Universidad de los Andes

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

DOCTORADO EN CIENCIAS – FÍSICA
EXAMEN DE CONOCIMIENTOS
MECÁNICA ESTADÍSTICA

Duración: 2 horas

Enero 2008

Desarrollar dos de los cuatro problemas propuestos.
Por favor escribir con esfero negro o azul.

I. Marcha aleatoria con potencial externo

Una partícula puede ocupar los sitios de una red unidimensional $n = \cdots, -1, 0, 1, \cdots$. Si está en el sitio n tiene una energía potencial u_n.

1. En equilibrio térmico a la temperatura T, expresar la probabilidad P_n^{eq} de encontrar la partícula en el sitio n. Usar la notación habitual $\beta = (k_B T)^{-1}$.
2. **Dinámica:** se postula la dinámica siguiente. La partícula sigue una marcha aleatoria, saltando de un sitio n a un sitio vecino $n+1$ (o $n-1$) con una tasa de transición (en esta parte el tiempo es continuo):
$$W_{n\pm1,n} = \gamma \exp\left[-\beta(u_{n\pm1} - u_n)/2\right] \tag{1.1}$$
Hay o no balance detallado?
3. Plantear la ecuación maestra para $P_n(\tau)$ la probabilidad de encontrar la partícula en el sitio n en el instante τ.
4. Explicar por qué $P_n(\tau) \to P_n^{\mathrm{eq}}$ cuando $\tau \to \infty$.
5. El paso de la red es a. Poner $x = na$, $u_n = U(x)$ y $P_n(\tau) = ap(x,t)$ en donde se introdujo $t = b\tau$ como nueva variable de tiempo. Mostrar que en el límite continuo $a \to 0$, si se escoge convenientemente la nueva escala de tiempo b, $p(x,t)$ cumple la ecuación de Fokker-Planck
$$\frac{\partial p}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left[U'(x)p(x,t)\right] + k_B T \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x,t) \tag{1.2}$$
y expresar b.
6. Considerar ahora el caso de un potencial armónico $U(x) = kx^2/2$.
   a) ¿Cuál es la distribución de probabilidad $p^{\mathrm{eq}}(x)$ final de equilibrio?
   b) ¿Cuál es el tiempo de relaxación característico para llegar a la distribución de equilibrio?

II. El modelo de Potts

Una colección de N átomos están organizados en una cadena (unidimensional) con condiciones periódicas en las fronteras. Cada átomo puede estar en tres estados indexados por un entero $\nu \in \{1, 2, 3\}$. Dos átomos vecinos pueden interactuar con una energía potencial $-J$ si están en el mismo estado o 0 si están en estados diferentes. El hamiltoniano del sistema es entonces

$$H = -J \sum_{i=1}^{N} \delta_{\nu_i, \nu_{i+1}} \tag{2.1}$$

en donde $\delta_{\nu,\nu'}$ es el símbolo de Kronecker y con la convención $\nu_{i+N} = \nu_i$ (condiciones de frontera periódicas). Este modelo se conoce como el modelo de Potts de 3 estados.

1. Calcular la función de partición del sistema usando, por ejemplo, el método de la matriz de transferencia.
2. Determinar la energía libre por átomo del sistema en el límite termodinámico. ¿Existe una transición de fase en este sistema?

III. Renormalización por decimación

En este ejercicio se propone estudiar un método de renormalización llamado decimación y aplicarlo al modelo de Ising unidimensional. Aunque el modelo de Ising unidimensional posee una solución exacta, suponga en este ejercicio que no se conoce esta solución.

El hamiltoniano del modelo de Ising (divido por $k_B T$) es:

$$H = -b \sum_i S_i - K \sum_i S_i S_{i+1} \tag{3.1}$$

El proceso de renormalización por decimación consiste hacer el promedio estadístico sobre los espines impares dejando los pares sin modificar. Así se obtiene un nuevo sistema de Ising, sin los espines impares, de paso de red doble. Luego se escalan las longitudes de 1/2.

Llamemos los espines impares $\sigma_i = S_{2i+1}$ y los pares $S_i' = S_{2i}$.

1. Sumando sobre los espines impares σ_i la función de partición se puede escribir:

$$Z(K, b) = \sum_{\{S_i', \sigma_i\}} e^{-H} = \sum_{\{S_i'\}} \prod_j z(K, b, S_j', S_{j+1}') \tag{3.2}$$

   Calcular $z(K, b, S_j', S_{j+1}')$.

