Universidad de los Andes - Departamento de Física
Examen de Conocimientos: Mecánica Estadística y Termodinámica
Mayo de 2010

n cuenta la indistinguibilidad de partículas, la expresión clásica para la entropía de un
lativista de N partículas de masa m sin spín, con *energía cinética* E, y que ocupa un volumen V es

$$S(E,V,N) = Nk\left[\frac{5}{2} + \log\left(\frac{A(mE)^{3/2}V}{N^{5/2}}\right)\right].$$

donde A es una cantidad dimensional que sólo involucra constantes fundamentales. Suponga que en un recipiente aislado térmicamente y de volumen V coexisten en equilibrio termodinámico N_e electrones libres, N_p protones libres, y N_H átomos de hidrógeno, cada especie tratada como un gas ideal clásico no-relativista sin spín. Se admiten además las reacciones de asociación/disociación

$$e + p \leftrightarrow H\,.$$

Suponga que todos los átomos de hidrógeno están en su estado fundamental, de tal manera que la energía total de cada átomo es de la forma

$$\epsilon_H = \frac{p^2}{2m_H} - \epsilon_R\,, \quad \epsilon_R = 13{,}6eV\,.$$

a) De las leyes de conservación de energía, conservación de número total (libres+ligados) de electrones y de número total de protones , obtenga tres ecuaciones de ligadura relacionando las variables N_e, N_p y N_H , E_e, E_p y E_H, donde las tres últimas son las energías cinéticas de los tres gases.

b) Maximizando la entropía total sujeta a las anteriores restricciones, demuestre que en equilibrio termodinámico, los números N_e, N_p y N_H satisfacen la llamada ecuación de ionización de Saha:

$$\frac{N_e N_p}{N_H} = AV\left(\frac{m_e m_p}{m_e + m_p}\right)^{3/2}\left(\frac{3}{2}kT\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{\epsilon_R}{kT}\right),$$

donde T es la temperatura del sistema. Comente sobre el comportamiento de la mezcla como función de la temperatura.

---

2. Un cierto polímero se puede modelar como una cadena en una dimensión, compuesta de N eslabones, y en la cual cada eslabón puede estar en una de tres configuraciones rotualadas por un índice s, con $s = 0, 1$ o 2. Un eslabón en una configuración s tiene longitud $l(s) = a(s+1)$ y contribuye una energía $\epsilon(s) = u|s-1|$. Sea L la longitud total y E la energía total del polímero. Encuentre la entropía del polímero en función de N, L y E. A partir de la entropía deduzca que cuando

$$\left|\frac{L}{2a} - N\right| \ll \frac{E}{2u},$$

el polímero se comporta como un resorte, con constante de resorte $K(T)$, dependiente de la temperatura
Extra: ¿Podría encontrar una expresión para $K(T)$?

Ayuda: Si $\sum_i N_i = N$, entonces

$$\log\frac{N!}{\Pi_i N_i!} \simeq N\log N - \sum_i N_i \log N_i\,,$$

usando la aproximación de Stirling.

Universidad de los Andes - Departamento de Física
Examen de Conocimientos: Mecánica Clásica
Mayo de 2010

---

1. (2.5 puntos) Un cohete de masa inicial m_0 expulsa gas a una tasa $\alpha = -\frac{dm}{dt}$(con $\alpha > 0$) a una velocidad v_0 constante relativa al cohete. Considerando que el cohete sólo se mueve cerca a la superficie de la Tierra,

a) Encuentre la ecuación para la altura del cohete $h(t)$.

b) En $t = T$ el combustible se agota. Calcule la altura total h que alcanza el cohete en todo su desplazamiento.

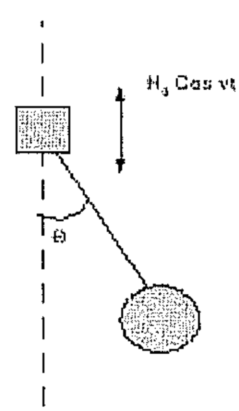
c) Cuál es la forma óptima para el quemado de combustible de manera que el cohete alcance la máxima altura posible?.

2. (2.5 puntos) Considere un péndulo de longitud L cuyo punto de suspensión oscila verticalmente siguiendo la ley: $H_0 \cos \nu t$.

a) Determine el lagrangiano del sistema.

b) Obtenga la ecuación de movimiento del sistema. En qué situación esta ecuación se reduce a la de un péndulo simple?.

c) Qué ecuación se obtiene en general para oscilaciones pequeñas?. Interprete sus resultados en términos de marcos de referencia no inerciales. Discuta cómo es el movimiento para diferentes valores de h_0 y ν.

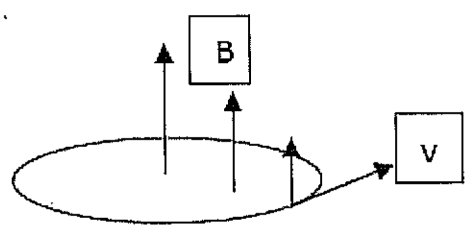


Universidad de los Andes - Departamento de Física
Examen de Conocimientos: Electrodinámica
Mayo de 2010

---

1. (2.5 puntos) Una esfera de radio a tiene una distribución superficial de carga dada por $\sigma = \sigma_0 \cos 2\theta$. Encuentre el potencial en todos los puntos del espacio exterior a la esfera. Identifique los multipolos presentes en la expansión. En esa misma región calcule el campo eléctrico.

2. (2.5 puntos) En un Betatrón, un tipo de acelerador inductivo construido a comienzos de los años 40, los electrones se mueven en una órbita de radio R y son acelerados por un flujo magnético creciente en el tiempo producido por un campo magnético $\mathrm{B}(r,t)$. ¿Cómo debe el campo magnético en la posición de la órbita del electrón, $\mathrm{B}(R,t)$, relacionarse al campo magnético promedio, promediando sobre el plano de la órbita, con el fin de que la órbita del electrón mantenga su radio constante? Usar mecánica no-relativista.



Universidad de los Andes - Departamento de Física
Examen de Conocimientos: Mecánica Cuántica
Mayo de 2010

---

1. (2.5 puntos) La energía de ionización del átomo de hidrógeno depende tanto de la masa del electrón m_e como de la masa del protón m_p. El valor aproximado de esta energía está dado por $E_H \simeq e^4 m_e / 2\hbar^2$. El deuterio es un isótopo del hidrógeno cuyo núcleo es un deuterón, es decir, un protón mas un neutrón. La masa del deuterón es m_d.

(a) Calcule la energía de ionización del deuterio E_D. Estime $\delta E / E_H$, donde $\delta E = E_D - E_H$.

(b) Compare esta corrección con aquella debida a la interacción *spin-órbita*:

$$W_{SO} \simeq \frac{e^2 \hbar^2}{m_e^2 c^2 R^3} \; ,$$

(donde R es del orden de magnitud del tamaño de la órbita).

(c) ¿ Qué otras correcciones a la energía de ionización serían de un orden de magnitud similar al de la corrección *spin-orbita* ?

(Radio de Bohr : $a_0 = \hbar / m_e e^2$. Constante de estructura fina: $\alpha = e^2 / \hbar c$)

5 D
s 5 relat.

$\langle \frac{1}{R^3} \rangle = \int \cdots \frac{1}{R^3}$