UNIVERSIDAD DE LOS ANDES *DEPARTAMENTO DE FÍSICA*

EXAMEN DE CONOCIMIENTOS DEL PROGRAMA DE DOCTORADO

Mecánica Estadística y Termodinámica – *Prof. Roldán*

Enero 12 de 2012

NOMBRE:______________________________ CÓDIGO:______________ NOTA:__________/100

1. (30 puntos) Estime el tiempo requerido para que una molécula de aire se difunda a través de un cuarto, de pared a pared. (Proporcionar una respuesta numérica, para lo cual debe valorar, al menos en orden de magnitud, todas las variables que así lo requieran).

2. (35 puntos) Calcule la energía libre por partícula, en el límite termodinámico, para un sistema de rotores descrito por el hamiltoniano clásico

$$H = \sum_{j=1}^{N} \frac{P_{\theta j}^2}{2I} - J \sum_{j=1}^{N-1} \cos\left(\theta_{j+1} - \theta_j\right) \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

3. (35 puntos) (a) Un sistema, térmicamente aislado, consiste de dos esferas de cobre idénticas de masa m con temperaturas $T_1 = T + \delta T$ y $T_2 = T - \delta T$. El calor específico por unidad de masa es c y puede considerarse constante. Las dos esferas se ponen en contacto térmico. Calcule el incremento en la entropía del sistema cuando alcanza el equilibrio térmico, y las contribuciones a este incremento de cada una de las esferas. Determine el primer término no nulo de la expansión del incremento de la entropía en términos de las potencias de δT.

(b) Calcule la energía que podría extraerse llevando las esferas a una temperatura final común en un proceso reversible. Compare esta temperatura final con la de la parte (a).

<u>SOLUCIÓN:</u>

Electrodynamics - Examen de conocimiento (2012-I)
Duration: 2 hrs

I *3 points*
Let $\vec{A}(\vec{r},\omega)$, $\phi(\vec{r},\omega)$, $\vec{J}(\vec{r},\omega)$ and $\rho(\vec{r},\omega)$ be the temporal Fourier transforms of the vector potential, scalar potential, current density and charge density respectively.
(i) Show that

$$\phi(\vec{r},\omega) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\vec{r}\,',\omega)\, \frac{e^{i\,K|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, d^3r'$$

$$\vec{A}(\vec{r},\omega) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{J}(\vec{r}\,',\omega)\, \frac{e^{i\,K|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, d^3r'$$

where $K = \omega/c$.
(ii) How is the law of charge current conservation expressed in terms of $\rho(\vec{r},\omega)$ and $\vec{J}(\vec{r},\omega)$.
(iii) In the far zone ($r \to \infty$) find the expression for the vector potential and express it in terms of the electric and magnetic dipole moments of the sources.
(iv) Using the result from (iii) and with the help of one of Maxwell's equations, find the electric and magnetic fields $\vec{E}(\vec{r},\omega)$ and $\vec{B}(\vec{r},\omega)$. Find these fields for $\vec{J}(\vec{r},\omega) = \vec{r} f_\omega(r)$.

Hints: Note that as $r \to \infty$, $|\vec{r}-\vec{r}\,'| \simeq r - (\vec{r}\cdot\vec{r}\,')/r$ and $\exp(z) \simeq 1 + z + ...$
For (iii), consider $\nabla' \cdot (x'\vec{J}_\omega) = J_{\omega x'} + x'\nabla \cdot \vec{J}_\omega$ and that for $r \to \infty$, $\vec{J}_\omega(\vec{r}\cdot\vec{r}\,') \simeq (1/2)\,(\vec{r}\,' \times \vec{J}_\omega) \times \vec{r}$ (here $\vec{J}_\omega \equiv \vec{J}(\vec{r},\omega)$).

II *2 points*

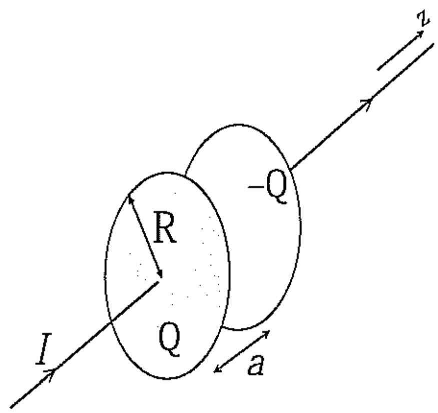

Figure 1:

In the figure is shown a parallel plate capacitor with plates of radius R and a distance "a" between them. Assume that the charge Q is spread uniformly over the plates.
(1) Find the electric and magnetic fields in the gap, as a function of the distance 'r' ($< R$) from the axis and at time t.
(Hint: To find $\vec{B}$, use Stoke's theorem with a loop at $r < R$ inside the gap).

(2) Find the energy density U_{EM} and Poynting vector $\vec{S}$ in the gap.

(3) Show from (2) that energy is conserved locally in the fields.
(Hint: The current $I = dQ/dt$, is a steady current).

