Universidad de los Andes
Departamento de Física

Doctorado Ciencias-Física
Examen de conocimientos
Mecánica Estadística

Semestre 2007-2

Duración: 1 hora

Por favor escribir con esfero negro o azul.

Considere el modelo de Ising en dos dimensiones en una red cuadrada, con un campo magnético externo h y acoplamiento entre espines J, cuyo hamiltoniano es

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j - h \sum_i S_i \,. \tag{1}$$

Los espines S_i pueden tomar los valores ± 1, y $\sum_{\langle i,j \rangle}$ significa suma sobre espines primeros vecinos. Sea $\beta = 1/(k_B T)$ la temperatura inversa.

Desarrollar una versión mejorada de la aproximación de campo medio de la siguiente forma:

1. Expresar el campo medio efectivo visto por dos espines primeros vecinos cuando los demás espines son remplazados por su valor promedio $\sigma = \langle S_i \rangle$, en función de h y σ.

2. Usar este campo efectivo para calcular la función de partición de dos espines primeros vecinos bajo esta aproximación.

3. Calcular el valor promedio de uno de los dos espines para encontrar así una ecuación autoconsistente para la magnetización σ. Mostrar que ésta se reduce a

$$\sigma = \frac{\sinh(6\beta J \sigma)}{\cosh(6\beta J \sigma) + e^{-2\beta J}} \tag{2}$$

cuando el campo externo $h = 0$.

4. Mostrar esquemáticamente cómo solucionaría la ecuación (2) de manera gráfica, y determinar que el sistema tiene dos fases, una ferromagnética y otra paramagnética.

5. Determinar de la temperatura crítica de la transición de fase (puede dejarla expresada como solución de una ecuación trascendental).

Universidad de los Andes-Departamento de Física
Examen de Conocimientos: Mecánica Analítica
Semestre 2007-II

---

1. (2.5 puntos) Considere un cuerpo rígido de forma cónica (altura h y base de radio R) y de masa M uniformemente distribuida sobre el volumen del cuerpo. Calcule la posición $\mathbf{R}_{cm}$ del centro de masa y la densidad del cuerpo. Sea J el tensor de inercia de dicho cuerpo, evaluado con respecto a un marco fijo en el cuerpo, con centro en $\mathbf{R}_{cm}$. Calcule los valores propios de J.

2. (2.5 puntos) Considere un sistema Hamiltoniano de un grado de libertad, cuyas ecuaciones de movimiento dan lugar a soluciones periódicas. ¿Cómo se definen las variables de ángulo-acción para un tal sistema? Sea

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

el Hamiltoniano de un oscilador armónico unidimensional. Exprese las variables de ángulo-acción para este Hamiltoniano en términos de las variables canónicas q y p.

Universidad de Los Andes
Departamento de Física
Examen de Conocimiento: Electromagnetismo
Semestre 2007- II

Consider a grounded conducting sphere of radius r the center of which coincides with the origin of the coordinate system. A point charge q is placed at a point, $\mathbf{y}$ outside the sphere.

1. Find the value q' and the position $\mathbf{y}'$ of the image charge inside the sphere. [1]

2. Evaluate the potential Φ at any point $\mathbf{x}$ outside the sphere. [2]

3. Evaluate the surface charge density σ induced on the surface of the sphere. [2]

Solution

a) The potential due to q and q′ at $\vec{x}$ outside the sphere is

$$\phi(\vec{x}) = \frac{q}{|\vec{x}-\vec{y}|} + \frac{q'}{|\vec{x}-\vec{y}\,'|}$$

Then, $\phi(|\vec{x}| = a) = 0$ *gives* $q' = -aq/y$ *and* $y' = a^2/y$

b) The potential at any $\vec{x}$ is (with $\hat{x}$ and $\hat{y}$ unit vectors along $\vec{x}$ and $\vec{y}$, respectively)

$$\phi(\vec{x}) = \frac{q}{|x\hat{x} - y\hat{y}|} - \frac{aq}{y}\frac{1}{|x\hat{x} - \frac{a^2}{y}\hat{y}|}$$

c) σ is related to the discontinuity in the normal component of the electric field across the surface of the sphere:

$$(\vec{E}_{out} - \vec{E}_{in}) \cdot \hat{x} = 4\pi\sigma$$

Since $\vec{E}_{in} = 0$ *and* $\vec{E}_{out} = -\vec{\nabla}\phi$, *one gets,*

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\phi \cdot \hat{x}|_{x=a} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\phi}{\partial x}|_{x=a} = -\frac{1}{4\pi}\frac{q}{ay}\frac{1-a^2/y^2}{(1+a^2/y^2 - 2\hat{x}\cdot\hat{y}\,a/y)^{3/2}}$$