Universidad de Los Andes
Departamento de Física

Examen de Conocimientos 2009-1

Mecánica Cuántica

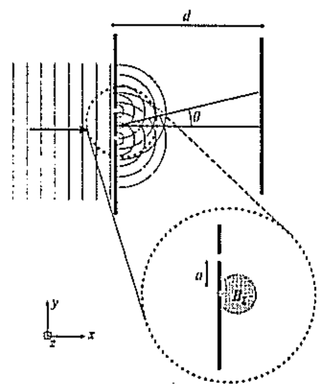
---

1. Considere un haz de neutrones en la dirección x, de momentum $\hbar k$, y el cual incide normalmente sobre una doble rendija, con separación entre rendijas a y ancho despreciable de cada rendija (ver figura). El haz saliente de una de las rendijas pasa inmediatamente después por un campo magnético en la dirección z, de magnitud dispuesta de tal forma que el momento angular intrínseco del neutrón es rotado alrededor del eje z por un ángulo ϕ. Considere dos posibles situaciones iniciales:

a) El estado cuántico de los neutrones incidentes es $|\psi\rangle = |\uparrow_z\rangle|\hbar k\rangle$

b) El estado cuántico de los neutrones incidentes es $|\psi\rangle = |\uparrow_x\rangle|\hbar k\rangle$

donde $|\uparrow_z\rangle$y $|\uparrow_x\rangle$ son autoestados de los operadores de espín a lo largo de los ejes z y x respectivamente, y donde $|\hbar k\rangle$ describe una onda plana de momentum $\hbar k$ en la dirección x.



Para los dos casos anteriores, determine la distribución de probabilidad de detección (patrón de interferencia) de neutrones sobre una pantalla que se encuentra a una distancia d, en función del ángulo θ y de los parámetros ϕ y k. Considere sólo una región de la pantalla al frente de las dos rendijas, de ancho mucho menor que d y mucho mayor que $1/k$. Ilustre sus resultados con diagramas que muestren cómo el ángulo ϕ afecta el patrón de interferencia.

---

2. Para una partícula de spin 1/2 en una dimensión (coordenada $\hat{x}$), el hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \alpha\hat{\sigma}_z + \beta\delta(\hat{x})\hat{\sigma}_x$$

admite un estado propio ligado para todo α y β. Encuentre expresiones aproximadas para la función (espinorial) de onda, el valor de la energía, y la incertidumbre en x del estado ligado, en el límite $|\beta| \ll \hbar\sqrt{|\alpha|/m}$. (Ayuda: considere los espinores del estado en la base de $\hat{\sigma}_z$, resuelva la ecuación de Schroedinger para $x \neq 0$, y ajuste condiciones de frontera en $x = 0$ para obtener un sistema homogéneo de dos ecuaciones acopladas).

Universidad de Los Andes
Departamento de Física

Examen de Conocimientos, 2009-1

Mecánica Estadística

---

1. Calcule la intensidad promedio radiada por el sistema ligado electrostáticamente de dos cargas e_1 y e_2 de signo opuesto y masa distinta, en movimiento elíptico relativo. Se puede suponer que las velocidades son no-relativistas.

Ayuda: Intensidad de radiación dipolar $I = 2|\ddot{\mathrm{d}}|^2/(3c^3)$, donde d es el momento dipolar.
La ecuación de la elipse es:

$$1 - \epsilon \cos\phi = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{r}$$

donde a es el semieje mayor y ϵ la eccentricidad. Los parámetros vienen definidos en términos del momento angular y energía según

$$a = \left|\frac{e_1 e_2}{2E}\right|, \quad \epsilon^2 = 1 - \frac{L^2}{\mu|e_1 e_2|a},$$

y el período de la órbita es $T = 2\pi a^{3/2}\sqrt{\mu/|e_1 e_2|}$.

---

2. Considere una densidad de carga $\rho(t, \vec{r})$ y densidad de corriente $\vec{j}(t, \vec{r})$. Demuestre que en el gauge de Coulomb, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, el término de fuente en la ecuación resultante para el potencial vector $\vec{A}(t, \vec{r})$ depende sólo de la parte transversal de la corriente $\vec{j}_T$.

Ayuda: La parte transversal de la corriente satisface $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_T = 0$, y la longitudinal $\vec{\nabla} \times \vec{j}_L = 0$.

Universidad de Los Andes
Departamento de Física

Examen de Conocimientos, 2009-1

Mecánica Clásica

---

1. Considere la función generatriz de una transformación canónica del tipo F_1, tal que

$$F_1 = \frac{1}{2} m\omega \cot Q \, .$$

a) Demuestre que las coordenadas q, p pueden ser expresadas como funciones de Q, P según:

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q \qquad p = \sqrt{2Pm\omega} \cos Q \, .$$

b) Demuestre que la transformación es canónica.

c) Invierta la transformación y halle $Q = Q(q,p)$ y $P = P(q,p)$.

d) Suponga que q y p son las acostumbradas coordenadas canónicas usadas para describir el oscilador armónico de masa m y frecuencia angular ω, demuestre que en las nuevas coordenadas el hamiltoniano se escribe como $K = \omega P$.

e) Para $K = \omega P$, calcule explícitamente las ecuaciones de movimiento e intégrelas. ¿Hay alguna variable cíclica o ignorable?

f) Con el resultado obtenido y usando la transformación canónica, dé las soluciones de las ecuaciones de movimiento en términos de las variables originales. Comente.

---

2. Considere una partícula de masa m está sometida a moverse sobre una superficie cilíndrica dada por la ecuación $x^2 + y^2 = R^2$. Sobre la partícula actúa una fuerza restauradora, dirigida hacia el origen de coordenadas, y proporcional en magnitud a la distancia desde este punto hasta la partícula. Dicha fuerza se escribe como $F = -kr$.

a) Calcule explícitamente el lagrangiano del sistema. Use coordenadas cilíndricas.

b) A partir del lagrangiano calcule explícitamente el Hamiltoniano. ¡No use $H = T + V$!

c) Obtenga las ecuaciones de movimiento de Hamilton (las ecuaciones canónicas de Hamilton).

d) Hay alguna cantidad conservada? Escríbala.

e) Demuestre que el movimiento en dirección del eje Z es armónico.
