PROBLEMAS DE MECÁNICA

EXAMEN DE CONOCIMIENTOS – PROGRAMA DE DOCTORADO en FÍSICA – ENERO 19 DE 2011

Prof.: José Rolando Roldán, PhD

*NOMBRE:*___________________________________ *CÓDIGO:*__________________ *NOTA:*________________*/100*

1. Una partícula de masa m se coloca en la parte superior de un aro fijo vertical de radio R, y comienza a deslizar, sin fricción, a partir del reposo. Mediante los multiplicadores de Lagrange determine la reacción del aro sobre la partícula. Encuentre la altura sobre el piso a la cual la partícula se despega del aro.
2. Considere un cuerpo rígido que rota libremente, es decir, sin torques externos, alrededor de un eje principal, con momentos de inercia, respecto a los ejes principales, en relación $I_3 > I_2 > I_1$. Discuta la estabilidad del movimiento alrededor de cada uno de esos ejes.

SOLUCIÓN:

Universidad de Los Andes
Departamento de Física

Examen de Conocimientos

Módulo Electrodinámica

---

1. Antena de Onda Completa. En el gauge de Lorentz, la solución de la ecuación de onda para el potencial vector como función de la densidad de corriente es

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3\vec{r}\,'\ \frac{\vec{J}\left(\vec{r}\,', t - \frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}\,'|\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,.$$

Considere una antena lineal de onda completa (longitud total $= \lambda = 2\pi/k$), y cuya densidad de corriente compleja está dada por

$$\vec{J}(\vec{r},t) = I_0 e^{-i\omega t}\sin(kz)\delta(x)\delta(y)\hat{z}, \quad |z| \leq \pi/k\,.$$

donde $\omega = kc$. Analizando el comportamiento cuando $r \gg \lambda$), encuentre los campos eléctricos y magnéticos en la zona de radiación y la distribución angular de la potencia radiada $\frac{dP}{d\Omega}$ en términos del ángulo polar θ medido con respecto al eje de la antena.

Integral útil:

$$\int_{-\pi}^{\pi} du\ \sin(u)e^{iu\xi} = \frac{2i}{1-\xi^2}\sin(\pi\xi)$$

---

2. Onda Evanescente. Considere un medio dispersivo con constante dieléctrica compleja en función de la frecuencia angular, dada por

$$\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0} = 1 + A\frac{\omega_0\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}\,.$$

Considere una lámina infinita llena de este medio, de grosor d. Si de un lado de la lámina incide normalmente radiación electromagnética con una cierta distribución espectral $f(\omega) = dI/d\omega$, encuentre la curva que describe la distribución espectral de la radiación saliente, suponiendo que $A \ll 1$ pero no necesariamente que $Ad\omega/c \ll 1$.

Examen de conocimientos
Mecánica cuántica

I) Molécula en rotación.

Vamos a considerar el hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{J_x^2}{I_x} + \frac{J_y^2}{I_y} + \frac{J_z^2}{I_z}\right)$$

En donde $\vec{J}$ es un momento angular y los I_i son momentos de inercia. Este hamiltoniano corresponde a la energía de rotación de una molécula con momentos de inercia I_x, I_y e I_z según sus ejes principales.

1°) A partir del calculo de $\left[J_i, J_k^2\right]$ mostrar que $\left[J_i, J^2\right] = 0$ y deducir que $\left[H, J^2\right] = 0$. Explique si a partir de esto podemos concluir que $\left[H, J_z\right] = 0$.

2°) Calcular el espectro de H cuando j=1. Para hacerlo haga explícitas las matrices que representan los diferentes J_i en la base estándar de vectores $|j,m\rangle = |1,m\rangle$.

3°) ¿Qué diferencias aparecerán cuando $I_x = I_y$ y cuando $I_x = I_y = I_z$?

II) Espín nuclear

Un cierto núcleo atómico que contiene N nucleones posee un espín (momento angular total) igual a $\frac{3}{2}$.

1°) Explicar porqué N es necesariamente impar con N>2.

Le aplicamos un campo magnético constante y uniforme a este sistema.

2°) Escribir el hamiltoniano de interacción entre el campo magnético aplicado y el núcleo (expresión detallada) explicitando los diferentes términos y su significado. ¿Si intentamos realizar un experimento de resonancia magnética nuclear sobre este núcleo podremos medir alguna señal? Explicar porqué.

Ahora vamos a considerar el sistema constituido por el mismo núcleo con un neutrón extra.

3°) ¿Cuáles son los valores posibles del numero cuántico J asociado al momento angular total del sistema? ¿Cuáles son los valores posibles cuando el sistema está en un estado S (L=0)?