Universidad de los Andes-Dpto. de Física
Problemas Mecánica Cuántica-Examen de Doctorado
Solución
Sem.II/2005

1. **Nota=2/5** Una partícula de masa m y carga q se encuentra confinada por un potencial armónico tridimensional isotrópico, de tal forma que está descrita por el Hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\vec{r}^{\,2} \qquad (1)$$

Note que los estados propios de $\hat{H}$, $\hat{L}^2$ y $\hat{L}_z$ se pueden marcar como $\mid n, l, m\rangle$ donde $n = 0, 1, 2, \ldots$ y $E_n = \hbar\omega(n + \frac{3}{2})$. Al tiempo $t = -\infty$ el oscilador está en su estado fundamental $\mid 0, 0, 0\rangle$. Se le aplica un campo eléctrico dependiente del tiempo pero espacialmente homogéneo y en la dirección z dado por

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon_0 e^{-(\frac{t}{\tau})^2}\hat{z} \qquad (2)$$

con ε_0 y τ constantes.

(a) Encuentre el único estado posible en el cual puede terminar el oscilador al aplicar teoría de perturbaciones a primer orden.

Respuesta.- La amplitud de transición a primer orden en teoría de perturbaciones dependiente del tiempo viene dada por

$$A_{s\longrightarrow k} = -\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_{ks}t}\langle k \mid V(t) \mid s\rangle dt \qquad (3)$$

donde $\omega_{ks} = (E_k - E_s)/\hbar$ y $V(t)$ es la perturbación, que para un campo eléctrico uniforme en la dirección z viene dada por

$$V(t) = -q\int \vec{\varepsilon}\cdot d\vec{l} = -q\varepsilon_0 z e^{-(\frac{t}{\tau})^2} \qquad (4)$$

La amplitud de transición es

$$A_{s\longrightarrow k} = -\frac{i}{\hbar}q\varepsilon_0\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_{ks}t-(\frac{t}{\tau})^2}\langle k \mid z \mid s\rangle dt \qquad (5)$$

Los posibles estados excitados en los cuales podría terminar el oscilador (a primer orden) están determinados por las reglas de selección en los elementos matriciales $\langle k \mid z \mid s\rangle$.

Primero, hay que notar que z (operador dipolar) es la componente $q = 0$ del tensor esférico irreducible de rango 1, $T_{q=0}^{k=1}$. El teorema de Wigner-Eckart inmediatamente conduce a las reglas de selección $\Delta l = \pm 1$ y $\Delta m = 0$. Por lo tanto, desde el estado fundamental $\mid 0, 0, 0\rangle$ sólo se pueden alcanzar los estados $\mid n, 1, 0\rangle$.

Segundo, al reconocer que $z = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a_z^\dagger + a_z)$, la acción del operador z sólo puede aumentar n en 1, lo que indica que el único estado final posible es $\mid 1, 1, 0\rangle$.

(b) Calcular la probabilidad de encontrar el oscilador en el estado excitado determinado en (a) al tiempo $t = \infty$. Recordar $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Respuesta.- Se realiza la integral en la Ec.(5) completando el cuadrado en la exponencial

$$A_{s \longrightarrow k} = \frac{i}{\hbar} q\varepsilon_0 \langle 1,1,0 \mid z \mid 0,0,0\rangle e^{-\frac{\omega_{ks}^2 \tau^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t - i\frac{\omega_{ks}\tau^2}{2})^2/\tau^2} dt \tag{6}$$

$$= \frac{iq\varepsilon_0}{\hbar} \tau \sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega_{ks}^2 \tau^2}{4}} \langle 1,1,0 \mid z \mid 0,0,0\rangle \tag{7}$$

Dado que

$$\langle 1,1,0 \mid z \mid 0,0,0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \tag{8}$$

y $\omega_{ks} = \omega$, se obtiene

$$A_{s \longrightarrow k} == \frac{iq\varepsilon_0}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \tau \sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega_{ks}^2 \tau^2}{4}} \tag{9}$$

La probabilidad es entonces

$$P = \mid A_{s \longrightarrow k} \mid^2 = \frac{q^2 \varepsilon_0^2 \pi}{2m\hbar\omega} \tau^2 e^{-\frac{\omega_{ks}^2 \tau^2}{2}} \tag{10}$$

(c) La probabilidad que ha obtenido en (b) debe anularse para $\tau \longrightarrow 0$ y para $\tau \longrightarrow \infty$. Explique por qué esto debe ser así.

