$ para temperaturas altas y bajas, en el caso donde $f = 0$, y discuta las diferencias entre estas dos expresiones, tomando en cuenta que en ausencia de tensión la cadena puede ser descrita como un sistema de dos estados.

(d) **(7.5 puntos)** Encuentre una expresión para la capacidad calórica del sistema sometido a una tensión constante. Para $f = 0$, encuentre cual es el comportamiento de la capacidad calórica para temperaturas altas, y discuta el significado físico del resultado.

SOLUCION

(a) Se consideran dos configuraciones 1 y 2, donde la energía se relaciona como:

$$E_1 = \varepsilon_1 - fa$$

$$E_2 = \varepsilon_2 - fb$$

De esta forma se puede escribir la función de partición como.

$$Z = \left(\sum_{1,2} e^{-E_{1,2}}\right)^N = \left(e^{\beta(fa-\varepsilon_1)} + e^{\beta(fb-\varepsilon_2)}\right)^N$$

(b) Ahora, para calcular la longitud promedio de la cadena en términos de la función de partición, podemos decir que:

$$\langle L \rangle = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial f}\right)_{\beta,N} = \frac{N\left(ae^{\beta(fa-\varepsilon_1)} + be^{\beta(fb-\varepsilon_2)}\right)}{e^{\beta(fa-\varepsilon_1)} + e^{\beta(fb-\varepsilon_2)}}$$

(c) Si la tensión es 0, podemos decir que:
Para $f = 0$

$$\langle L \rangle = N\frac{\left(ae^{-\beta\varepsilon_1} + be^{-\beta\varepsilon_2}\right)}{e^{-\beta\varepsilon_1} + e^{-\beta\varepsilon_2}}$$

$$\langle L \rangle = N\frac{\left(a + be^{\beta(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}\right)}{1 + e^{\beta(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}}$$

Ahora si $\varepsilon_{1,2} \gg \beta$, entonces:

$$\langle L \rangle = N\frac{a+b}{2}$$

Ahora si $\varepsilon_{1,2} \ll \beta$, entonces:

$$\langle L \rangle = N(ae^{-\delta} + b)$$

Donde definimos $\delta = \beta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$

(d) Para calcular la capacidad calorífica, se debe calcular $c_v = \frac{\beta}{T}\frac{\partial^2(\ln Z)}{\partial\beta^2}$, Dado que $\beta = \frac{1}{k_b T}$, y Z como:

$$Z = \left(e^{\beta(fa-\varepsilon_1)} + e^{\beta(fb-\varepsilon_2)}\right)^N$$

$$c_v = \frac{\beta}{T}\frac{\partial^2(\ln Z)}{\partial\beta^2} = \left(\frac{\beta}{T}\right)\frac{N(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + (a+b)f)^2 e^{-\beta(\varepsilon_1+\varepsilon_2-(a+b)f)}}{(e^{\beta(fa-\varepsilon_1)} + e^{\beta(fb-\varepsilon_2)})^2}$$

Para $f = 0$

$$c_v = \frac{\beta N(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 e^{-\beta(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}}{T(e^{-\beta\varepsilon_1} + e^{-\beta\varepsilon_2})^2}$$

Para altas temperaturas $c_v \longrightarrow 0$

4. **(25 ptos)** (POSGRADO)

Considere una superficie con N sitios disponibles. Cada uno de estos sitios puede alojar una molécula de gas. Esta superficie se pone en contacto con un gas ideal con potencial químico μ (determinado por la presión p y la temperatura T) de la siguiente manera:

Asuma que una molécula de gas adsorbida tiene una energía $-\varepsilon_0$ comparado con su estado libre y que las moléculas de gas son indistinguibles.

(a) **(9 puntos)** Encuentre la función de partición gran canónica para la superficie en función del potencial químico del gas libre tomando en cuenta las diferentes configuraciones posibles.

(b) **(8 puntos)** Con esta función de partición, calcule el porcentaje de cubrimiento θ (razón entre moléculas promedio adsorbidas y sitios disponibles en la superficie).

(c) **(8 puntos)** Teniendo en cuenta que la ecuación de estado de un gas ideal esta relacionada al potencial químico de la siguiente manera:

$$\frac{P}{kT} = n = \int_0^{\infty} \frac{2\pi(2m)^{3/2}}{h^3} \sqrt{\varepsilon} e^{\mu/kT} e^{-\varepsilon/kT} d\varepsilon$$

Encuentre una expresión para el porcentaje de cubrimiento en función de presión y temperatura, y describa cualitativamente como varia este porcentaje de cubrimiento al ir variando presión y temperatura.

SOLUCION

(a) Para N_1moleculas de gas adheridas a la superficie hay

$$C_{N_1}^{N} = \frac{N!}{N_1!(N-N_1)!}$$

diferentes configuraciones posibles. La función de partición gran canónica es, por lo tanto

$$\Xi = \sum_{N_1=0}^{N} C_{N_1}^{N} e^{N_1(\mu+\epsilon_0)/kT} = (1 + e^{(\mu+\epsilon_0)/kT})^N$$

(b) El número promedio de moléculas adheridas es

$$\bar{N} = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln \Xi = \frac{N e^{(\mu+\epsilon_0)/kT}}{(1 + e^{(\mu+\epsilon_0)/kT})}$$

Donde $\alpha = -\dfrac{\mu}{kT}$
el porcentaje de cubrimiento es por lo tanto

$$\theta = \frac{\bar{N}}{N} = \frac{1}{(1 + e^{(\mu+\varepsilon_0)/kT})}$$

(c) Tomando en cuenta la ecuación de estado de un gas ideal

$$\frac{P}{kT} = n = \int_0^\infty \frac{2\pi(2m)^{3/2}}{h^3}\sqrt{\varepsilon}e^{\mu/kT}e^{-\varepsilon/kT}d\varepsilon$$

encontramos que

$$e^{\mu/kT} = \frac{P}{kT}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2}$$

por lo tanto

$$\theta = \frac{1}{1 + \dfrac{kT}{P}\left(\dfrac{2\pi mkT}{h^2}\right)e^{-\varepsilon_0/kT}}$$

Al aumentar la presión, el gas tiende a ocupar toda la superficie $\theta = 1$. Para temperaturas altas el gas se desprende de la superficie porque la energía termica domina la energía de adhesión.

5. **(30 ptos)** (POSGRADO)

Una colección de spines S_i, localizados en la *i-esima* posición de un arreglo unidimensional de N sitios puede tomar valores ± 1, e interactúan con un campo magnético externo h. En este sistema, solo uno de los spines S_0 interactúa con constante de acoplamiento J con el resto de los spines. Por lo tanto el Hamiltoniano se puede expresar como:

$$H = -h\sum_{i=0}^{N} S_i - J\sum_{i=1}^{N} S_i S_0$$

(a) **(10 puntos)** Demuestre que la función de partición canónica $Z(T,N)$, se puede expresar de la siguiente manera:

$$Z(T,N) = [e^{\beta h}[2cosh(\beta h + \beta J)]^N + [e^{-\beta h}[2cosh(\beta h - \beta J)]^N$$

donde $\beta = 1/k_B T$ es la temperatura inversa.

(b) **(10 puntos)** Calcule la magnetización del sistema

$$m \equiv \sum_{i=0}^{N} \langle S_i \rangle$$

y la correlación entre S_0 y todas las demás partículas.

$$p \equiv \sum_{i=0}^{N} \langle S_0 S_i \rangle$$

Con base en esto, demuestre que la energía total promedio es $\langle E \rangle = -hm - Jp$

(c) **(10 puntos)** En ausencia de un campo magnético externo, demuestre que$\langle S_i S_j \rangle = \tanh^2(\beta J) = \langle S_0 S_i \rangle \langle S_0 S_j \rangle$. Explique que significado físico tiene este resultado.

SOLUCION

(a) La función de partición para todo N se puede escribir como:

$$Z(T,N) = \sum_{S_1 \ldots S_N = \pm 1} \sum_{S_0 = \pm 1} exp\left(\beta h S_0 + \beta(h + JS_0)\sum_{i=1}^{N} S_i\right)$$

$$Z(T,N) = e^{\beta h}\prod_{i=1}^{N}\left(\sum_{S_i=\pm 1} e^{\beta(h+J)S_i}\right) + e^{-\beta h}\prod_{i=1}^{N}\left(\sum_{S_i=\pm 1} e^{\beta(h-J)S_i}\right)$$

La cual se puede reescribir de la siguiente manera

$$Z(T,N) = e^{\beta h}\left[2\cosh(\beta h + \beta J)\right]^N + e^{-\beta h}\left[2\cosh(\beta h - \beta J)\right]^N$$

para simplificar la notación definimos las siguientes variables

$$A = e^{\beta h}\left[2\cosh(\beta h + \beta J)\right]^N$$

$$B = e^{-\beta h}\left[2\cosh(\beta h - \beta J)\right]^N$$

entonces podemos escribir la función de partición de la siguiente manera

$$Z(T,N) = A + B$$

(b) para calcular la magnetización escribimos

$$m \equiv \sum_{i=0}^{N} \langle S_i \rangle = \frac{\partial(\ln Z)}{\partial(\beta h)}$$

$$\frac{\partial(\ln Z)}{\partial(\beta h)} = \frac{1}{A+B}\left(\frac{\partial A(\beta h)}{\partial \beta h} + \frac{\partial B(\beta h)}{\partial \beta h}\right)$$

$$\frac{\partial(\ln Z)}{\partial(\beta h)} = \frac{1}{A+B}\left(e^{\beta h}(2\cosh(\beta h + \beta J)^N + Ne^{\beta h}(2\cosh(\beta h + \beta J)^{N-1}\sinh(\beta h + \beta J) - e^{-\beta h}(\right.$$

por lo tanto

$$m = \frac{A-B}{A+B} + N\frac{A\tanh(\beta h + \beta J) + B\tanh(\beta h - \beta J)}{A+B}$$

para calcular la correlación entre S_0 y las demás partículas escribimos

$$p \equiv \sum_{i=0}^{N} \langle S_0 S_i \rangle = \frac{\partial(\ln Z)}{\partial(\beta J)}$$

$$\frac{\partial(\ln Z)}{\partial(\beta J)} = \frac{1}{A+B}\left(\frac{\partial A(\beta J)}{\partial \beta J} + \frac{\partial B(\beta J)}{\partial \beta J}\right)$$

$$\frac{\partial(\ln Z)}{\partial(\beta hJ)} = \frac{1}{A+B}\left(Ne^{\beta h}(2\cosh(\beta h + \beta J)^{N-1}\sinh(\beta h + \beta J) - Ne^{-\beta h}(2\cosh(\beta h - \beta J)^{N-1}\mathrm{si}\right.$$

por lo tanto

$$p \equiv N\frac{A\tanh(\beta h+\beta J)-B\tanh(\beta h-\beta J)}{A+B}$$

donde la energía total esta dada por

$$\langle E\rangle = -\frac{\partial(\ln Z)}{\partial\beta} = -\left(\frac{\partial(\ln Z)}{\partial\beta h}\frac{\partial\beta h}{\partial\beta}+\frac{\partial(\ln Z)}{\partial\beta J}\frac{\partial\beta J}{\partial\beta}\right) = -hm - Jp$$

(c) La correlación $\langle S_0S_i\rangle$para $h\to 0$ se calcula

$$\langle S_0S_i\rangle = \frac{p}{N} = \frac{A\tanh(\beta h+\beta J)-B\tanh(\beta h-\beta J)}{A+B}$$