Examen de Conocimiento 2012, Quantum Mechanics

Marek Nowakowski

25 de septiembre, 2009

Nombre y Código: ____

1. (13 *Points*) Theory Question. Topics covered: operator algebra, commutation relations, construction of a quantum mechanical vacuum, recognizing harmonic oscillator, finding eigenvalues.
Given is the Hamilton operator H:

$$h \equiv \frac{H}{\hbar\omega} = \frac{5}{3}a^\dagger a + \frac{2}{3}(a^\dagger)^2 + \frac{2}{3}(a)^2$$

in which the operators a and $a^\dagger$ satisfy $[a, a^\dagger] = 1$. Furthermore, we can assume the existence of a state $|0\rangle$ which gets annihilated by a.

   (a) (3 *Points*) By using an ansatz of a linear combination (with real coefficients) of a and $a^\dagger$ find explicitly the operator Q such that

$$\begin{aligned} [Q, Q^\dagger] &= 1 \\ [h, Q] &= -Q \\ [h, Q^\dagger] &= Q^\dagger \end{aligned} \tag{1}$$

   (b) (2 *Points*) Prove by induction the following relation for $n = 1, 2, 3...$

$$[a, (a^\dagger)^n] = n(a^\dagger)^{n-1}$$

   (c) (4 *Points*) Assume the existence of a state $|\Omega\rangle$ with the property $Q|\Omega\rangle = 0$. Use the result from above to construct $|\Omega\rangle$in terms of $|0\rangle$ and $a^\dagger$. You can use as starting point

$$|\Omega\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (a^\dagger)^n |0\rangle$$

   where c_n are real numbers to be found. Express your final result as

$$|\Omega\rangle = f(a^\dagger)|0\rangle$$

   i.e., find the function f.

   (d) (2 *Points*) Write h or H in terms of Q and $Q^\dagger$.

   (e) (2 *Points*) Find the eigenvector to H (in terms of $Q^\dagger$ and $|\Omega\rangle$) and the eigenvalues E_n.

2. (12 *Points*) Phenomenological question allowing the student to use his/her knowledge. Topics covered: 2-dimensional Schrödinger equation, Spin, Spin-magnetic field interaction, quantum mechanical probability, resonance phenomena.
A spin flipper device is based on a magnetic field $\vec{B}_0$ and a time dependent magnetic field perpendicular to it, i.e., $\vec{B}_1(t) = B_1(\cos\omega t\hat{x} + \sin\omega t\hat{y})$. At $t = 0$ a neutron occupies the state $|\uparrow\rangle$ (relative to the $\hat{z}$ axis). What must be the relation between the neutron magnetic dipole moment μ_N and the rest of the parameters in order to have maximum spin-flip probability? The time the neutron spends in the magnetic region is τ_N. Ignore spatial degrees of freedom.
HELP:

1. Pauli matrices:?
2. For the coupled differential system you may make the ansatz: $a(t) = \exp(-i\omega t/2 + i\Omega t)$, $b(t) = \exp(i\omega t/2 + i\Omega t)$

(a) (4 *Points*) To posit the equation to be solved.

(b) (4 *Points*) The solution

(c) (2 *Points*) Resonance condition

(d) (2 *Points*) Time condition

Universidad de los Andes - Departamento de Física
Examen de conocimientos: Mecánica
Enero/2012

Profesor: Alejandro García

- **1. Fuerza central (2.5/5.0)**
Considere una masa m bajo la acción de una fuerza central $f(r)$, tal que la trayectoria seguida por m está dada por: $r^n = a^n \cos n\theta$, $a > 0$ es una constante, θ es el ángulo polar y r la distancia al centro de fuerza

  a. (1.5/5.0) Usando la formulación Lagrangiana, demuestre que la fuerza puede escribirse como: $f(r) = -\dfrac{mC}{r^{2n+3}}$
La constante C puede escribirse en función del momento ángular y las constantes a y n.
b. (1.0/5.0) Indique para qué valores de n la fuerza será atractiva o repulsiva respectivamente, y discuta el movimiento para los casos partículares $n = -1$ y $n = -2$

- **2. Partícula confinada (2.5/5.0)**
Una partícula está confinada a moverse dentro de una caja unidimensional (por ejemplo a lo largo del eje x), con una velocidad ν. Las paredes de la caja se mueven lentamente una hacia la otra, con una velocidad V constante y pequeña comparada con la velocidad de la luz. Considere el movimiento de las paredes y la partícula tal que $\nu \gg V$.
a. (1.0/5.0) Si el momento de la partícula es p_0 cuando las paredes estan separadas una distancia x_0, encuentre el momento de la partícula en cualquier tiempo posterior.
b. (1.5/5.0) Cuál es la fuerza que debe aplicarse a una de las paredes para mantener la velocidad V constante, cuando la separación entre ambas es x? Resuelva esta pregunta usando el formalismo Hamiltoniano.