Respuesta.- La perturbación como función del tiempo tiene forma de campana Gaussiana con ancho determinado esencialmente por τ. Para $\tau \longrightarrow 0$ la perturbación prácticamente desaparece por lo cual no hay transición. Para $\tau \longrightarrow \infty$ la perturbación es tan lenta que se está en el régimen adiabático en el cual el sistema se mantiene todo el tiempo en el estado fundamental y por lo tanto no hay transición.

(d) Si en cambio el estado del oscilador al tiempo $\tau = -\infty$ hubiese sido $\mid 1,1,0\rangle$, demuestre que la probabilidad de que termine en el estado fundamental $\mid 0,0,0\rangle$ al tiempo $\tau = \infty$ es idéntica a la encontrada en la parte (b).

Respuesta.- La amplitud de transición para este proceso sigue dada por la Ec.(5) con los cambios $\omega_{ks} = -\omega$ y $\langle k \mid z \mid s\rangle = \langle 0,0,0 \mid z \mid 1,1,0\rangle$. Por lo tanto estos cambios no afectan el resultado dado para la probabilidad de la transición en la Ec.(10).

2. **Nota=3/5** Considere un sistema compuesto por dos partículas independientes de spin 1/2. El estado inicial del sistema es

$$\mid \Psi(0)\rangle = A\left(\mid +,+\rangle + \mid +,-\rangle + \sqrt{2} \mid -,-\rangle\right) \tag{11}$$

donde el anterior estado se ha expresado en la base de vectores propios simultáneos de $\hat{S}_{1z}$ y $\hat{S}_{2z}$, $\{\mid \pm,\pm\rangle\}$.

(a) Normalice el anterior estado.

Respuesta.- $A = \frac{1}{2}$.

(b) Escriba la matriz densidad asociada al sistema en el anterior estado.

Respuesta.- En la base ordenada $\{|+,+\rangle, |+,-\rangle, |-,+\rangle, |-,-\rangle\}$ la matriz densidad asociada al estado puro de la Ec.(11) se escribe

$$\rho(0) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{12}$$

(c) Si en ese momento $t = 0$ se mide $\hat{S}_{1z}$, calcule la probabilidad de obtener el resultado $-\frac{\hbar}{2}$.

Respuesta.- La probabilidad es

$$P(-\frac{\hbar}{2}) = Tr\{\rho(0)\hat{P}_-\} \tag{13}$$

donde el proyector $\hat{P}_-$ al sub-espacio donde el primer spin tiene componente z igual a $-\frac{\hbar}{2}$ viene dado por $\hat{P}_- = |-,+\rangle\langle -,+| + |-,-\rangle\langle -,-|$. Por lo tanto se obtiene

$$P(-\frac{\hbar}{2}) = \frac{1}{4}Tr\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \tag{14}$$

(d) Inmediatamente después de la anterior medición escriba la matriz densidad del sistema.

Respuesta.- La medición proyecta el estado del sistema a $|\Psi'(0)\rangle = |-,-\rangle$ con una matriz densidad correspondiente

$$\rho'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

(e) Si después de la medición anterior se midiera $\hat{S}_{1x}$ qué resultados se encontrarían y con cuáles probabilidades?.

Respuesta.- Los resultados posibles al medir $\hat{S}_{1x}$ sólo siguen siendo $\pm\hbar/2$ cada uno de ellos con probabilidad $\frac{1}{2}$.

(f) Si $\hat{S}_{1z}$ y $\hat{S}_{2z}$ se midieran simultáneamente cuando el sistema se encuentra en el estado dado por la Ec.(11), calcule la probabilidad de encontrar resultados opuestos.