Para $h=0$,

$$\lim_{h\to 0}\langle S_0S_i\rangle = \frac{p}{N} = \frac{[2\cosh(\beta J)]^N\tanh(\beta J)-[2\cosh(-\beta J)]^N\tanh(-\beta J)}{[2\cosh(\beta J)]^N+[2\cosh(-\beta J)]^N}$$

$$\lim_{h\to 0}\langle S_0S_i\rangle = \frac{p}{N} = \frac{[2\cosh(\beta J)]^N\tanh(\beta J)+[2\cosh(-\beta J)]^N\tanh(\beta J)}{[2\cosh(\beta J)]^N+[2\cosh(-\beta J)]^N}$$

$$\lim_{h\to 0}\langle S_0S_i\rangle = \frac{p}{N} = \frac{([2\cosh(\beta J)]^N+[2\cosh(-\beta J)]^N)\tanh(\beta J)}{[2\cosh(\beta J)]^N+[2\cosh(-\beta J)]^N}$$

$$\lim_{h\to 0}\langle S_0S_i\rangle = \tanh(\beta J)$$

Por otro lado

$$\langle S_iS_j\rangle = Z^{-1}\sum_{S_1\cdots S_N=\pm 1}S_iS_j\sum_{S_0=\pm 1}\exp(\beta J\sum_{k=1}^{N}S_kS_0)$$

$$\langle S_iS_j\rangle = Z^{-1}\sum_{S_1\cdots S_N=\pm 1}S_iS_j\prod_{k=1}^{N}e^{\beta JS_k}+Z^{-1}\sum_{S_1\cdots S_N=\pm 1}S_iS_j\prod_{k=1}^{N}e^{-\beta JS_k}$$

Note que la primera contribución genera $N-2$ términos (para $k\neq i,j$) en donde cada término es una suma que resulta en un $2\cosh(\beta J)$, y dos términos adicionales (para $k=i$ y $k=j$) en donde cada termino es una suma que resulta en un $2\sinh(\beta J)$. La segunda contribución genera $N-2$ términos (para $k\neq i,j$) en donde cada término es una suma que resulta en un $2\cosh(\beta J)$, y dos términos adicionales (para $k=i$ y $k=j$) en donde cada término es una suma que resulta en un $-2\sinh(\beta J)$.Adicionalmente sabemos que$Z=2[2\cosh(\beta J)]^N$. Por lo tanto

$$\langle S_i S_j \rangle = \frac{2\cosh^{N-2}(\beta J) 4\sinh^2(\beta J) + 2\cosh^{N-2}(\beta J) 4\sinh^2(-\beta J)}{2[2\cosh(\beta J)]^N}$$

$$\langle S_i S_j \rangle = \frac{2\sinh^2(\beta J) - 2\sinh^2(-\beta J)}{\cosh^2(\beta J)}$$

$$\langle S_i S_j \rangle = \tanh^2(\beta J) = \langle S_0 S_i \rangle \langle S_0 S_j \rangle$$

El acople entre S_iy $S_j$solo se da a través de S_0. No hay correlaciones directas entre S_iy S_j.

MECANICA CLASICA

FORMULAS GENERALES

El operador $\vec{\nabla}$ En coordenadas cartesianas (x, y, z):

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z \quad , \quad \text{grad}f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\text{div } \vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad , \quad \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\text{rot } \vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$$

En coordenadas cilindricas (r, φ, z) :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z \quad , \quad \text{grad}f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\text{div } \vec{a} = \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{a_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad , \quad \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\text{rot } \vec{a} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\varphi + \left(\frac{\partial a_\varphi}{\partial r} + \frac{a_\varphi}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_z$$

En coordenadas esféricas (r, θ, φ):

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} &= \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi \\
\text{grad}f &= \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi \\
\text{div } \vec{a} &= \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{2a_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{a_\theta}{r\tan\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \\
\text{rot } \vec{a} &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \theta} + \frac{a_\theta}{r\tan\theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial r} - \frac{a_\varphi}{r}\right)\vec{e}_\theta + \\
&\quad \left(\frac{\partial a_\theta}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_\varphi \\
\nabla^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\tan\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}
\end{aligned}$$

FORMULAS ESPECIFICAS

Recuerde que debe ser explicito en el desarrollo de cada uno de los pasos realizados.

1. Momento generalizado $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$

2. Formalismo de Hamilton

$$H(p,q,t) = \dot{q}_i p_i - L(q,\dot{q},t)$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

3. Identidad útil

$$\frac{d(\frac{1}{r})}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)$$

4. Sistema no inercial

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_f = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_g + \vec{\omega}\times \ , \ \ \vec{v}_f = \vec{V} + \vec{v}_r + \omega \times \vec{r}$$

$$\vec{F} = m\vec{a}_f = m\ddot{\vec{R}} + m\vec{a}_r + m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + 2m\vec{\omega}\times\vec{v}_r$$

si $\ddot{\vec{R}} = 0 \longrightarrow \vec{F}_{\text{ef}} = m\vec{a}_r$

$$\vec{F}_{\text{ef}} = m\vec{a}_f - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}_r$$

5. Sólido rigido

$$I_{i,j} = \sum_\alpha m_\alpha \left[\delta_{i,j}\sum_k x_{\alpha,k}^2 - x_{\alpha,i}x_{\alpha,i}\right]$$

$$I_{i,j} = \int_v \left[\delta_{i,j}\sum_k x_k^2 - x_i x_j\right]\rho(\vec{r})\mathrm{d}V \ , \ T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} I_{i,j}\omega_i\omega_j$$

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\vec{L}\vec{\omega} \ , \ L_i = \sum_j I_{i,j}\ \omega_j \ , \ \vec{L} = \{I\}\ \vec{\omega}$$

$$I_{i,j}^{\text{cm}} = J_{i,j} - M\left[a^2\delta_{i,j} - a_i a_j\right] \ , \ \vec{a} : x_i \rightarrow x_i'^{\text{cm}}$$

6. Angulos de Euler $\lambda = \lambda_\psi \ \lambda_\theta \ \lambda_\varphi$

$$(I_i - I_j)\omega_i\omega_j - \sum_k I_k\dot{\omega}_k\epsilon_{ijk} = 0$$

$$(I_i - I_j)\omega_i\omega_j - \sum_k (I_k\dot{\omega}_k - N_k)\epsilon_{ijk} = 0$$

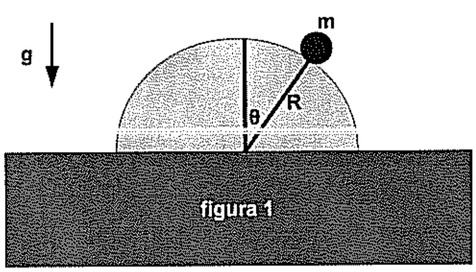
Examen de Conocimientos de Doctorado
Mecánica Clásica. 2012
Horario: 8AM-12M. 10 de Julio. (2012)

Nombre: ______________________________

Código: ________________

1. **(10 ptos)** (PREGRADO)

   Una partícula de masa m está en el "polo norte" de una semiesféra que está fija al piso y tiene una superficie pulida y sin fricción (ver figura 1) de radio R . El sistema está en presencia del campo gravitacional terrestre. Una pequeña perturbación en la ubicación de la partícula hace que esta ruede hacia abajo. En el instante en que la masa m pierde contacto con la semiesfera se forma un ángulo θ entre la vertical y el punto de separación. ¿Cuál es el valor de este ángulo?



SOLUCION

Dado que analizamos el movimiento de la partícula sobre la esfera, escogemos como coordenadas generalizadas r y θ. La ecuación de ligadura es:

$$f(r,\theta) = r - R \tag{1}$$

El Lagrangiano del sistema es determinado a partir de la energía cinética y la potencial:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \qquad\qquad U = mgr\cos\theta \tag{2}$$

Así el Lagrangiano se escribe como:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mgr\cos\theta \tag{3}$$

Las ecuaciones de Lagrange que incluyen las fuerzas vinculares son:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q_j}} + \sum_k \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_j} = 0 \tag{4}$$

Así las ecuaciones de Lagrange para este problema son:

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} + \lambda\frac{\partial f}{\partial r} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \lambda\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \tag{5}$$

Usando la ecuación vincular se tiene que:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 1 \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \tag{6}$$

Haciendo las derivadas del lagrangiano, tenemos que:

$$mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta - m\ddot{r} + \lambda = 0 \qquad mgr\sin\theta - mr^2\ddot{\theta} - 2mr\dot{r}\dot{\theta} = 0 \tag{7}$$

Teniendo en cuenta la ligadura: $r = R \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$. Entonces las ecuaciones de Lagrange toman la forma:

$$mR\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta + \lambda = 0 \qquad mgR\sin\theta - mR^2\ddot{\theta} = 0 \tag{8}$$

De la última ecuación (ec. de Lagrange para θ), se encuentra que

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{R}\sin\theta \tag{9}$$

Esta ecuación puede ser integrada para hallar $\dot{\theta}^2$ y sustituir esta expresión en la correspondiente ecuación de Lagrange para r, así:

$$\ddot{\theta} = \frac{d}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \tag{10}$$

Integrando tenemos que:

$$\int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta} d\theta = \frac{g}{R}\int_0^{\theta} \sin\theta d\theta \qquad \int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta} d\theta = \frac{g}{R}\int_0^{\theta} \sin\theta d\theta \qquad \frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{g}{R} - \frac{g}{R}\cos\theta \tag{11}$$

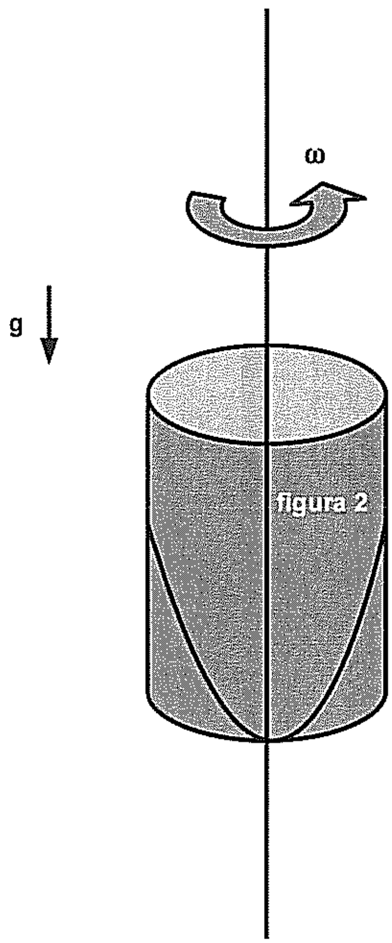
Sustituyendo este valor de $\dot{\theta}^2$ en la ecuación de Lagrange para r y despejando λ se tiene que:

$$\lambda = mg(3\cos\theta - 2) \tag{12}$$

Para este ejemplo particular, λ es la fuerza vincular, la cual nos proporciona la información requerida para resolver el problema. En el punto en el cual la partícula abandona la esfera la fuerza vincular se anula, así:

$$\lambda = 0 = mg(3\cos\theta_0 - 2) \Rightarrow \theta_0 = \arccos(2/3) = 48°11'22.87'' \tag{13}$$

2. **(10 ptos)** (PREGRADO) El espejo de un telescopio está hecho de mercurio líquido. El mercurio se deposita en un contenedor cilíndrico que gira a velocidad angular constante ω respecto a la vertical (ver figura 2). El sistema está en presencia del campo gravitacional terrestre. En estado de equilibrio se forma una superficie de revolución perfecta. Demuestre que esta superficie es un paraboloide.



