Universidad de los Andes
Departamento de Física

EXAMEN DE CONOCIMIENTOS: MECÁNICA ESTADÍSTICA

Semestre 2006-1

El modelo de Heisenberg para el ferromagnetismo está descrito por un hamiltoniano

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j - \sum_i \mathbf{h} \cdot \mathbf{S}_i \tag{1}$$

en donde $\mathbf{S}_i$ es un vector unitario tridimensional. Los espines están en una red hipercúbica de dimensión d. La constante de acoplamiento es ferromagnética: $J > 0$, y suponemos el campo externo $\mathbf{h}$ uniforme. Sea $h = |\mathbf{h}|$.

Usando la teoría de campo medio encontrar:

1. la temperatura crítica T_c.
2. los exponentes críticos δ, β, γ y γ' que caracterizan el comportamiento de la magnetización m y la susceptibilidad magnética χ cerca al punto crítico:

$$h \sim m^{\delta} \qquad T = T_c,\, h \to 0 \tag{2}$$
$$m \sim (T_c - T)^{\beta} \qquad h = 0,\, T \to T_c,\, T < T_c \tag{3}$$
$$\chi \sim (T - T_c)^{-\gamma} \qquad h = 0,\, T \to T_c,\, T > T_c \tag{4}$$
$$\chi \sim (T_c - T)^{-\gamma'} \qquad h = 0,\, T \to T_c,\, T < T_c \tag{5}$$

Universidad de los Andes-Dpto. de Física
Examen de Conocimientos: Mecánica Analítica
Semestre 2006-I

1.
(1.1) (1 punto) Enuncie el Teorema de Noether.
(1.2) (1 punto) Considere un sistema de N partículas puntuales descritas por el siguiente Lagrangiano ($r_i = (x_i, y_i, z_i)$):

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1} m_i \dot{r}_i^2 - U(r_1, \ldots, r_N).$$

Asumiendo que el sistema es invariante bajo rotaciones en torno los tres ejes coordenados, aplique el Teorema de Noether para encontrar las cantidades que se conservan.

2. (3 puntos) Una partícula cargada (carga= e, masa=m) que se encuentra bajo la influencia de un campo electromagnético, es descrita por la siguiente función de Lagrange ($r = (x, y, z)$):

$$L(r, \dot{r}, t) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - e\phi(r, t) + \frac{e}{c}\dot{r} \cdot A(r, t),$$

donde ϕ representa el potencial eléctrico y A el potencial magnético:

$$\begin{aligned} E(r, t) &= -\nabla\phi(r, t) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}A(r, t) \\ B(r, t) &= \nabla \times A(r, t) \end{aligned}$$

Usando las ecuaciones de Euler-Lagrange, obtenga las ecuaciones de movimiento y expréselas en términos de los campos eléctrico (E) y magnético (B). Cuál es el efecto de una transformación gauge de los potenciales sobre el Lagrangiano? Muestre que, bajo esta transformación, las ecuaciones de movimiento permanecen invariantes.

Universidad de los Andes-Dpto. de Física
Problemas Mecánica Cuántica-Examen de Doctorado
Sem.I/2006

1. Nota=2/5 Considere un sistema físico descrito en un espacio de Hilbert de 2 dimensiones con una base ortonormal dada por los vectores

$$| 1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad | 2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

En esta base, el Hamiltoniano $\hat{H}$ y dos observables $\hat{A}$ y $\hat{B}$ están dados por

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega_0}{3}\begin{pmatrix} 5 & i\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad \hat{A} = \frac{a}{3}\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -i \\ i & -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad , \quad \hat{B} = \frac{b}{3}\begin{pmatrix} 1 & -i4\sqrt{2} \\ i4\sqrt{2} & 5 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

donde ω_0, a y b son constantes reales positivas. El sistema se encuentra descrito al instante $t = 0$ por

$$| \Psi(0)\rangle = \sqrt{\frac{2}{5}}\, | 1\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}}\, | 2\rangle. \tag{3}$$

(a) A $t = 0$ se mide la energía. Cuáles valores se pueden encontrar?. Con cuáles probabilidades cada uno de ellos?. Cuál es el valor medio de la energía en ese momento?.

(b) Suponga que en lugar de medir la energía a $t = 0$ se mide el observable $\hat{B}$. Qué valores se pueden encontrar?. Con qué probabilidades cada uno de ellos?. Cuál es el valor medio del observable $\hat{B}$ en ese momento?.

2. Nota=3/5 Considere un sistema con un sólo estado posible para bosones de energía $E_b > 0$, descrito por operadores creación $\hat{b}^\dagger$ y aniquilación $\hat{b}$, y un sólo estado para fermiones (sin spin!) de energía $E_f < 0$, descrito por operadores creación $\hat{c}^\dagger$ y aniquilación $\hat{c}$. El Hamiltoniano asociado a este sistema es

$$\hat{H} = E_f\hat{c}^\dagger\hat{c} + E_b\hat{b}^\dagger\hat{b} + \hat{W} \tag{4}$$

donde $\hat{W}$ corresponde a una interacción bosón-fermión que será tratada como perturbación y que tiene la forma

$$\hat{W} = U\hat{c}^\dagger\hat{c}(\hat{b}^\dagger + \hat{b}) \tag{5}$$

con U una cantidad real.