Respuesta.- La probabilidad de obtener resultados opuestos viene dada por

$$P_z(\frac{\hbar}{2},-\frac{\hbar}{2})+P_z(-\frac{\hbar}{2},\frac{\hbar}{2}) = \mid \langle +,- \mid \Psi(0)\rangle \mid^2 + \mid \langle -,+ \mid \Psi(0)\rangle \mid^2 \tag{16}$$

$$= (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \tag{17}$$

(g) Si empezando con el estado de la Ec.(11) al sistema se le hace interactuar con un campo magnético que determina un Hamiltoniano dado por

$$\hat{H} = \omega_1 \hat{S}_{1z} + \omega_2 \hat{S}_{2z} \tag{18}$$

determine la matriz densidad en el tiempo t.

Respuesta.- El estado del sistema al instante t viene dado por

$$\mid \Psi(t)\rangle = \frac{1}{2}(e^{-i\frac{(\omega_1+\omega_2)t}{2}} \mid +,+\rangle + e^{-i\frac{(\omega_1-\omega_2)t}{2}} \mid +,-\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{(\omega_1+\omega_2)t}{2}} \mid -,-\rangle \tag{19}$$

con una matriz densidad correspondiente

$$\rho(t) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & e^{-i\omega_2 t} & 0 & \sqrt{2}e^{-i(\omega_1+\omega_2)t} \\ e^{i\omega_2 t} & 1 & 0 & \sqrt{2}e^{-i\omega_1 t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}e^{i(\omega_1+\omega_2)t} & \sqrt{2}e^{i\omega_1 t} & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{20}$$

Universidad de los Andes
Departamento de Física

Examen de conocimientos
Seccion II
A. Electrodinamica

Neelima G. Kelkar

Agosto 15 de 2005

Together with the Lorentz force law, the Maxwell's equations summarize the entire theoretical content of classical electrodynamics. Hence,
(a) state the four standard Maxwell's equations in differential form.

(b) Show that the conservation of charge follows from one of these equations.

(c) If one day the existence of magnetic charges is confirmed, Maxwell's equations would modify. State the Maxwell's equations in the presence of magnetic charges.

(d) Consider a charge density $\rho(\mathbf{r}, t)$ and current density $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ in an otherwise empty space. In the Coulomb gauge, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, write down the wave equation for the vector potential $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ and an expression for the scalar potential $\phi(\mathbf{r}, t)$.

Useful identities:
$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$
$\nabla \times (\nabla f) = 0$
$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

B. Mecánica Cuantica

Luis Quirroga

1. **Nota=2/5** Una partícula de masa m y carga q se encuentra confinada por un potencial armónico tri-dimensional isotrópico, de tal forma que está descrita por el Hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\vec{r}^{\,2} \tag{1}$$

Note que los estados propios de $\hat{H}$, $\hat{L}^2$ y $\hat{L}_z$ se pueden marcar como $\mid n, l, m\rangle$ donde $n = 0, 1, 2, \ldots$ y $E_n = \hbar\omega(n + \frac{3}{2})$. Al tiempo $t = -\infty$ el oscilador está en su estado fundamental $\mid 0, 0, 0\rangle$. Se le aplica un campo eléctrico dependiente del tiempo pero espacialmente homogéneo y en la dirección z dado por

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon_0 e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}\hat{z} \tag{2}$$

con ε_0 y τ constantes.

(a) Encuentre el único estado posible en el cual puede terminar el oscilador al aplicar teoría de perturbaciones a primer orden.

(b) Calcular la probabilidad de encontrar el oscilador en el estado excitado determinado en (a) al tiempo $t = \infty$. Recordar $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

(c) La probabilidad que ha obtenido en (b) debe anularse para $\tau \longrightarrow 0$ y para $\tau \longrightarrow \infty$. Explique por qué esto debe ser así.