SOLUCION

En el equilibrio, este problema visto desde un sistema de coordenadas que rota con el espejo, corresponde a un problema de estática. Sólo intervienen tres fuerzas sobre una molécula de masa m sobre la superficie de mercurio: el peso W, la fuerza ficticia F_{fict} y la fuerza de contacto F_0 debida a la interacción con las moléculas vecinas. Se puede mostrar que la fuerza de Coriolis es nula, mientras que la fuerza centrífuga es igual a $F_{fict} = f_{centrifuga} = m\omega^2 r$. Las ecuaciones que expresan la condición de equilibrio para una molécula de la superficie son:

$$F_0 \cos\phi - W = 0 \qquad - F_0 \sin\phi + F_{fict} = 0 \tag{14}$$

A partir de estas dos ecuaciones se llega a obtener el valor de la derivada de la superficie de revolución en un punto dado:

$$\frac{dz}{dr} = \tan\phi = \frac{\omega^2 r}{g} \tag{15}$$

que al ser integrada lleva al resultado pedido:

$$\int_0^z dz = \frac{\omega^2}{g}\int_0^r r dr \Rightarrow z = \frac{1}{2}\frac{\omega^2 r^2}{g} \tag{16}$$

3. **(25 ptos)** (POSGRADO)

Considere dos masas puntuales M y m que interactúan gravitacionalmente y que están separadas una distancia r. La energía potencial gravitacional entre las dos masas es $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$, con $\alpha = GMm$. G es la constante de gravitación universal. Si $M \gg m$, demuestre que la trayectoria de la masa m está dada por:

$$\frac{1}{r} = \frac{m\alpha}{L^2}(1 + \epsilon \cos\theta).$$

L es el momento angular de la masa m. La excentricidad ϵ se expresa en términos de la energía total (E) del sistema como $\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}$

SOLUCION

A partir del lagrangiano de este problema, se pueden calcular las cantidades conservadas de momento angular L y energía E:

$$mr^2\dot{\theta} = L \qquad\qquad \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = E \tag{17}$$

Se puede eliminar el término dt de estas dos ecuaciones despejando $\dot{r}^2$ de la segunda y dividiendo este resultado por el cuadrado de la primera ecuación , con lo cual se obtiene:

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{2mE}{L^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{2mV(r)}{L^2} \tag{18}$$

Sustituyendo el potencial por el del problema de Kepler, se tiene:

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{2mE}{L^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{2mV(r)}{L^2} \tag{19}$$

Usando la identidad: $d(1/r)/d\theta = -(dr/d\theta)/r^2$ y empleando la sustitución $y = 1/r$, la anterior ecuación se reescribe como:

$$\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = -y^2 + \frac{2m\alpha}{L^2}y + \frac{2mE}{L^2} \tag{20}$$

completando el cuadrado:

$$\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = -\left(y - \frac{m\alpha}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2} + \left(\frac{m\alpha}{L^2}\right)^2 \tag{21}$$

Sustituyendo $z = y - \frac{m\alpha}{L^2}$, tenemos que:

$$\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = -z^2 + \left(\frac{m\alpha}{L^2}\right)^2 \left(1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}\right) = -z^2 + B \tag{22}$$

Esta ecuación es integrable, por lo tanto:

$$\int_{z_1}^{z} \frac{dz}{\sqrt{B - z^2}} = \int_{\theta_1}^{\theta} d\theta \Rightarrow z = \sqrt{B}\cos(\theta - \theta_0) \tag{23}$$

Deshaciendo la sustitución $z = \frac{1}{r} - \frac{m\alpha}{L^2}$ y retomando la definición de B, se tiene el resultado pedido.

4. **(30 ptos)** (POSGRADO)

Calcule el Lagrangiano de un péndulo simple, de longitud l y masa m, que oscila en un plano y cuyo punto de suspensión P (ver figura 3) oscila verticalmente de acuerdo con la ley $y = a\cos\omega t$. La frecuencia de oscilación y la amplitud del movimiento oscilatorio del punto P son dadas por ω y a, respectivamente. El péndulo está en presencia del campo gravitacional terrestre.

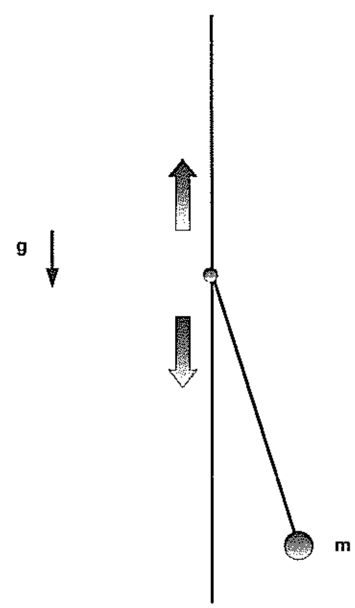
(a) **(5 puntos)** Elija y escriba un conjunto de coordenadas generalizadas q_j adecuado para describir el movimiento de la masa m.

(b) **(5 puntos)** Obtenga explícitamente el lagrangiano L del sistema.

(c) **(15 puntos)** Demuestre que el lagrangiano se puede escribir como: $L = L' + \frac{d}{dt}k(q_j, t) + f(t)$. Encuentre explícitamente las funciones f y k. Halle explícitamente el lagrangiano L'.

(d) **(5 puntos)** Muestre que las ecuaciones de movimiento son invariantes bajo la transformación Gauge del Lagrangiano: $L = L' + \frac{d}{dt}k(q_j, t) + f(t)$.

Ayuda: calcule las ecuaciones de movimiento a partir de L y L'.



SOLUCION

(a) Las coordenadas cartesianas del punto en movimiento son:

$$x = l\sin\phi \qquad\qquad y = l\cos\phi + a\cos\omega t \tag{24}$$

(b) Así que el lagrangiano se puede escribir como:

$$L = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\phi}^2 + a^2\omega^2\sin^2\omega t + 2al\omega\dot{\phi}\sin\phi\sin\omega t) + mgl\cos\phi + mga\cos\omega t \tag{25}$$

(c) Desfactorizando podemos escribir:

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 + mal\omega\dot{\phi}\sin\phi\sin\omega t + mgl\cos\phi + \frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2\omega t + mga\cos\omega t \tag{26}$$

El segundo término de esta expresión lo podemos escribir como una derivada total respecto al tiempo de una función:

$$mal\omega\dot{\phi}\sin\phi\sin\omega t = -\frac{d}{dt}(mal\omega\cos\phi\sin\omega t) + mal\omega^2\cos\phi\cos\omega t \tag{27}$$

Por lo cual el Lagrangiano se puede escribir como:

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 + mal\omega^2\cos\phi\cos\omega t + mgl\cos\phi + f(t) - \frac{d}{dt}(mal\omega\cos\phi\sin\omega t) \tag{28}$$

Donde la función f que depende explícitamente del tiempo es:

$$f(t) = \frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2\omega t + mga\cos\omega t \tag{29}$$

Esta función f se puede escribir como una derivada total respecto al tiempo, por lo tanto se puede escribir un nuevo lagrangiano omitiendo las funciones f y g:

$$L' = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 + mal\omega^2\cos\phi\cos\omega t + mgl\cos\phi \tag{30}$$

(d) Calculando las ecuaciones de movimiento para los dos lagrangianos, se observa que estas son invariantes:

$$\frac{\delta L'}{\delta\phi} = ml^2\ddot{\phi} - mal\omega^2\sin\phi\cos\omega t - mgl\sin\phi = \frac{\delta L}{\delta\phi} = 0 \tag{31}$$

Nota: se ha usado la notación de derivada lagrangiana, donde:

$$\frac{\delta L}{\delta q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \tag{32}$$

5. **(25 ptos)** (POSGRADO)

Considere una partícula de masa m, sometida a moverse sobre la superficie interior de un cilindro, descrito por la ecuación: $x^2 + y^2 = R^2$ (ver figura 4). Sobre la partícula actúa una fuerza restauradora, $\overrightarrow{F} = -k\overrightarrow{r}$, dirigida hacia el origen de coordenadas, donde k es una constante y r es la distancia desde el origen hasta la partícula. El sistema está en presencia del campo gravitacional terrestre.

(a) **(4 puntos)** Calcule el Lagrangiano del sistema. Ayuda: Use coordenadas cilíndricas.

(b) **(7 puntos** A partir del Lagrangiano, calcule el Hamiltoniano.

(c) **(7 puntos)** De acuerdo a las ecuaciones canónicas de Hamilton ¿que cantidades se conservan? Realice sus cálculos explícitamente.

(d) **(7 puntos)** Demuestre que el movimiento en la dirección del eje z es armónico.

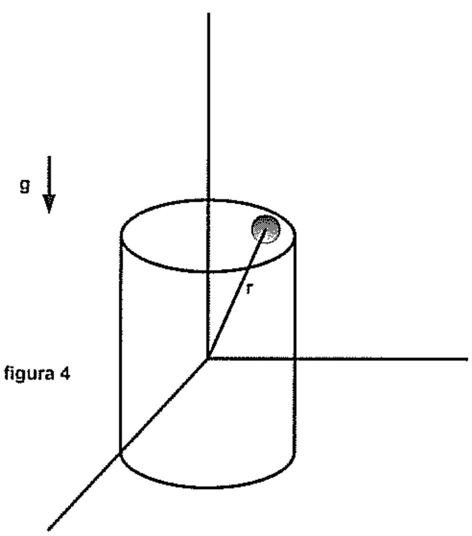


figura 4

SOLUCION

1. *

(a) La energía potencial correspondiente a la fuerza restauradora es:

$$U = \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2}k(R^2 + z^2) \tag{33}$$

El cuadrado de la velocidad en coordenadas cilindricas es:

$$v^2 = \dot{R}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 \tag{34}$$

como R es constante, la energía cinética se puede escribir como:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{z}^2 + R^2\dot{\theta}^2) \tag{35}$$

Así el Lagrangiano se puede escribir como:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{z}^2 + R^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{2}k(R^2 + z^2) - mgz \tag{36}$$

(b) Los momentos generalizados son:

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta} \qquad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \tag{37}$$

El Hamiltoniano se calcula como:

$$H(q_j, p_j) = \sum_j \dot{q}_j p_j - L \tag{38}$$

Que en este caso particular es:

$$H = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2}kz^2 + mgz \tag{39}$$

c. Las ecuaciones canónicas son:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \qquad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \tag{40}$$

Al aplicarlas al Hamiltoniano de este problema se obtiene que:

$$\dot{p}_\theta = 0 \quad \dot{p}_z = -kz - mg \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2} \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m} \tag{41}$$

Como $\dot{p}_\theta = 0$, el momento angular p_θ es una constante de movimiento: $p_\theta = cte = mR^2\dot{\theta} = L_z$

(c) Derivando respecto al tiempo $p_z = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$ e igualando con $\dot{p}_z = -\dfrac{\partial H}{\partial z} = -kz - mg$, se encuentra que $\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0$, donde se ha hecho la sustitición $u = \frac{k}{m}z + g$. El movimiento en dirección z es armónico, con la frecuencia de oscilación: $\omega_0^2 = k/m$

ELECTROMAGNETISMO

FORMULAS GENERALES

El operador $\vec{\nabla}$ En coordenadas cartesianas (x, y, z):

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z \quad , \quad \text{grad} f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\text{div } \vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad , \quad \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\text{rot } \vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$$

En coordenadas cilindricas (r, φ, z) :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z \quad , \quad \text{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\text{div } \vec{a} = \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{a_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad , \quad \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\text{rot } \vec{a} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\varphi + \left(\frac{\partial a_\varphi}{\partial r} + \frac{a_\varphi}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_z$$

En coordenadas esféricas (r, θ, φ):

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} &= \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi \\
\text{grad} f &= \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi \\
\text{div } \vec{a} &= \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{2a_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{a_\theta}{r\tan\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \\
\text{rot } \vec{a} &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \theta} + \frac{a_\theta}{r\tan\theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial r} - \frac{a_\varphi}{r}\right)\vec{e}_\theta + \\
&\quad \left(\frac{\partial a_\theta}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_\varphi \\
\nabla^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\tan\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}
\end{aligned}$$

FORMULAS ESPECIFICAS

Recuerde que debe ser explicito en el desarrollo de cada uno de los pasos realizados.