(a) Determine el número de fermiones y de bosones que forman el estado fundamental ($| F\rangle$) del sistema no-perturbado ($\hat{W} = 0$). Cuál es la energía $E_F^{(0)}$ de este estado?.

(b) Calcule la correción a primer orden de la energía del estado fundamental por la perturbación $\hat{W}$.

(c) Calcule los elementos no-diagonales de la perturbación $\langle F \mid \hat{W} \mid n, m\rangle$ donde $\mid n, m\rangle$ es un estado excitado del sistema no-perturbado con n bosones y m fermiones.

(d) Calcule la corrección a segundo orden de la energía del estado fundamental por la perturbación

$$E_F^{(2)} = -\sum_{n,m} \frac{|\langle F \mid \hat{W} \mid n, m\rangle|^2}{E_{n,m}^{(0)} - E_F^{(0)}} \tag{6}$$

donde en la suma se debe excluir la pareja de valores de n y m que correspondan al estado fundamental no perturbado.

(e) Considere un estado $\mid G\rangle$ con las siguientes propiedades: (i) $\hat{c}^\dagger \hat{c} \mid G\rangle = \mid G\rangle$ y (ii) $\hat{b} \mid G\rangle = \alpha \mid G\rangle$ donde α es una cantidad compleja. Para cuál valor de α es $\mid G\rangle$ un estado propio de $\hat{H}$ (ver Ec.(4))?. Para esta última situación calcule el valor propio correspondiente de $\hat{H}$.

Universidad de los Andes-Dpto. de Física
Examen de Conocimientos: Electrodinámica
Semestre 2006-I

Two Helmholtz coils with radii R have their axes along the x axis. One coil is in the yz plane and the other is in a parallel plane at x equal R.

(1) (1pt.) Write $B(x)$.

Show that, at the midpoint of the coil (x equal R/2),

(2) (1pt.) $\frac{dB_x}{dx} = 0$.

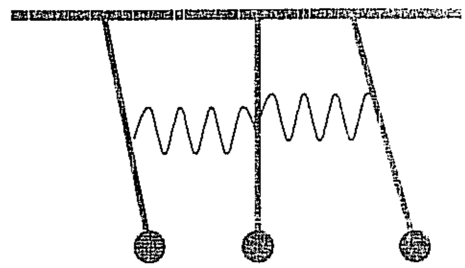
(3) (1pt.) $\frac{d^2B_x}{dx^2} = 0$.

(4) (1pt.) $\frac{d^3B_x}{dx^3} = 0$.

(5) (1pt.) Comment on the practical use of these properties.

(Reminder: Two Helmholtz carry equal currents in such a way that their axial fields add.)

Problema 1



Tomemos un numero N de pendulos de masa m y largo L, que interactuan con resortes angulares a traves de una fuerza $k(\theta_{n+1} - \theta_n)$, con θ_n como la desviación angular con respecto a la vertical del pendulo n.

a) Encuentre el Lagrangiano y las ecuaciones de movimiento para este sistema.
b) Tomemos la distancia entre pendulos como d y tomemos el limite $d \to 0, m \to 0, k \to \infty$, con $\rho = m/d, \eta = kd$ constante y encuentre la ecuación de sine-gordon para el angulo $\theta(x,t)$.
c) Demuestre que la ecuación tiene una solución solitónica con $|\alpha| < 1$

$$\theta(x,t) = 4\tan^{-1} Exp\left[\pm \frac{\frac{\omega x}{v} + \alpha\omega t}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right]$$

Que valor tienen θ y ν?

Util: $Sin\left[4Tan^{-1}x\right] = -\frac{4x\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$

Solución Problema 1

(a) Construimos el Lagragiano como

$$L=\sum_n \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}_n^2 + mgL\cos\theta_n - \frac{1}{2} k\left(\theta_{n+1}-\theta_n\right)^2$$

Hay que tener cuidado si el sistema es finito. Las ecuaciones de movimiento son

$$mL^2\ddot{\theta}_n + mgL\sin\theta_n = k\left[\theta_{n+1}-2\theta_n+\theta_{n-1}\right]$$

(b) En el limite tenemos

$$\ddot{\theta}_n + \frac{g}{L}\sin\theta_n = \frac{kd^2}{mL^2}\left[\frac{\theta_{n+1}-2\theta_n+\theta_{n-1}}{d^2}\right] \simeq \frac{\eta}{\rho L^2}\frac{\partial^2\theta_n}{\partial x^2}$$

$$\ddot{\theta}+\omega^2\sin\theta = \nu^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \omega^2 = \dfrac{g}{L} \\ \nu^2 = \dfrac{\eta}{\rho L^2} \end{cases}$$

(c) Si usamos la identidad propuesta con un poco de algebra se puede probar que la solución funciona con los valores propuestos para ω y ν.