2. Queremos expresar la función de partición bajo la forma:

$$Z(K, b) = Z_0(K, b) Z(K', b') \tag{3.3}$$

   en donde Z_0 no depende de los espines y $Z(K', b')$ es la función de partición del modelo de Ising para los espines S_i' con parámetros renormalizados K' y b'. Mostrar que esto es posible si $z(K, b, S_j', S_{j+1}')$ se puede poner bajo la forma,

$$z(K, b, S_j', S_{j+1}') = e^{-f} \exp\left[\frac{1}{2} b'(S_j' + S_{j+1}') + K' S_j' S_{j+1}'\right] \tag{3.4}$$

   y determinar los parámetros renormalizados K' y b' en función de K y b. Calcular también f. Será útil introducir $\tau = e^{-4K}$ y $\eta = e^{-2b}$, y los correspondientes parámetros renormalizados $\tau' = e^{-4K'}$ y $\eta' = e^{-2b'}$.

3. Verificar que $(\tau^*, \eta^*) = (0,1)$ es un punto de fijo de esta transformación de renormalización y que tanto τ como η son campos de escala relevantes con respecto a este punto fijo.

4. Usando la teoría de la renormalización deducir que cerca a este punto crítico la longitud de correlación y la magnetización cumplen las leyes de escala

$$\xi(\tau, b) \simeq \tau^{-\nu}\Xi(b\tau^{-\Delta}) \tag{3.5}$$
$$m(\tau, b) \simeq M(b\tau^{-\Delta}) \tag{3.6}$$

y dar el valor de los exponentes ν y Δ.

IV. Teoría de Ginzburg–Landau fuera de equilibrio

IV.1. Equilibrio

Considere la teoría de Landau de las transiciones de fase de segundo orden. El "Hamiltoniano" de Landau es

$$H[\phi] = \int \left[\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi(x)}{dx}\right)^2 - \frac{a}{2}\phi(x)^2 + \frac{b}{4}\phi(x)^4\right] dx \tag{4.1}$$

en donde $\phi(x)$ es el parámetro de orden, $a = a_1(T_c - T)$, $a_1 > 0$ y $b > 0$ son constantes. T_c es la temperatura crítica. En lo que sigue supondremos que el sistema está en su fase ferromagnética $T < T_c$, $a > 0$.

En la aproximación de Landau la energía libre está dada por

$$F = H[\phi_0] - \int h(x)\phi_0(x)\, dx \tag{4.2}$$

en donde $h(x)$ es el campo externo y $\phi_0(x)$ minimiza

$$H[\phi] - \int h(x)\phi(x)\, dx \tag{4.3}$$

Además $\phi_0(x) = m(x)$ es la magnetización.

1. Plantear la ecuación de minimización.

2. Resolverla para el caso uniforme y $h = 0$.

En adelante llamaremos m_{eq} la solución de la ecuación de minimización, independiente de x y para el caso general en que $h \neq 0$.

IV.2. Fuera de equilibrio

Para estudiar pequeñas desviaciones con respecto a la situación de equilibrio se plantea la ecuación de Ginzburg–Landau dependiente del tiempo:

$$\frac{\partial m(x,t)}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 m(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial V(m)}{\partial m}\right) \tag{4.4}$$

en donde $V(\phi) = -(a/2)\phi^2 + (b/4)\phi^4 - h\phi$ y $D > 0$ es un coeficiente de transporte.

1. Verificar que la solución de equilibrio satisface (4.4).

2. Suponer una pequeña perturbación con respecto a la solución de equilibrio: $m(x,t) = m_{\rm eq} + \mu(x,t)$, con $\mu(x,t) \ll m_{\rm eq}$. Mostrar que esta perturbación relaja hacia la solución de equilibrio rápidamente. Para esto, linearizar la ecuación (4.4) al primer orden en $\mu(x,t)$ y estudiar la transformada de Fourier con respecto a x de esta ecuación. Determinar el tiempo de relaxación hacia el equilibrio.

3. Para $h = 0$, mostrar que hay configuraciones de equilibrio de la forma

$$m(x) = m_0 \tanh[q(x - x_0)] \tag{4.5}$$

Determinar m_0 y q e interpretar físicamente esta solución (hacer un dibujo, e indicar el significado físico de q).