1. Ecuaciones de Maxwell

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho\ ,\ \vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{\jmath}+\epsilon_0+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0\ ,\ \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\hat{n}\cdot(\vec{D}_+-\vec{D}_-)=\sigma\ ,\ \hat{n}\cdot(\vec{B}_+-\vec{B}_-)=0$$

$$\hat{n}\times(\vec{E}_+-\vec{E}_-)=0\ ,\ \hat{n}\times(\vec{H}_+-\vec{H}_-)=\vec{\kappa}$$

$$\vec{D}=\epsilon_0\vec{E}+\vec{P}=\epsilon\ ,\ \vec{B}=\mu_0(\vec{H}+\vec{M})=\mu\vec{H}$$

2. Fuerza magnética y campo magnético de dipolos.

$$\vec{B}=\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{1}{r^3}\left[3(\vec{m}_1\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}-\vec{m}_1\right] \tag{42}$$

$$\vec{F}\ =\ \nabla(\vec{m}_2\cdot\vec{B}) \tag{43}$$

$$\tag{44}$$

3. Vector de Poyting $\vec{N}=\vec{E}\times\vec{H}$, conservación

$$\int_v\vec{E}'\cdot\vec{\jmath}\mathrm{d}v=\int_v\frac{j^2}{\gamma}\mathrm{d}v+\frac{\partial}{\partial t}\int_v\frac{1}{2}(\vec{E}\vec{D}+\vec{B}\vec{H})\mathrm{d}v+\oint_S\vec{N}\mathrm{d}\vec{S}$$

4. Propagación

$$\Delta\vec{E}-\mu\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}-\mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0\ ,$$

$$\Delta\vec{H}-\mu\gamma\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}-\mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=0$$

$$\Delta\vec{E}+\omega^2\epsilon\mu\left(1-j\frac{\gamma}{\omega\epsilon}\right)\vec{E}=0$$

5. Onda progresiva

$$E_i = E_o e^{j(\omega t - kx)}\ ,\ \vec{B} = \frac{k}{\omega}\hat{n} \times \vec{E}\ ,\ k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$$

---

6. Conductores $K^2 = \epsilon\mu\omega^2 - j\omega\mu\gamma = \tilde{\epsilon}\mu\omega^2$

$$\beta = k\sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\epsilon\mu}\right)^2} + 1\right]}\ ,$$

$$K = \beta - j\alpha\ ,\ \mathrm{tg}\delta = \frac{\gamma}{\epsilon\mu}$$

$$\alpha = k\sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\epsilon\mu}\right)^2} - 1\right]}\ ,$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}\ ,\ K = Me^{j\phi}$$

$$K =_{(\gamma\gg)} \frac{1}{\sqrt{2}}(1-j)\sqrt{\omega\mu\gamma}$$

---

7. Polinomios de Legendre

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn}$$

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}P_n(x)\right] + n(n+1)P_n(x) = 0$$

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]$$

$$(2n+1)P_n(x) = \frac{d}{dx}\left[P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)\right]$$

$$(x^2-1)\frac{d}{dx}(x^2-1)^n = 2nx(x^2-1)^n$$

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 (x-1)^{n-k}(x+1)^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{-n-1}{k}\left(\frac{1-x}{2}\right)^k = \\ & 2^n \cdot \sum_{k=0}^{n} x^k \binom{n}{k}\binom{\frac{n+k-1}{2}}{n} \end{aligned}$$

n	$P_n(x)$
0	1
1	x
2	$(3x^2-1)/2$
3	$(5x^3-3x)/2$
4	$(35x^4-30x^2+3)/8$
5	$(63x^5-70x^3+15x)/8$

8. En física e ingeniería, se denomina *tensión mecánica*, σ, a la fuerza por unidad de área en el entorno de un punto material sobre una superficie (real o imaginaria) de un medio continuo. La definición anterior se aplica tanto a fuerzas localizadas como fuerzas distribuidas, que actúan sobre una superficie. El tensor de estrés de Maxwell representa la tensión mecánica debida a las fuerzas eléctricas y magnéticas.

$$T_{ij} = \epsilon_o E_i E_j + \frac{1}{\mu_o} B_i B_j - \frac{1}{2}\left(\epsilon_o E^2 + \frac{1}{\mu_o} B^2\right)\delta_{ij} \tag{45}$$

La magnitud de estrés normal σ_n de cualquier tensor de estrés T es el producto punto de la tensión mecánica y el vector normal:

$$\sigma_n = T_{ij} n_j \tag{46}$$

Examen de Conocimientos de Doctorado
Electromagnétismo.
Horario: 8AM-12M. 11 de Julio. (2012)

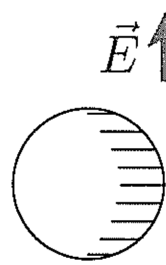
Nombre: ____

Código: ______________________

1. **(10 ptos)** (PREGRADO) Un cascarón esférico conductor, de radio a, se encuentra en presencia de un campo eléctrico, como se muestra en la figura.

$$\vec{E} = E_o\,\hat{\mathbf{z}}. \tag{47}$$

Encuentre el valor del potencial eléctrico fuera y dentro del cascarón.



SOLUCION

Solución:

Para $r \to \infty$ se tiene que $\vec{E} = E_o\hat{\mathbf{z}}$. por lo tanto la solución en coordenadas esféricas, de un problema con simetría azimutal tiene la forma:

$$V(r,\theta) = \sum_l \left[A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right] P_l(\cos\theta) \tag{48}$$

Se tiene un cascarón esférico conductor, por lo tanto el potencial sobre ese cascarón es constante, $V(a,\theta) = 0$, luego

$$V(a,\theta) = \sum_l \left[A_l a^l + \frac{B_l}{a^{l+1}}\right] P_l(\cos\theta) = 0$$

$$\begin{aligned} A_l a^l + B_l a^{-(l+1)} &= 0 \\ A_l a^l &= B_l a^{-(l+1)} \\ B_l &= -A_l a^{2l+1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto reescribiendo la ecuación 48,

$$V(r,\theta) = \sum_l A_l \left[r^l - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} \right] P_l(\cos\theta). \tag{49}$$

Finalmente,tenemos que el potencial para $r \gg a$ est definido por la ecuación 47. Por lo tanto:

$$\vec{E} = E_o\hat{\mathbf{z}} = -\frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

Es decir,

$$V = \int -E_o dz = -E_o z + C.$$

Podemos definir el potencial como $V(z=0) = 0$ de tal manera que $C = 0$. Por lo tanto,

$$V(r \gg a) = -E_o r\cos\theta$$

La solución en la ecuacin 47 debe cumplir con la solución para $r \gg a$, luego,

$$\lim_{r\to\infty}\left[\sum_l A_l \left[r^l - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} \right] P_l(\cos\theta)\right] = \lim_{r\to\infty}\left[-E_o r\cos\theta\right]$$

Ya que $P_1 = \cos\theta$, $A_l = 0$ para todo $l \neq 1$. Además,

$$\begin{aligned} \lim_{r\to\infty} A_1\left[r - \frac{a^3}{r^2}\right] &= \lim_{r\to\infty}\left[-E_o r\right] \\ A_1 &= -E_o \end{aligned}$$

$$\boxed{V(r,\theta) = \left[\frac{a^3}{r^2} - r\right] E_o \cos\theta.}$$

2. **(25 ptos)** (POSGRADO)

Un juego consiste en dos toroides de masa M que son atravesados por una barra vertical no conductora, que restringe el movimiento de los toroides en el eje Z, como se ve en la figura. Cada toroide tiene un momento dipolar magnético $\vec{m}$ paralelo al eje de simetría del toroide y cada uno apunta en dirección opuesta al otro. Cuando el primer toroide en la base se mantiene fijo, el segundo toroide flota en el aire sobre el primero.

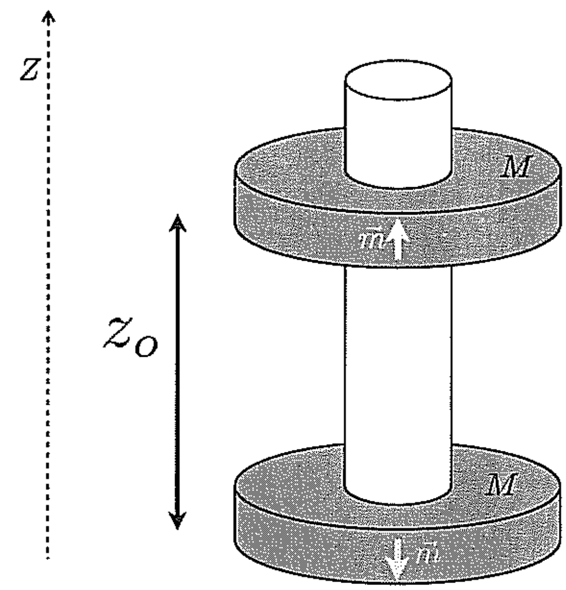
Teniendo en cuenta que el sistema se encuentra bajo una fuerza de gravedad definida por la aceleración gravitacional $\vec{g}$

(a) **(11 ptos)**Calcule el vector de inducción magnética $\vec{B}$ debido a el toroide en la base.

(b) **(11 ptos)** Calcule las componentes de la fuerza $\vec{F}$ sobre el toroide que flota.

(c) **(3 ptos)** Encuentre la distancia entre los toroides, z_o, cuando el sistema está en equilibrio.

Desprecie cualquier interacción con la barra



SOLUCION

(a) Para un dipolo magnético:

$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{1}{r^3}\left[3(\vec{m}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \vec{m}_1\right]$$

en donde el dipolo se refiere al dipolo del toroide en la base: $\vec{m}_1 = -m\hat{\mathbf{z}}$. Es decir:

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{1}{r^3}\left[3(-m\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} + m\hat{\mathbf{z}}\right] \\
&= -\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{m}{r^3}\left[3\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{z}}\right]
\end{aligned}$$

(b) La fuerza magnética F producida por un vector de inducción magnética $\vec{B}$ sobre el dipolo $\vec{m}_2$ es:

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \nabla(\vec{m}_2\cdot\vec{B}) \\
&= \nabla\left(m\hat{\mathbf{z}}\cdot\left[-\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{m}{r^3}\left[3\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{z}}\right]\right]\right) \\
&= -\frac{\mu_o m^2}{4\pi}\nabla\left(\hat{\mathbf{z}}\cdot\frac{3\cos\theta\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{z}}}{r^3}\right) \\
&= -\frac{\mu_o m^2}{4\pi}\nabla\left(\frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3}\right)
\end{aligned}$$

el gradiente de un campo escalar t en coordenadas esféricas:

$$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\,\cos\theta}\frac{\partial t}{\partial\phi}\hat{\phi}$$

las componentes de la fuerza son:

$$\begin{aligned}
F_r &= -\frac{\mu_o m^2}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3}\right] \\
&= -\frac{\mu_o m^2}{4\pi}(3\cos^2\theta - 1)\frac{-3}{r^4} \\
&= \frac{3\mu_o m^2}{4\pi}\frac{1}{r^4}(3\cos^2\theta - 1)
\end{aligned}$$

Para el toroide que está en el eje Z, $\cos\theta = 1$, es decir:

$$F_r = \frac{3\mu_o m^2}{2\pi}\frac{1}{r^4}$$

adicionalmente:

$$\begin{aligned}
F_\theta &= -\frac{\mu_o m^2}{4\pi}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3}\right] \\
&= -\frac{3\mu_o m^2}{4\pi}\frac{1}{r^4}[2\cos\theta\sin\theta]
\end{aligned}$$

Para el toroide que está en el eje Z, $\sin\theta = 0$, es decir:

$$F_\theta = 0$$

por último,

$$
\begin{aligned}
F_\phi &= -\frac{\mu_o m^2}{4\pi}\frac{1}{r\,\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left[\frac{3\cos^2\theta-1}{r^3}\right] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

(c) Por lo tanto la sumatoria de fuerzas en z resulta:

$$F_r\hat{\mathbf{r}} + M\vec{g} = 0$$

$$\frac{3\mu_o m^2}{2\pi}\frac{1}{z_o^4} = M\,g$$

$$\boxed{z_o = \sqrt[4]{\frac{3\mu_o m^2}{2\pi\, M\, g}}}$$

3. **(30 ptos)** (POSGRADO)

Considere un cascarón esférico de radio a cuyo potencial eléctrico en la superficie está dado por:

$$V(a,\theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < \theta < \gamma \\ V_o & \text{si } \gamma < \theta < \pi - \gamma \\ 0 & \text{si } \pi = \gamma < \theta < \pi \end{cases}$$

como se ilustra en la figura. Asuma que no existen más cargas en el sistema.

