Universidad de los Andes-Departamento de Física
Examen de Conocimientos: Mecánica Estadística
Enero de 2010

---

1. (2.5 puntos) Considere una partícula con espín 1/2 y sometida a un campo magnético h así como a una fuerza armónica, es decir, cuyo Hamiltoniano es dado por

$$H = -gh\sigma_z + \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} \tag{1}$$

El sistema empieza a la temperatura T y con $h = 0$, y después se le somete al *ciclo* definido por los dos procesos siguientes

1. aumento *isotérmico* del campo magnético de cero hasta el valor h_0
2. disminución *adiabática* del campo magnético del valor h_0 hasta cero otra vez.

Escribir una ecuación que permita determinar la temperatura final T_1 del sistema. ¿Es ésta mayor o menor que T? ¿Puede darse una justificación sencilla del resultado obtenido?

Observación: estamos aquí hablando de una sola partícula. Sería equivalente hablar de N partículas no-interactuantes con el Hamiltoniano (1).

2. (2.5 puntos)Una partícula cargada de carga q y de masa m se encuentra en un campo magnético externo constante B, es decir, su hamiltoniano es dado por

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_1 - \frac{qB}{c}x_2\right)^2 + \frac{p_2^2}{2m}. \tag{2}$$

Determinar la distribución de las *velocidades* de la partícula, si ésta tiene temperatura T.¿Es esta distribución la Maxwelliana?

Universidad de los Andes-Departamento de Física
Examen de Conocimientos: Electrodinámica
Enero de 2010

---

1. (2.5 puntos) Un solenoide semi-infinito de radio R y n vueltas por unidad de longitud (con $n \gg 1$) transporta una corriente I. Encuentre una expresión para la componente radial del campo magnético, $B_r(z_0)$, muy cerca al eje, en el extremo del solenoide, es decir, para $r \ll R$ y $z = 0$.

2. (2.5 puntos) Determine los campos eléctrico y magnético generados por una carga e que se mueve en la dirección del eje x con velocidad uniforme v.

Universidad de los Andes-Departamento de Física
Examen de Conocimientos: Mecánica Analítica
Enero de 2010

---

1. (2.5 puntos) Considere un sistema Hamiltoniano de un grado de libertad, cuyas ecuaciones de movimiento dan lugar a soluciones periódicas. ¿Cómo se definen las variables de ángulo-acción para un tal sistema? Sea

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

el Hamiltoniano de un oscilador armónico unidimensional. Obtenga las variables de ángulo-acción para este Hamiltoniano. Exprese las variables canónicas q y p en términos de las variables de ángulo-acción y muestre explícitamente que dicha transformación es canónica.

2. (2.5 puntos) Una partícula cargada (carga= e, masa=m) que se encuentra bajo la influencia de un campo electromagnético, es descrita por la siguiente función de Lagrange ($\mathbf{r} = (x, y, z)$):

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - e\phi(\mathbf{r}, t) + \frac{e}{c}\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t),$$

donde ϕ representa el potencial eléctrico y $\mathbf{A}$ el potencial magnético:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\nabla\phi(r, t) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

Usando las ecuaciones de Euler-Lagrange, obtenga las ecuaciones de movimiento y exprésela en términos de los campos eléctrico ($\mathbf{E}$) y magnético ($\mathbf{B}$). Cuál es el efecto de la transformación

$$\begin{aligned} \phi'(\mathbf{r}, t) &= \phi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c}\frac{\partial\chi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ \mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla\chi(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

sobre el Lagrangiano? (χ es una función arbitraria de $\mathbf{r}$ y t; transformación gauge). Muestre que, bajo esta transformación, las ecuaciones de movimiento permanecen invariantes.

Universidad de los Andes-Departamento de Física
Examen de Conocimientos: Mecánica Cuántica
Enero de 2010

---

1. (2.5 puntos) Considere una molécula triatómica donde los tres átomos son idénticos y se encuentran alineados. La distancia entre el átomo A y el átomo B es igual a la distancia entre el átomo B y el átomo C y tiene un valor d.

$$A - B - C$$

Un electron en esta molécula puede encontrarse en uno de los tres estados de localización:

- $|\varphi_A>$ (posición $= -d$)
- $|\varphi_B>$ (posición $= 0$)
- $|\varphi_C>$ (posición $= +d$)

La energía de acoplamiento del electron a cada átomo individual es E_0. La energía de acoplamiento entre átomos contiguos es $-a$.
Si $\{|\varphi_A>, |\varphi_B>, |\varphi_C>\}$ conforma una base para el espacio de Hilbert del sistema,

(a) construya el Hamiltoniano $\hat{H}$ del sistema en esta base,

(b) encuentre las energías propias,

(c) encuentre los estados propios.

(d) Si $|\varphi(t=0)> = |\varphi_A>$, calcule $|\varphi(t)>$.