(d) Si en cambio el estado del oscilador al tiempo $\tau = -\infty$ hubiese sido $\mid 1, 1, 0\rangle$, demuestre que la probabilidad de que termine en el estado fundamental $\mid 0, 0, 0\rangle$ al tiempo $\tau = \infty$ es idéntica a la encontrada en la parte (b).

2. **Nota=3/5** Considere un sistema compuesto por dos partículas independientes de spin 1/2. El estado inicial del sistema es

$$\mid \Psi(0)\rangle = A\Big(\mid +, +\rangle + \mid +, -\rangle + \sqrt{2}\mid -, -\rangle\Big) \tag{3}$$

donde el anterior estado se ha expresado en la base de vectores propios simultáneos de $\hat{S}_{1z}$ y $\hat{S}_{2z}$, $\{\mid \pm, \pm\rangle\}$.

(a) Normalice el anterior estado.

(b) Escriba la matriz densidad asociada al sistema en el anterior estado.

(c) Si en ese momento $t = 0$ se mide $\hat{S}_{1z}$, calcule la probabilidad de obtener el resultado $-\frac{\hbar}{2}$.

(d) Inmediatamente después de la anterior medición escriba la matriz densidad del sistema.

(e) Si después de la medición anterior se midiera $\hat{S}_{1x}$ qué resultados se encontrarían y con cuáles probabilidades?.

(f) Si $\hat{S}_{1z}$ y $\hat{S}_{2z}$ se midieran simultáneamente cuando el sistema se encuentra en el estado dado por la Ec.(3), calcule la probabilidad de encontrar resultados opuestos.

(g) Si empezando con el estado de la Ec.(3) al sistema se le hace interactuar con un campo magnético homogéneo que determina un Hamiltoniano dado por

$$\hat{H} = \omega_1\hat{S}_{1z} + \omega_2\hat{S}_{2z} \tag{4}$$

determine la matriz densidad en el tiempo t.

Universidad de los Andes
Departamento de Física

Examen de conocimientos
Seccion I
A. Mecanica Clasica

Alejandro Valdivia

Agosto 15 de 2005

1. Tomemos un numero N de pendulos de masa m y largo L, que interactuan con resortes angulares a traves de una fuerza k(θ_{n+1}g − gθ_ng, con θ_n como la desviación angular con respecto a la vertical del pendulo n.

   a) Encuentre el Lagrangiano y las ecuaciones de movimiento para este sistema.

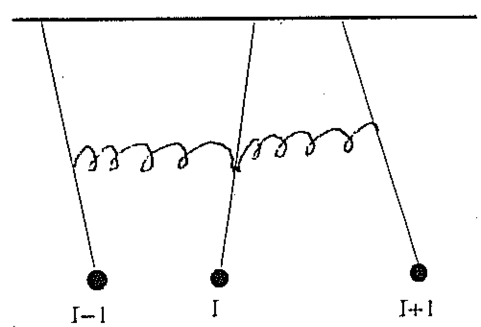
   b) Tomemos la distancia entre pendulos como d y tomemos el limite $d \to 0, m \to 0, k \to \infty$, con $\rho = m/d, \eta = kd$constante y encuentre la ecuación de sine-gordon para el angulo $\theta(x, t)$.

   c) Demuestre que la ecuación tiene una solución solitónica con $|\alpha| < 1$

$$\theta(x,t) = 4\tan^{-1} Exp\left[\pm\frac{\frac{\omega x}{\nu} + \alpha\omega t}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right]$$

Que valor tienen θ y $\ddot{\nu}$?

Util: $Sin\left[4Tan^{-1}x\right] = -\frac{4x(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$



B. Mecánica Estadística

Gabriel Tellez

El modelo XY en aproximación de ondas de espín

El modelo XY describe una colección de N espines sobre una red. Cada espín $\mathbf{S}_n$ es clásico: es un vector dos dimensiones, de norma $|\mathbf{S}_n| = 1$ y hace un ángulo ϕ_n con respecto a un eje de referencia fijo.

El hamiltoniano del sistema es

$$H = -J \sum_{<i,j>} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \tag{1}$$

en donde se suma únicamente sobre vecinos más cercanos en la red, y la constante de acoplamiento $J > 0$.