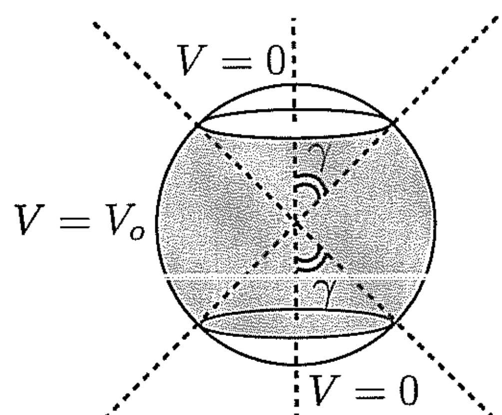
(a) **(5 ptos)** Explique y discuta como son las condiciones de frontera en este sistema.

(b) **(20 ptos)** Dado que el problema tiene simetría esférica, la solución puede escribirse como :

$$\Phi(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left[\alpha_l\left(\frac{r}{a}\right)^l + \beta_l\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}\right] P_l(\cos\theta)\, e^{im\phi}$$

Encuentre al valor de α_l y β_l para $r > a$.

(c) **(5 ptos)** Cuál es el valor de Φ en el límite $r \to \infty$? Describa el comportamiento cualítativo de $\Phi(r,\theta,\phi)$ para $r \gg a$. Discuta y explique su respuesta



SOLUCION

Solucin

(a) Debido a la simetría azimutal del problema ya que el potencial en infinito debe ser cero, es decir $\boxed{\alpha_l = 0}$, el potencial se puede escribir como:

$$\Phi(r,\theta,\phi) = \sum_l \beta_l\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} P_l(\cos\theta). \tag{50}$$

Para $r = a$ el potencial debe cumplir la condición en el enunciado,

$$\Phi(r = a, \theta, \phi) = \sum_l \beta_l \, P_l(\cos\theta) = V(a, \theta). \tag{51}$$

(b) Usando la ortogonalidad de los polinomios de legendre se puede calcular β_l si se multiplica a ambos lados de la ecuación por $P_m(\cos\theta)$ y se integra en $d\cos\theta$,

$$\int_{-1}^{1} \sum_l \beta_l \, P_l(\cos\theta) P_m(\cos\theta) d\cos\theta = \int_{-1}^{1} V(a, \theta) P_m(\cos\theta) d\cos\theta. \tag{52}$$

el lado izquierdo es solamente la integral de dos funciones de la base ortonormal, luego

$$\frac{2}{2l+1}\delta_{ml}\beta_l = \int_{-1}^{1} V(a, \theta) P_m(\cos\theta) d\cos\theta. \tag{53}$$

por lo tanto,

$$\beta_l = \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1} V(a, \theta) P_l(\cos\theta) d\cos\theta \tag{54}$$

la función $V(a, \theta)$ es nula para $\theta < \beta$ y para $\theta > \pi - \beta$, al rededor del ecuador la función es no nula y tiene el valor V_o.

$$\begin{aligned}
\beta_l &= \frac{2l+1}{2}\int_{-\cos\beta}^{\cos\beta} V_o \, P_l(\cos\theta) \, d\cos\theta && (55)\\
&= \frac{V_o}{2}\int_{-\cos\beta}^{\cos\beta} (2l+1) \, P_l(\cos\theta) \, d\cos\theta && (56)\\
&= \frac{V_o}{2}\int_{-\cos\beta}^{\cos\beta} \left[\frac{d}{d\cos\theta}P_{l+1}(\cos\theta) - \frac{d}{d\cos\theta}P_{l-1}(\cos\theta)\right] \, d\cos\theta && (57)\\
&= \frac{V_o}{2}\left([P_{l+1}(\cos\beta) - P_{l-1}(\cos\beta)] - [P_{l+1}(-\cos\beta) - P_{l-1}(-\cos\beta)]\right) && (58)
\end{aligned}$$

gracias a que $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$

$$\begin{aligned}
\beta_l &= \frac{V_o}{2}\left([P_{l+1}(\cos\beta) - P_{l-1}(\cos\beta)] - (-1)^l [P_{l+1}(\cos\beta) - P_{l-1}(\cos\beta)]\right) && (59)\\
&= \frac{V_o}{2}\left(1 - (-1)^l\right)[P_{l+1}(\cos\beta) - P_{l-1}(\cos\beta)] && (60)
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\beta_l = \begin{cases} 0 & \text{si } \ l \text{ es par} \\ V_o \, [P_{l+1}(\cos\beta) - P_{l-1}(\cos\beta)] & \text{si } \ l \text{ es impar} \end{cases}$$

y como habíamos dicho antes,

$$\boxed{\alpha_l = 0} \tag{61}$$

finalmente, el potencial se puede escribir como:

$$\boxed{\Phi(r,\theta,\phi) = \sum_{l \text{ impar}} V_o \left[P_{l+1}(\cos\beta) - P_{l-1}(\cos\beta)\right] P_l(\cos\theta) \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}} \tag{62}$$

(c) el valor de

$$\lim_{r\to\infty} \Phi(r,\theta) = 0$$

porque no hay cargas en el sistema además de las que dan el potencial en la superficie de la esfera. El potencial lejos de la esfera ($r \gg a$) debe converger, por lo tanto $\alpha_l = 0$.

4. **(15 ptos)** (POSGRADO)

Una onda electromagnética plana polarizada, con una frecuencia ω, que se propaga en el espacio libre, incide de manera normal sobre una superficie plana de un conductor perfecto que llena la región $z > 0$. Asuma que la onda incidente est dada por:

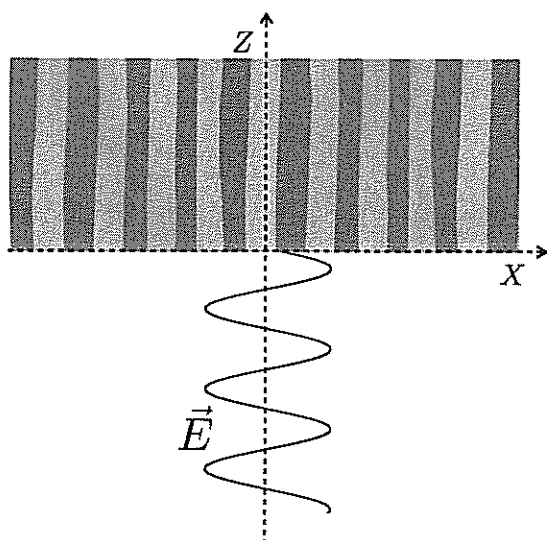
$$\vec{E} = \vec{E}_i\, e^{i(kz-\omega t)}.$$

(a) **(2 ptos)** De acuerdo con la figura, diga cual es la dirección de polarización. ¿En que dirección se mueve la onda?

(b) **(3 ptos)** Explique cualitativamente cómo se propagan las ondas en el medio conductor.

(c) **(5 ptos)** Halle las expresiones para el campo eléctrico ($\vec{E}$) y magnético ($\vec{H}$) de las ondas incidente, transmitida y reflejada.

(d) **(5 ptos)** Calcule la densidad de corriente $\vec{K}$ en la superficie $z = 0$.



SOLUCION

(a) La dirección de propagación es $+z$, la onda está linearmente polarizada con el campo eléctrico en direccin x

(b) Las ondas electromagnéticas incidentes en un medio conductor no penetran el conductor sino que solamente producen corrientes superficiales ($\vec{E} = 0$ dentro del conductor), es decir no hay ondas transmitidas sino solamente corrientes superficiales.

(c) La ecuación para la onda incidente es:

$$\vec{E} = \hat{\mathbf{x}}\, E_i\, e^{i(kz-\omega t)} \tag{63}$$

y la de la onda reflejada:

$$\vec{E}'' = \hat{\mathbf{x}}\, E''\, e^{i(-kz-\omega t)} \tag{64}$$

para $z = 0$ se tiene que el campo eléctrico está dado por:

$$E = (E_i + E'')\, e^{-i\omega t} \tag{65}$$

como se tiene que $E_{\|} = 0$, $E_i = -E''$ y la onda reflejada se escribe como:

$$\vec{E}'' = -\hat{\mathbf{x}}\, E_i\, e^{i(-kz-\omega t)} \tag{66}$$

por lo tanto las ondas $\vec{E}_i$, $\vec{E}'$ y $\vec{E}''$ incidente, transmitida y reflejada, respectivamente se escriben como:

$$\boxed{\vec{E}_i = \hat{\mathbf{x}}\, E_i\, e^{i(kz-\omega t)},} \tag{67}$$

$$\boxed{\vec{E}' = 0,} \tag{68}$$

$$\boxed{\vec{E}'' = -\hat{\mathbf{x}}\, E_i\, e^{i(-kz-\omega t)}.} \tag{69}$$

el campo magnético puede ser calculado del campo eléctrico:

$$\vec{B} = \frac{k}{\omega}\hat{\mathbf{n}} \times \vec{E} \tag{70}$$

en donde $k = \omega\sqrt{\epsilon_o\,\mu_o}$, y $k/\omega = \sqrt{\epsilon_o\,\mu_o}$. Ya que la onda incide sobre el plano $z = 0$, el vector normal a la superficie es $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$ para la onda transmitida y $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{z}}$ para la onda reflejada.

$$\vec{B}_i = \sqrt{\epsilon_o\,\mu_o}\,\hat{\mathbf{z}} \times [\hat{\mathbf{x}}\, E_i\, e^{i(kz-\omega t)}] \tag{71}$$

$$\vec{B}' = 0 \tag{72}$$

$$\vec{B}'' = \sqrt{\epsilon_o\,\mu_o}\,[-\hat{\mathbf{z}}] \times [-\hat{\mathbf{x}}\, E_i\, e^{i(-kz-\omega t)}] \tag{73}$$

Es decir,

$$\boxed{\vec{B}_i = \sqrt{\epsilon_o\,\mu_o}\, E_i\, e^{i(kz-\omega t)}\,\hat{\mathbf{y}}} \tag{74}$$

$$\boxed{\vec{B}' = 0} \tag{75}$$

$$\boxed{\vec{B}'' = \sqrt{\epsilon_o\,\mu_o}\, E_i\, e^{i(-kz-\omega t)}\,\hat{\mathbf{y}}} \tag{76}$$

(d) La corriente superficial se escribe como

$$
\begin{aligned}
\vec{K} &= \hat{\mathbf{n}} \times (H_{+} - H_{-})|_{z=0} &(77)\\
&= \hat{\mathbf{z}} \times (-H + H' - H'')|_{z=0} &(78)\\
&= \frac{-1}{\mu_o} \hat{\mathbf{z}} \times (B + B'')|_{z=0} &(79)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$\vec{K} = \frac{-1}{\mu_o} \hat{\mathbf{z}} \times [\sqrt{\mu_o \epsilon_o} E_i e^{-i\omega t}\, 2\hat{\mathbf{y}}] \tag{80}$$

Finalmente,

$$\boxed{\vec{K} = 2\sqrt{\frac{\epsilon_o}{\mu_o}} E_i\, e^{-i\omega t}\, \hat{\mathbf{x}}} \tag{81}$$

5. **(20 ptos)** (POSGRADO)

Considere un tubo cilíndrico de paredes delgadas y de radio a que lleva una corriente I. La corriente fluye sobre las paredes del cilindro paralela al eje de simetría. El interior del tubo está presurizado para evitar su colapso bajo la fuerza magnética que produce la corriente.

(a) **(5 ptos)** Evalue el vector the inducción magnética $\vec{B}$ sobre la superficie del cilindro

(b) **(15 ptos)** Encuentre una expresión para la presión mínima que el interior del tubo debe tener para evitar el colapso.