4. ¿Cuál configuración tiene menor energía libre: la dada por (4.5) o la dada por $m_{\rm eq}$? (Justificar con argumentos físicos, no será necesario hacer un cálculo explícito).

5. En presencia de un pequeño campo magnético h mostrar que hay soluciones del tipo

$$m(x,t) = m_1 \tanh[q(x - x_0 - vt)] + m_2 \tag{4.6}$$

Podrá ser útil expresar las derivadas de $m(x,t)$ en términos de $\mathrm{th} = \tanh[q(x - x_0 - vt)]$ y de sus potencial th^n.

6. Interpretar físicamente este tipo de soluciones (4.6).

7. Determinar m_1, q, v y m_2 al primer orden en h. Comparar el signo de v con el de h y comentar como es la evolución temporal de este tipo de configuraciones.

Apendice

La ecuación de Fokker–Planck

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}\left[a_1(y)P(y,t)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[a_2(y)P(y,t)\right] \tag{A.1}$$

lineal, $a_1(y) = A_0 - A_1 y$, $a_2(y) = B_0$, tiene solución

$$P(y,t) = \frac{e^{-\dfrac{(y - \langle y(t)\rangle)^2}{2\sigma(t)^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma(t)^2}} \tag{A.2}$$

con

$$\langle y(t)\rangle = y_0 e^{-A_1(t-t_0)} + \frac{A_0}{A_1}(1 - e^{-A_1(t-t_0)}) \tag{A.3}$$

y

$$\sigma(t)^2 = \frac{B_0}{2A_1}(1 - e^{-A_1(t-t_0)}) \tag{A.4}$$

para una condición inicial $P(y,t_0) = \delta(y - y_0)$

Universidad de los Andes-Departamento de Física
Examen de Conocimientos: Electrodinámica Clásica
Semestre 2008-II

En 3 dimensiones espaciales, la función $G_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\|}$ es una *función de Green* para el Laplaciano, i.e., satisface

$$\nabla^2 G_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = -4\pi\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'). \tag{1}$$

Para calcular el potencial eléctrico en un problema con condiciones de contorno tipo *Dirichlet* (es decir, el potencial se conoce sobre la superficie S, que es la frontera de alguna región dada V en el espacio) es necesario modificar G_0, añadiéndole una función $F(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')$, de tal forma que la función resultante,

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = G_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') + F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'), \tag{2}$$

satisfaga:

(i) $\nabla^2 G(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') = -4\pi\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')$,

(ii) $G(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') = 0$, para $\boldsymbol{x}'$ en S.

Una vez encontrada la función F, es posible calcular el potencial eléctrico en todo punto de V, a través de la siguiente expresión:

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\boldsymbol{x}')G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')d^3x' - \frac{1}{4\pi}\int_S \Phi(\boldsymbol{x}')\frac{\partial G}{\partial n'}da'. \tag{3}$$

1. Suponga que la región V en cuestión es una bola de radio R, centrada en el orígen, de tal forma que S es una esfera de radio R centrada en el orígen. Muestre que la función $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ correspondiente está dada por

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = -\left(\frac{x^2 x'^2}{R^2} + R^2 - 2xx'\cos\gamma\right)^{-1/2}, \tag{4}$$

donde γ es el ángulo entre $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{x}'$, $x = ||\boldsymbol{x}||$ y $x' = ||\boldsymbol{x}'||$.

2. Suponiendo que el potencial, sobre la superficie de la esfera, está dado por una función $g(\theta, \phi)$, y que no hay cargas eléctricas en el interior de la misma, muestre que el potencial en el interior de la esfera está dado por:

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_S g(\theta', \phi')\frac{R(R^2 - x^2)}{(x^2 + R^2 - 2Rx\cos\gamma)^{3/2}}d\Omega'. \tag{5}$$

3. Una partícula, de carga q, se desplaza a velocidad constante $\boldsymbol{v}$ con respecto a un marco de referencia S. Por simplicidad, suponga que la partícula pasa por el orígen de S en el tiempo $t = 0$, y que, en coordenadas de S, el vector $\boldsymbol{v}$ va dirigido a lo largo del eje x. Calcule los campos $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)$ y $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)$ producidos por la partícula, como los mediría un observador que se encuentra en reposo en el marco S.