1. Mostrar que

$$H = -J \sum_{<i,j>} \cos(\phi_i - \phi_j) \tag{2}$$

2. La aproximación de ondas de espín consiste en suponer que las diferencias $|\phi_i - \phi_j| \ll 1$. Explicar por qué esta aproximación es válida a altas temperaturas, y precisar "altas" temperaturas" con respecto a qué.

3. Mostrar que en la aproximación de ondas de espín el hamiltoniano $H \simeq H_{\text{ods}} + C$, con

$$H_{\text{ods}} = \frac{J}{2} \sum_{<i,j>} (\phi_i - \phi_j)^2 \tag{3}$$

   En lo que sigue nos olvidaremos la constante C que sólo agrega un termino aditivo a la energía.

4. A pesar de que inicialmente $0 \leq \phi_n < 2\pi$, en la aproximación de onda de espín supondremos que $-\infty < \phi_n < \infty$. Justificar por qué se puede extender el rango de valores de ϕ_n de esa manera.

5. A partir de ahora nos limitamos a considerar una red unidimensional con condiciones periódicas de frontera: $\phi_{N+1} = \phi_1$. Mostrar que

$$H_{\text{ods}} = \frac{J}{2} \sum_{n=1}^{N} (\phi_n - \phi_{n+1})^2 \tag{4}$$

6. Se introducen las componentes de Fourier del campo ϕ_n:

$$\hat{\phi}_q = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} e^{iqn} \phi_n \,, \tag{5}$$

   con el vector de onda $q = 2\pi k/N$ con $k = 0, 1, \cdots, N-1$.

   Mostrar que la transformación inversa es

$$\phi_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q e^{-iqn} \hat{\phi}_q \,. \tag{6}$$

7. Mostrar que si uno prolonga la validez de la ecuación anterior para cualquier valor entero de n, se tiene $\phi_{n+N} = \phi_n = \phi_{n-N}$.

8. Mostrar que la relación (5) da el mismo conjunto de $\{\hat{\phi}_q\}$ si se escoge el vector de onda $q = 2\pi k/N$ en donde k recorre cualquier secuencia de N enteros consecutivos.

9. Así escogemos a partir de ahora $k = -N/2+1, -N/2+2, \cdots, N/2$, y supondremos que N es par. Mostrar entonces que $-\pi < q \leq \pi$. Decimos que q está en la primera zona de Brillouin.

10. Mostrar que $\hat{\phi}_{-q} = \overline{\hat{\phi}_q}$, en donde la barra denota el complejo conjugado.

11. Mostrar sucesivamente que

$$\begin{aligned} H_{\text{ods}} &= J \sum_{-\pi<q\leq\pi} (1-\cos q)\, \hat{\phi}_q \hat{\phi}_{-q} && (7) \\ &= 2J \sum_{0<q<\pi} (1-\cos q)\, |\hat{\phi}_q|^2 + 2J\hat{\phi}_\pi^2 && (8) \end{aligned}$$

12. Expresar H_{ods} en términos de las partes real e imaginaria de $\phi_q = R_q + iI_q$.

13. Integrar sobre R_q e I_q de $-\infty$ a $+\infty$ y calcular la función de partición del modelo XY en aproximación de onda de espín a la temperatura inversa $\beta = 1/(k_B T)$, $Z_{\text{ods}} = \int e^{-\beta H_{\text{ods}}} \prod_q dR_q\, dI_q$. Mostrar que

$$Z_{\text{ods}} = \prod_{q\neq 0} \left(\frac{\pi}{\beta J(1-\cos q)} \right)^{1/2} \tag{9}$$

14. Mostrar que la energía libre en el límite termodinámico es

$$F = -\frac{N}{2} k_B T \ln \frac{2\pi k_B T}{J} \tag{10}$$

15. ¿Hay una transición de fase para este modelo?

Apéndice

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2/2}\, dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}, \qquad \Re e(a) > 0$$