SOLUCION

(a) Para calcular el vector de inducción magnética sobre la superficie del cilindro se puede usar la ley de ampere:

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_o I \tag{82}$$

$\vec{B}$ apunta tangente al cilindro y perpendicular a la corriente, por lo tanto es paralelo a $\vec{dl}$, es decir:

$$2\pi\, a\, B = \mu_o\, I. \tag{83}$$

Por lo tanto

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_o\, I}{2\pi\, a}}$$

(b) Ahora para calcular la fuerza por unidad de rea, se puede usar el tensor de estrs :

$$F/A = \sigma_i = T_{ij} n_j \tag{84}$$

en donde

$$T_{ij} = \frac{1}{\mu_o} B_i B_j - \frac{1}{2\mu_o} B^2 \delta_{ij}$$
$$T_{ij} n_j = \frac{1}{\mu_o} B_i (\hat{n} \cdot \vec{B}) - \frac{1}{2\mu_o} n_i B^2$$

Como nos interesa la presión sobre las paredes del cilindro la normal n_j se refiere al vector radial en coordinadas cilíndricas, $\hat{n}$ siempre es perpendiular a $\vec{B}$ y por lo tanto $\hat{n} \cdot \vec{B} = 0$, luego

$$T_{ij} n_j = -\frac{1}{2\mu_o} n_i B^2 \tag{85}$$
$$= -\frac{1}{2\mu_o} n_i \left(\frac{\mu_o\, I}{2\pi\, a}\right)^2 \tag{86}$$

por lo tanto la presión mínima que el tubo debe tener para que no colapse es

$$\boxed{P = \frac{\mu_o I^2}{8\pi^2 a^2}} \tag{87}$$

EXAMEN ESCRITO

Pregunta	NOTA/100	NOTA ESTUDIANTE/100	Comentarios
1			
2			
3			
4			
5			
Nota Final			

MECANICA CUANTICA

FORMULAS GENERALES

El operador $\vec{\nabla}$ En coordenadas cartesianas (x, y, z):

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z \quad , \quad \text{grad} f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\text{div } \vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad , \quad \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\text{rot } \vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$$

En coordenadas cilindricas (r, φ, z) :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z \quad , \quad \text{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\text{div } \vec{a} = \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{a_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad , \quad \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\text{rot } \vec{a} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\varphi + \left(\frac{\partial a_\varphi}{\partial r} + \frac{a_\varphi}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_z$$

En coordenadas esféricas (r, θ, φ):

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} &= \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi \\
\text{grad} f &= \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi \\
\text{div } \vec{a} &= \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{2a_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{a_\theta}{r\tan\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \\
\text{rot } \vec{a} &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \theta} + \frac{a_\theta}{r\tan\theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial r} - \frac{a_\varphi}{r}\right)\vec{e}_\theta + \\
&\quad \left(\frac{\partial a_\theta}{\partial r} + \frac{a_\theta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_\varphi \\
\nabla^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\tan\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}
\end{aligned}$$

FORMULAS ESPECIFICAS

Recuerde que debe ser explicito en el desarrollo de todos los pasos realizados.

1. Oscilador armónico, operadores escalera

$$A = \sqrt{\tfrac{1}{2}m\omega}x + \frac{ip}{\sqrt{2m\omega}} \quad \text{y} \quad A^\dagger = \sqrt{\tfrac{1}{2}m\omega}x - \frac{ip}{\sqrt{2m\omega}}$$

2. Para los operadores de momento ángular L:
$[L_+, L_z] = -\hbar L_+$

$[L_-, L_z] = \hbar L_-$

$L^2|lm >= l(l+1)\hbar^2|lm >.$

3. Matrices de Pauli

$$\vec{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Momento angular de un sistema de una partícula:

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right) \qquad \hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{L}_z Y(\theta,\varphi) = bY(\theta,\varphi) \\ \hat{L}^2 Y(\theta,\varphi) = cY(\theta,\varphi) \end{array} \right\} \Leftarrow Y(\theta,\varphi) = S(\theta)\cdot T(\varphi)$$

Solución:

$$T(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \qquad S_{l,m}(\theta) = \left[\frac{(2l+1)}{2} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \right]^{1/2} P_l^{|m|}(\cos\theta)$$

5. Polimonios de Legendre:

$$P_l(w) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dw^l} (w^2-1)^l, \quad l = 0,1,2\ldots$$

$$P_0(w) = 1, \quad P_1(w) = w, \quad P_2(w) = \frac{1}{2}(3w^2-1), \quad P_3(w) = \frac{1}{2}(5w^3-3w)$$

Polinomios asociados de Legendre:

$$P_l^{|m|}(w) = \frac{1}{2^l l!}(1-w^2)^{|m|/2}\frac{d^{l+|m|}}{dw^{l+|m|}}(w^2-1)^l, \quad l = 0, 1, 2\ldots$$

$$\begin{array}{rclrcl} P_0^0(w) & = & 1 & P_2^0(w) & = & \frac{1}{2}(3w^2-1) \\ P_1^0(w) & = & w & P_2^1(w) & = & 3w(1-w^2)^{1/2} \\ P_1^1(w) & = & (1-w^2)^{1/2} & P_2^2(w) & = & 3-3w^2 \end{array}$$

---

6. Polinomios de Laguerre:

$$L_q(z) = e^z \frac{d^q}{dz^q}(e^{-z}z^q)$$

$$L_0(z) = 1, \quad L_1(z) = -z+1, \quad L_2(z) = z^2 - 4z + 2, \quad L_3(z) = -z^3 + 9z^2 - 18z + 6$$

Polinomios asociados de Laguerre:

$$L_q^s(z) = \frac{d^s L_q(z)}{dz^s}$$

$$\begin{array}{llll} L_q^0(z) = L_q(z) & L_1^1(z) = -1 & L_2^1(z) = 2z - 4 & L_2^2(z) = 2 \\ L_3^1(z) = -3z^2 + 18z - 18 & & L_3^2(z) = -6z + 18 & L_3^3(z) = -6 \end{array}$$

---

7. Teoría de perturbaciones independientes del tiempo:
Si se quiere resolver la ecuación $(H_0 + \lambda H_1)\psi_n = E_n\psi_n$ y si ϕ_n es un conjunto completo de funciones del Hamiltoniano no perturbado H_0: $H_0\phi_n = E_n^0\phi_n$:
Las correcciones a la energía son: $E_n = E_n^0 + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \cdots$
en donde la corrección a primer orden es:
$E_n^{(1)} =< \phi_n|H_1|\phi_n >$.
Si $m \neq n$, la corrección a segundo orden es :
$$E_n^{(2)} = \sum_{k\neq n} \frac{|< \phi_k|H_1|\phi_n >|^2}{E_n^0 - E_k^0}.$$

Examen de Conocimientos de Doctorado
Mecánica Cuántica
Horario: 8AM-12M. 12 de Julio. (2012)

Nombre: ______________________________

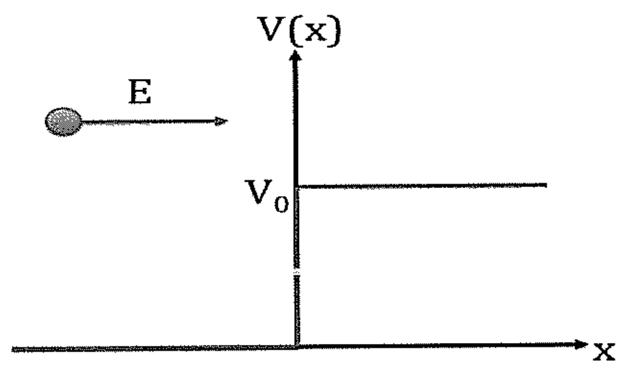
Código: ________________

1. **(10 ptos)** (PREGRADO)

   Suponga que una partícula de masa m, interactúa con un potencial, descrito por una función paso:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & x \geq 0 \end{cases}$$

   donde $V_0 \geq 0$. Sí la energía de la partícula, E, es mayor que V_0 y se considera que incide sobre el lado izquierdo del potencial, como se muestra en la figura:



   (a) **(3.5 ptos)** Calcule las soluciones de la ecuación de Schödinger independientes del tiempo, en las regiones $x < 0$ y $x \geq 0$.

   (b) **(3.5 ptos)** Especifique, discuta y aplique las condiciones de frontera adecuadas para calcular la función de onda completa.

   (c) **(3 ptos)** Calcule las probabilidades de que la particula sea transmitida (T) y reflejada (R).

SOLUCION

(a) Si (I) es la región para $x < 0$ en donde el potencial es cero, y (II) para $x \geq 0$ en donde el potencial es V_0, entonces toca resolver la ecuación de Schrödinger en todo el espacio.

Para la zona (I)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi_I(x)}{dx^2} = E\Psi_I$$

cuya solución corresponde a la superposición de una onda transmitida y una onda reflejada

$$\Psi_I(x) = Ae^{ik_Ix} + Be^{-ik_Ix} \qquad \text{donde se ha definido} \quad k_I = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

Para la región (II)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi_{II}(x)}{dx^2} + V_0\Psi_{II} = E\Psi_{II}$$

cuya solución corresponde a la superposición de una onda transmitida y una onda reflejada

$$\Psi_{II}(x) = Ce^{ik_{II}x} \qquad \text{donde se ha definido} \quad k_{II} = \sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}$$

cuya solución corresponde a una onda transmitida. Por lo tanto la función de onda es

$$\Psi(x) = \begin{cases} \Psi_I(x) = Ae^{ik_Ix} + Be^{-ik_Ix} & x < 0 \\ \Psi_{II}(x) = Ce^{ik_{II}x} & x \geq 0 \end{cases}$$

(b) Las constantes A, B y C, se calculan de acuerdo a las condiciones de frontera que son: la continuidad de la función de onda y sus derivadas en $x = 0$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \Psi_I(x=0) = \Psi_{II}(x=0) & \Rightarrow A + B = C \\ \left.\frac{\partial\Psi_I(x)}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial\Psi_{II}(x)}{\partial x}\right|_{x=0} & \Rightarrow k_I(A-B) = k_{II}C \end{cases}$$

de donde se tiene que

$$\begin{aligned} A + B &= C \\ A - B &= \frac{k_{II}}{k_{II}}C \\ A &= \frac{C}{2}\left(1 + \frac{k_{II}}{k_I}\right) \\ B &= \frac{C}{2}\left(1 - \frac{k_{II}}{k_I}\right) \end{aligned}$$

(c) Los coeficientes de reflexión (R) y transmisión (T) son definidos como

$$\boxed{R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \left(\frac{k_I - k_{II}}{k_I + k_{II}}\right)^2}$$

$$T = 1 - R = 1 - \left(\frac{k_I - k_{II}}{k_I + k_{II}}\right)^2 = \frac{(k_I + k_{II})^2 - (k_I - k_{II})^2}{(k_I + k_{II})^2} =$$

$$\boxed{T = \frac{4k_I k_{II}}{(k_I + k_{II})^2}}$$

2. **(25 ptos)**(POSGRADO)

   Suponga que un sistema cuántico esta descrito por únicamente dos estados, $|1\rangle$ y $|2\rangle$, los cuales son ortogonales entre ellos. La representación matricial de este sistema se puede escribir como:

$$H = \begin{pmatrix} W & V \\ V & -W \end{pmatrix}$$

   (a) **(5 ptos)** Encuentre el Hamiltoniano en téerminos de bras y kets y explique el significado de cada uno de los elementos de interacción que aparecen en el Hamiltoniano.

   (b) **(5 ptos)** Calcule los valores y vectores propios.

   (c) **(7.5 ptos)** Si se toma a V como una pequeña perturbación, calcule los valores propios de energía a primer y segundo orden de la teoría de perturbaciones.

   (d) **(7.5 ptos)** Compare los resultados obtenidos en los numerales anteriores y explique sus resultados.