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
DEPARTAMENTO DE FISICA
MECANICA CUANTICA
PROBLEMA 1

Considere un hamiltoniano para un sistema de dos estados cuánticos que depende del tiempo, cuya representación en una base completa ortonormal $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ es:

$$\hat{H} = \Omega \cos \omega t \left(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| \right)$$

Considere un operador $\hat{D}$ cuya acción sobre los vectores base $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ esta dada por:

$$\hat{D}|1\rangle = d|2\rangle$$

$$\hat{D}|2\rangle = d|1\rangle$$

Donde d es una constante real positiva. Asuma que el sistema esta inicialmente (t=0) en el estado propio del operador $\hat{D}$ cuyo valor propio es d.

a) Escriba la ecuación de schrödinger dependiente del tiempo para el vector de estado dependiente del tiempo:

$$|\Psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix}$$

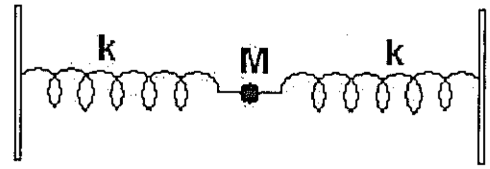
Con el hamiltoniano dado. Encuentre el vector de estado $|\Psi(t)\rangle$ (en términos de $\Omega, \omega, t, \hbar$) usando la información del estado inicial (t=0) dada arriba.

b) En un tiempo posterior t, se efectúa una medición $\hat{D}$ sobre el sistema. Calcule la probabilidad P(t) de obtener el otro valor propio ($\neq$d) de $\hat{D}$ en esta medición.

c) Para un valor dado ω, la medición $\hat{D}$ efectuada en un tiempo t no da una probabilidad de 100% de obtener el segundo valor propio de $\hat{D}$ ($\neq$d), al menos que Ω sea mayor que un valor Ω_{min}. Calcule Ω_{min} en términos de los parámetros de este problema.

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
DEPARTAMENTO DE FISICA
MECANICA CUANTICA
PROBLEMA 2

Una partícula de masa M esta restringida a moverse horizontalmente sobre el eje x. Inicialmente esta atada a dos resortes, sin masa, idénticos, cada uno con constante elástica k, como se muestra en la figura. Cada resorte esta en su posición de equilibrio cuando la partícula esta en el centro (x=0).



a) Determine los niveles de energía propios para este sistema, en términos de los parámetros definidos arriba y especifique el rango permitido de los números cuánticos.

b) Encuentre una expresión explicita para la función de onda, normalizada, del estado base $\psi_0(x)$. Dibuje las funciones de onda correspondientes a los tres niveles de energía más bajos del sistema.

c) Considere el caso donde el sistema esta inicialmente en el estado base. Si uno de los resortes es removido de manera repentina, determine la probabilidad de que el sistema se mantenga en su estado base después de haber removido el resorte.

d) Determine la probabilidad de que el sistema se encuentre en el primer estado excitado después de haberse removido el resorte.

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
DEPARTAMENTO DE FISICA
MECANICA CUANTICA
PROBLEMA 3

Considere un electrón en un potencial esfericamente simétrico. La parte espacial de la función de onda del electrón en el estado propio con energía E_1 del hamiltoniano correspondiente tiene la forma:

$$\psi_1(r) = xf(r)$$

y satisface la condición de normalización:

$$\int d^3r |\psi_1(r)|^2 = 1$$

X es la componente cartesiana del vector posición **r**.

a) Es $\psi_1(r)$ una función propia del operador de momento angular orbital $\hat{L}_z = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial\phi}$? Explique su respuesta.

b) Escriba todas las funciones de onda linealmente independientes asociadas con la misma energía E_1 que están relacionadas por simetría rotacional.

c) Una interacción spin orbita de la forma

$$\hat{H}_{SO} = U_0 \hat{S}.\hat{L}/\hbar^2$$

Con U_0 independiente de r. $\hat{L}, \hat{S}$ son los operadores de momento angular orbital y de spin respectivamente. Para ambos $j = \ell \pm 1/2$ halle a primer orden las correcciones al nivel de energía E_1.

d) Bajo las condiciones de la parte c) considere un electrón inicialmente en el estado $|\psi_1\rangle$ con spin $\uparrow$ sobre el eje z. Halle la probabilidad de que el electrón se mantenga en el estado $|\psi_1\rangle$ con spin $\uparrow$ después de un tiempo t.