SOLUCION

(a) Usando la representación de Dirac

$$H = W\left(|1\rangle\langle 1| - |\,2\rangle\langle 2|\right) + V\left(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|\right)$$

en donde W representa la diferencia de energía entre los estados V es la energía de interacción entre los niveles $|1\rangle$ y $|2\rangle$, respectivamente

(b) Supongamos un estado descrito por: $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$H|\psi >= \begin{pmatrix} W & V \\ V & -W \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Wa + Vb \\ Va - Wb \end{pmatrix} = E|\Psi >= E\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} W - E & V \\ V & -(W + E) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

La solución no trivial es cuando el determinante es igual a cero

$$det\begin{bmatrix} W - E & V \\ V & -(W + E) \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow -(W - E)(W + E) - V^2 = 0$$
$$-W^2 + E^2 = V^2 \Rightarrow E = \pm\sqrt{W^2 + V^2} = \pm\Delta$$

con los valores propios, podemos calcular los vectores propios. Si tomamos el valor propio $E = \Delta$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} W-E & V \\ V & -(W+E) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W-\Delta & V \\ V & -(W+\Delta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= 0 \\
(W-\Delta)a + Vb = 0 \Rightarrow a = -\frac{V}{W-\Delta}b = & \\
-\frac{V(W+\Delta)}{(W-\Delta)(W+\Delta)}b = -\frac{V(W+\Delta)}{W^2-W^2-V^2}b & \\
a = \frac{(W+\Delta)}{V}b &
\end{aligned}$$

con la condición que $|a|^2 + |b|^2 = 1$ se tiene que

$$\left[\left(\frac{W+\Delta}{V}\right)^2 + 1\right] b^2 = 1$$

$$\begin{aligned}
b &= \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{W+\Delta}{V}\right)^2+1}} = \sqrt{\frac{V^2}{(W+\Delta)^2+V^2}} = V\sqrt{\frac{1}{(W+\Delta)^2+V^2}} \\
a &= \frac{(W+\Delta)}{V}b = \frac{(W+\Delta)}{V}V\sqrt{\frac{1}{(W+\Delta)^2+V^2}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{a = \frac{W+\Delta}{\sqrt{(W+\Delta)^2+V^2}}}; \boxed{b = \frac{V}{\sqrt{(W+\Delta)^2+V^2}}}$$

por lo tanto para el valor propio $E = \Delta$, los valores propios son

$$\Psi_1 = \frac{1}{\sqrt{(W+\Delta)^2+V^2}}\begin{pmatrix} W+\Delta \\ V \end{pmatrix}$$

Para la raiz negativa, se hace el mismo procedimiento, solo cambiando Δ por $-\Delta$

(c) La teoría de perturbaciones requiere conocer los valores y vectores propios cuando la interacción es cero. De tal manera que cuando $V = 0$, los valores y vectores propios son

$$E_1 = W \quad \Psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = -W \quad \Psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Las correciones a primer orden son:

$$\begin{aligned}
E_1^{(1)} &= E_1 + <\Psi_1|V|\Psi_1> = E_1 + \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & V\\ V & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = E_1 + \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\V\end{pmatrix} = \\
& \boxed{E_1^{(1)} = E_1 = W} \\
E_2^{(1)} &= E_2 + <\Psi_2|V|\Psi_2> = E_2 + \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & V\\ V & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = E_2 + \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V\\0\end{pmatrix} = \\
& \boxed{E_2^{(1)} = E_2 = -W}
\end{aligned}$$

Por lo tanto a primer orden no hay corrección.
Las correciones a segundo orden son:

$$\begin{aligned}
E_1^{(2)} &= E_1 + <\Psi_1|V|\Psi_1> + \frac{|<\psi_2|V|\Psi_1>|^2}{E_1 - E_2} = E_1 + 0 + \frac{1}{2W}\left|\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & V\\ V & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right|^2 \\
&= E_1 + \frac{1}{2W}\left|\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\V\end{pmatrix}\right|^2 = E_1 + \frac{V^2}{2W} = W + \frac{V^2}{2W} \\
& \boxed{E_1^{(2)} = W + \frac{V^2}{2W}} \\
E_2^{(2)} &= E_2 + <\Psi_2|V|\Psi_2> + \frac{|<\psi_1|V|\Psi_2>|^2}{E_2 - E_1} = E_2 + 0 + \frac{1}{-2W}\left|\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & V\\ V & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right|^2 \\
&= E_2 + \frac{1}{-2W}\left|\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V\\0\end{pmatrix}\right|^2 = E_2 - \frac{V^2}{2W} = -(W + \frac{V^2}{2W}) \\
& \boxed{E_2^{(2)} = -(W + \frac{V^2}{2W})}
\end{aligned}$$

(d) Tomando los resultados para Δ

$$\Delta = \sqrt{W^2 + V^2} = W\sqrt{1 + \frac{V^2}{W^2}} \approx W(1 + \frac{V^2}{2W^2}) + \mathcal{O}(\mathcal{V}/\mathcal{W})^3 \approx W + \frac{V^2}{2W}$$

Lo cual coincide con los resultados obtenido por teoria de perturbaciones.

3. **(10 ptos)** (PREGRADO)

Suponga que en $t = 0$, la función de onda de una partícula en una dimensión se puede escribir como la superposición de dos estados $u_1(x)$ y $u_2(x)$, las cuales son soluciones a la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo y forman una base completa

(a) **(3.5 ptos)** Defina que significa en mecanica cuántica el estado estacionario y explique en que se diferencia la ecuación de Schödinger dependiente e independiente del tiempo.

(b) **(3.5 ptos)** Para esta particula, escriba la función de onda normalizada

(c) **(3 ptos)** Cuánto vale la densidad de probabilidad en un instante de tiempo t.

SOLUCION

(a) El estado estacionario significa que podemos factorizar la función de onda en una parte espacial y temporal. Esto se logra cuando el potencial de interacción solamente depende de la posición y por lo tanto el sistema oscilará en el tiempo con la energía de Bohr respectiva E. La función de onda se puede escribir como una superposicion de estados :$\Psi(x,t) = \sum_n c_n u_n(x) e^{-iE_n t/\hbar}$ donde los c_n constantes arbitrarias complejas

(b)

$$|\psi(x)|^2 = 1 = A^2(u_1(x) + u_2(x))(u_1^*(x) + u_2^*(x)) =$$
$$A^2(|u_1(x)|^2 + |u_2(x)|^2 + u_1(x)u_2^*(x) + u_2(x)u_1^*(x)) = \qquad A^2(|u_1(x)|^2 + |u_2(x)|^2) = 2A^2$$
$$\Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{la parte espacial es} \qquad \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_1(x) + u_2(x))$$

y por lo tanto la funcion de onda completa es

$$\boxed{\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_1(x)e^{-iE_1 t/\hbar} + u_2(x)e^{-iE_2 t/\hbar})}$$

(c) Para calcular la densidad de probabilidad $|\Psi(x,t)|^2 = \Psi(x,t)^*\Psi(x,t)$se necesita calcular Ψ^*

$$\Psi^*(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_1^*(x)e^{iE_1 t/\hbar} + u_2^*(x)e^{iE_2 t/\hbar})$$

$$|\Psi(x,t)|^2 = \frac{|u_1|^2}{2} + \frac{|u_2|^2}{2} + \frac{u_1^* u_2}{2} e^{\frac{i(E_1-E_2)t}{\hbar}} + \frac{u_1 u_2^*}{2} e^{\frac{-i(E_1-E_2)t}{\hbar}}$$

definiendo $u_1^* u_2 = |u_1 u_2| e^{i\theta}$

$$|\Psi(x,t)|^2 = \frac{|u_1|^2}{2} + \frac{|u_2|^2}{2} + |u_1 u_2| Cos\left(\frac{(E_1 - E_2)t}{\hbar} + \theta\right)$$

La densidad de probabilidad oscila como función del tiempo debido al último término que da cuenta de efectos de interferencia cuántica.

4. **(25 puntos)**(POSGRADO)

Suponga que una particula de masa m esta confinada espacialmente en dirección x, por un potencial armónico unidimensional, cuya frecuencia es ω. A este sistema se le perturba con una interacción cuyo Hamiltoniano esta descrito por $H_1 = -\lambda x$, en donde λ es una constante conocida.

(a) **(2 ptos)** Si el Hamiltoniano no perturbado es H_0, escriba la expresión correspondiente a H_0.

(b) **(4 ptos)** Escriba el Hamiltoniano H_0, en términos de los operadores escalera $a^\dagger$ y a, respectivamente.

(c) **(4 ptos)**Cuales son los valores y vectores propios de H_0 y cual es el grado de degeneramiento. Suponga que el estado fundamental $|0>$ lo conoce.

(d) **(5 ptos)** Escribiendo H_1 en terminos de los operadores escalera y teniendo en cuenta que H_1 es una perturbación, calcule el corrimiento de energía del $n-$esimo nivel de energía a segundo orden en teoria de perturbaciones.

(e) **(5 ptos)** Calcule los valores y vectores propios de forma exacta del hamiltoniano total $H = H_0 + H_1$ y compare sus respuestas con el punto anterior.

(f) **(5 ptos)** Demuestre que $\sum_n (E_n - E_m)|x_{mn}|^2$ es una constante, en donde E_n y $|n>$, son los valores y vectores propios del Hamiltoniano H_0, respectivamente, y $x_{mn} =< m|x|n >$

SOLUCION

(a) $H_0 = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$

(b) Usando las definiciones de los operadores escalera

$$
\begin{aligned}
H_0 &= \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = -\frac{\hbar m\omega}{4m}\left(a^\dagger - a\right)^2 + \frac{m\omega^2}{2}\frac{\hbar}{2m\omega}\left(a^\dagger + a\right)^2 \\
&= \frac{\hbar\omega}{4}\left[-(a^\dagger - a)(a^\dagger - a) + (a^\dagger + a)(a^\dagger + a)\right] \\
&= \frac{\hbar\omega}{4}\left[-(a^\dagger)^2 + a^\dagger a + a a^\dagger - a^2 + (a^\dagger)^2 + a^\dagger a + a a^\dagger + a^2\right] \\
&= \frac{\hbar\omega}{2}\left[a^\dagger a + a a^\dagger\right] = \frac{\hbar\omega}{2}\left[a^\dagger a + 1 + a^\dagger a\right] = \hbar\omega\left[a^\dagger a + \frac{1}{2}\right]
\end{aligned}
$$

(c) El operador número es $a^\dagger a$ y de esta relación es fácil saber que los niveles de energía son $E_n^0 = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ con $n = 0, 1, 2, 3, 4, ...$ y todos los niveles son no-degenerados. Dado que el estado de vacio $|0>$ se conoce, entonces el estado n es $|n >= \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0>$

(d)

$$H_1 = -\lambda x = -\lambda\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a^\dagger + a\right)$$

Tomando la expansión perturbativa para la energía a segundo orden

$$\begin{aligned} E_n &= E_n^0 + <n|H_1|n> + \sum_{k\neq n}\frac{|<n|H_1|k>|^2}{E_n^0 - E_k^0} \\ &= E_n^0 - \lambda\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} <n|\left(a^\dagger + a\right)|n> + \lambda^2\frac{\hbar}{2m\omega}\sum_{k\neq n}\frac{|<n|\left(a^\dagger+a\right)|k>|^2}{E_n^0 - E_k^0} \end{aligned}$$

el elemento matricial se puede calcular como:

$$\begin{aligned} <n|\left(a^\dagger + a\right)|k> &= <n\left(\sqrt{k+1}|k+1> + \sqrt{k}|k-1>\right) = \\ &= \left(\sqrt{k+1}<n|k+1> + 1 + \sqrt{k}<n|k-1>\right) = \\ &= \left(\sqrt{k+1}\delta_{n,k+1} + \sqrt{k}\delta_{n,k-1}\right) = \left(\sqrt{n}\delta_{n,k+1} + \sqrt{n+1}\delta_{n,k-1}\right) \end{aligned}$$

de la relación anterior se ve claramente que los elementos diagonales son cero y por lo tanto el primer término de la expansiÓn perturbativa de la energía a primer orden es cero. El termino a segundo orden es diferente de cero y por lo tanto la expansión queda

$$E_n = E_n^0 - 0 + \lambda^2\frac{\hbar}{2m\omega}\left[\frac{n}{\hbar\omega} - \frac{n+1}{\hbar\omega}\right] = E_n^0 - \frac{\lambda^2}{2m\omega^2} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega - \frac{\lambda^2}{2m\omega^2}$$

por lo tanto el corrimiento de energía es: $-\frac{\lambda^2}{2m\omega^2}$

(e) El hamiltoniano total del sistema es:

$$\begin{aligned} H &= \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} - \lambda x = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\left[x^2 - \frac{2\lambda}{m\omega^2}x\right] \\ &= \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\left[x - \frac{\lambda}{m\omega^2}\right]^2 - \frac{m\omega^2}{2}\left[\frac{\lambda^2}{m^2\omega^4}\right] \\ &= \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\left[x - \frac{\lambda}{m\omega^2}\right]^2 - \frac{\lambda^2}{2m\omega^2} \end{aligned}$$

por lo tanto si se hace el cambio de variable $y = x - \frac{\lambda}{m\omega^2}$, la ecuación de Schrödinger en el espacio real puede ser escrita como:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + \left(\frac{m\omega^2 x^2}{2} - \lambda x\right)\Psi(x) = E\Psi(x)$$
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi(y)}{dy^2} + \frac{m\omega^2 y^2}{2}\Psi(y) = (E + \frac{\lambda^2}{2m\omega^2})\Psi(y)$$

La última ecuación corresponde a la de un oscilador armónico simple en la variable y cuyos valores propios son $(n+\frac{1}{2})\hbar\omega$. Por lo tanto restando el término de la derecha, se obtiene

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega - \frac{\lambda^2}{2m\omega^2}$$

El último termino, corresponde al obtenido por teoría de perturbaciones. Las correcciones a mayor orden, evidentemente se hacen cero.

(f) Usando los resultados para los elementos matriciales de x

$$\sum_n (E_n - E_m)|x_{mn}|^2 = \hbar\omega\frac{\hbar}{2m\omega}\sum_n (n-m)\left(\sqrt{n}\delta_{m,n-1} + \sqrt{n+1}\delta_{m,n+1}\right)^2$$
$$= \frac{\hbar^2}{2m}\left[(m+1-m)(m+1) + (m-1-m)m\right] = \frac{\hbar^2}{2m}\left[m+1-m\right] = \frac{\hbar^2}{2m}$$

por lo tanto el resultado solo depende de constantes.

5. **(30 puntos)**(POSGRADO AVANZADO)

El Hamiltoniano de un sistema de dos partículas de spin 1/2 esta descrito por:

$$H = \epsilon_1 \sigma_{1z} + \epsilon_2 \sigma_{2z} \tag{88}$$

en donde ϵ_1 y ϵ_2 son constantes reales y σ_{1z} y σ_{2z} son los operadores de proyección de spin $\mathbf{S_1} = \frac{\hbar}{2}\sigma_1$ y $\mathbf{S_2} = \frac{\hbar}{2}\sigma_2$, a lo largo del eje z. Suponga que los estados de spin de una partícula $|\pm>$, correponden a la componente que apunta en dirección $\pm z$

(a) **(6 ptos)** El estado inicial del sistema a $t = 0$ es $|\Psi(0)> = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-> + |-+>)$. Si se mide $\mathbf{S^2} = (\mathbf{S_1} + \mathbf{S_2})^2$ en un instante de tiempo t, cuáles son los valores que puede tomar S y cuales son sus respectivas probabilidades como función del tiempo.

(b) **(8 ptos)** Calcule el valor esperado de $\mathbf{S^2}$.

(c) **(8 ptos)** Sí el estado del sistema es un estado arbitrario, cuales serán las frecuencias de Bohr respectivas que aparecerán en la evolución de $< S^2 >$.

(d) **(8 ptos)** Responda las mismas preguntas de (a) y (b), para $S_x = S_{1x} + S_{2x}$.

SOLUCION

(a) Los estados propios de $\mathbf{S^2} = (\mathbf{S_1} + \mathbf{S_2})^2$ (y de paso de S_z) son los estados $|Sm_s>$, en donde $S = 0, 1$, corresponden a los estados singlete y triplete, respectivamente. Los resultados de la medida son:

$$\begin{cases} S = 1 \rightarrow 2\hbar^2 \\ S = 0 \rightarrow 0 \end{cases}$$

(b) Sin embargo, los estados $|S, m_s>$ no son estados propios del Hamiltoniano y por lo tanto las probabilidades de obtener (S=1) y (S=0), cambian como función del tiempo. Los estados estacionarios del sistema son:

$$|m_1 = \pm\frac{1}{2}, m_2 = \pm\frac{1}{2} > = [|++>, |+->, |-+>, |-->]$$

y los estados de energía, están dados por:

$$H|-> = (\epsilon_1\sigma_{1z} + \epsilon_2\sigma_{2z})|-> = (\pm\epsilon_1 \pm \epsilon_2)|->$$

Por lo tanto tomando el estado inicial del sistema como $|\Psi(0)> = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-> + |-+>) = |S = 1, m_s = 0>$. Los estados se pueden expresar en la base de (1 y 0) como: $|+-> = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,0> + |0,0>)$ y $|-+> = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,0> - |0,0>)$

$|+->= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,0> +|0,0>)$, podemos decir, que el estado evoluciona como función del tiempo

$$
\begin{aligned}
|\psi(t)> &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{-i\frac{(\epsilon_1-\epsilon_2)t}{\hbar}}|+-> + e^{i\frac{(\epsilon_1-\epsilon_2)t}{\hbar}}|-+>\right] \\
&= cos\left[\frac{(\epsilon_1-\epsilon_2)t}{\hbar}\right]|1,0> -isin\left[\frac{(\epsilon_1-\epsilon_2)t}{\hbar}\right]|0,0>
\end{aligned}
$$

Por lo tanto las probabilidades de obtener (S=1) y (S=0) son:

$$
\begin{cases}
Prob(S=0) = |\langle S=0, m_s=0|\Psi(t)\rangle|^2 = Sin^2\left[\frac{(\epsilon_1-\epsilon_2)t}{\hbar}\right] \\
Prob(S=1)\left|\sum_{m_s=-1,0,1}\langle S=1, m_s|\Psi(t)\rangle\right|^2 = Cos^2\left[\frac{(\epsilon_1-\epsilon_2)t}{\hbar}\right]
\end{cases}
$$

De esta forma se pueden calcular los valores esperados de S^2

$$
\begin{aligned}
<\Psi(t)|S^2|\Psi(t)> &= 2\hbar^2.Prob(S=1) + 0.Prob(S=0) = \\
&= 2\hbar^2 Cos^2\left[\frac{(\epsilon_1-\epsilon_2)t}{\hbar}\right] = \hbar^2(1+Cos(\omega_B t))
\end{aligned}
$$

en donde se ha definido la frecuencia de Bohr como:$\omega_B = 2(\epsilon_1-\epsilon_2)t/\hbar$. De la ecuación (89) el operador $S_z = S_{1z} + S_{2z}$, conmuta con el Hamiltoniano y $S_z|\Psi(0)>= 0$ y por lo tanto podemos expresar $\Psi(t)$, como una combinación lineal:$|\Psi(t)>= C_1(t)|1,0> +C_2(t)|0,0>$. En donde $C_1(t)$ y $C_2(t)$, son coeficientes complejos dependientes del tiempo. Por lo tanto, para calcular las probabilidades:

$$
\begin{cases}
Prob(S=0) = |\langle S=0, m_s=0|\Psi(t)\rangle|^2 = |C_2(t)|^2 \\
Prob(S=1) = |\langle S=1, m_s=0|\Psi(t)\rangle|^2 = |C_1(t)|^2
\end{cases}
$$

(c) Supongamos un estado inicial arbitrario de la forma

$$
\begin{aligned}
|\Psi(0)\rangle &= \alpha|++\rangle + \beta|+-\rangle + \gamma|-+\rangle + \delta|--\rangle = \alpha \\
|\Psi(t)\rangle &= \alpha e^{-i\frac{(\epsilon_1+\epsilon_2)t}{\hbar}}|++\rangle + \beta e^{-i\frac{(\epsilon_1-\epsilon_2)t}{\hbar}}|+-\rangle + \gamma e^{i\frac{(\epsilon_1-\epsilon_2)t}{\hbar}}|-+\rangle + \delta e^{i\frac{(\epsilon_1+\epsilon_2)t}{\hbar}}|--\rangle \\
|\Psi(t)\rangle &= \alpha e^{-i\frac{(\epsilon_1+\epsilon_2)t}{\hbar}}|1,1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta e^{-i\frac{(\epsilon_1-\epsilon_2)t}{\hbar}} + \gamma e^{i\frac{(\epsilon_1-\epsilon_2)t}{\hbar}})|1,0\rangle \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta e^{-i\frac{(\epsilon_1-\epsilon_2)t}{\hbar}} - \gamma e^{i\frac{(\epsilon_1-\epsilon_2)t}{\hbar}}|0,0\rangle) + \delta e^{i\frac{(\epsilon_1+\epsilon_2)t}{\hbar}}|1,-1\rangle
\end{aligned}
$$

por lo tanto el valor esperado de $\mathbf{S}^2$ es

$$
\langle\Psi(t)|S^2|\Psi(t)\rangle = 2\hbar^2\left[|\alpha|^2 + |\delta|^2 + \frac{1}{2}(|\beta|^2 + |\gamma|^2 + Re(\beta^*\gamma e^{2i(\epsilon_1-\epsilon_2)/\hbar})\right]
$$

La frecuencia de Bohr, es la misma que se obtuvo en la parte (a). Este resultado se ve más claro cuando se toma el límite $\alpha = \delta = 0$ y $\beta = \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(d) Para calcular el valor promedio de S_x, tenemos que calcular

$$\begin{aligned}
S_x|\Psi(t)\rangle = (S_{1x}+S_{2x})|\Psi(t)\rangle &= \frac{\hbar}{2}\Big(\Big[\alpha e^{-i\frac{(\epsilon_1+\epsilon_2)t}{\hbar}} + \delta e^{i\frac{(\epsilon_1+\epsilon_2)t}{\hbar}}\Big]\left[|+-\rangle + |-+\rangle\right] \\
&\quad + \Big[\beta e^{-i\frac{(\epsilon_1-\epsilon_2)t}{\hbar}} + \gamma e^{i\frac{(\epsilon_1-\epsilon_2)t}{\hbar}}\Big]\left[|++\rangle + |--\rangle\right]\Big) \\
&= \frac{\hbar}{2}\left[\alpha^*\beta e^{2i\epsilon_2 t/\hbar} + \alpha^*\gamma e^{2i\epsilon_1 t/\hbar} + \delta^*\beta e^{-2i\epsilon_2 t/\hbar} + \delta^*\gamma e^{-2i\epsilon_2 t/\hbar} + \right. \\
&\quad \left. \alpha^*\beta e^{-2i\epsilon_2 t/\hbar} + \beta^*\delta e^{2i\epsilon_1 t/\hbar} + \gamma^*\alpha e^{-2i\epsilon_1 t/\hbar} + \gamma^*\delta e^{2i\epsilon_2 t/\hbar}\right] \\
&= \hbar Re\left[(\alpha^*\beta + \gamma^*\delta)e^{2i\epsilon_2 t/\hbar} + (\alpha^*\gamma + \beta^*\delta)e^{2i\epsilon_1 t/\hbar}\right]
\end{aligned}$$

Para este caso se ve claramente que las frecuencias de Bohr, típicas del problema son $\omega_{B1} = 2\epsilon_1/\hbar$, $\omega_{B2} = 2\epsilon_2/\hbar$