



Universidad de los Andes

Departamento de Física

EXAMEN DE CONOCIMIENTOS: MECÁNICA CUÁNTICA

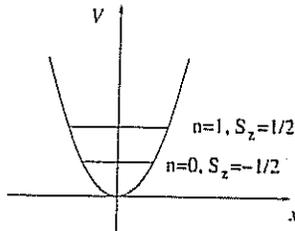
Tema 1

Semestre 2003-1

Un átomo de masa M y espín $S = 1/2$ está dentro de un potencial armónico en la dirección x y sometido además a un campo magnético uniforme de magnitud B_0 siguiendo el eje z . El Hamiltoniano está dado por

$$H_0 = \hbar\omega_0 \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) - \frac{\mu_0 B_0}{\hbar} \hat{S}_z \quad (1)$$

en donde μ_0 tiene unidades de momento magnético. Los operadores de aniquilación y creación del oscilador armónico obedecen las reglas usuales: $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ y $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ respectivamente.



- ¿Cuales son los valores propios de H_0 para los dos estados mostrados en la figura?
- ¿Cómo debe ser escogido el campo magnético B_0 para que estos dos estados sean degenerados?

Un pequeño gradiente uniforme de campo B'_x es aplicado siguiendo la dirección x . Esto lleva a una perturbación

$$H' = -\frac{\mu_0 B'_x}{\hbar} \hat{x} \hat{S}_x \quad (2)$$

Aquí el operador posición está dado por

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{M\omega_0}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (3)$$

La componente x del operador de espín es $\hat{S}_x = (S_+ + S_-)/2$ con

$$S_\pm |s, m\rangle = \hbar \sqrt{(s \mp m)(s \pm m + 1)} |s, m \pm 1\rangle \quad (4)$$

- C. Encuentre los valores propios y los estados propios del Hamiltoniano total $H = H_0 + H'$ para el caso B en donde los dos estados están sintonizados en degeneramiento exacto antes de aplicar la perturbación. De los estados propios en la base de los dos estados de la pregunta A.



Universidad de los Andes

Departamento de Física

EXAMEN DE CONOCIMIENTOS: MECÁNICA CUÁNTICA

Tema 2

Semestre 2003-1

1. Considere la descripción de electrones de spin un medio. Suponga que identificamos los estados Ψ_+ y Ψ_- por los valores propios de spin S_z sobre el eje z , $S_z = \frac{1}{2}\hbar\sigma_z$:

$$\sigma_z \Psi_+ = +\Psi_+ \quad (1)$$

$$\sigma_z \Psi_- = -\Psi_- \quad (2)$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

- a) ¿Qué son Ψ_+ y Ψ_- como espinores de dos componentes?
- b) ¿Cuáles son los vectores propios de $\vec{\sigma} \cdot \hat{n}$ en términos de Ψ_+ y Ψ_- en donde $\hat{n} = \cos\theta \hat{z} + \sin\theta \hat{x}$?

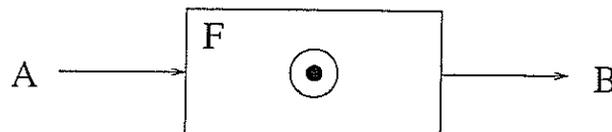
En las siguientes preguntas consideramos el paso de electrones a través de una serie de filtros F y un desviador de haz D . Igual que en el experimento de Stern-Gerlach, cada filtro sólo deja pasar electrones con proyección del spin en la dirección de las flechas.

Ejemplo : El filtro



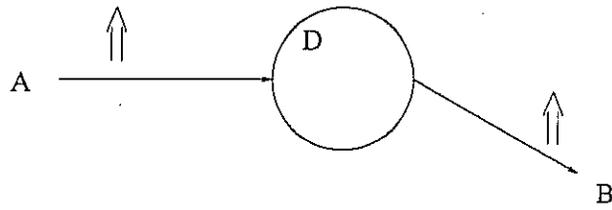
sólo deja pasar electrones de A a B que tienen el spin hacia arriba en el plano de la hoja.

El filtro



sólo deja pasar electrones de A a B que tienen el spin hacia afuera del plano de la hoja.

El desviador del haz sólo cambia la dirección del movimiento de la partícula y no cambia la dirección del spin.



Suponga que en las siguientes situaciones en el punto P entran N_0 electrones sin polarización.
 ¿Cuántos electrones salen en Q ?

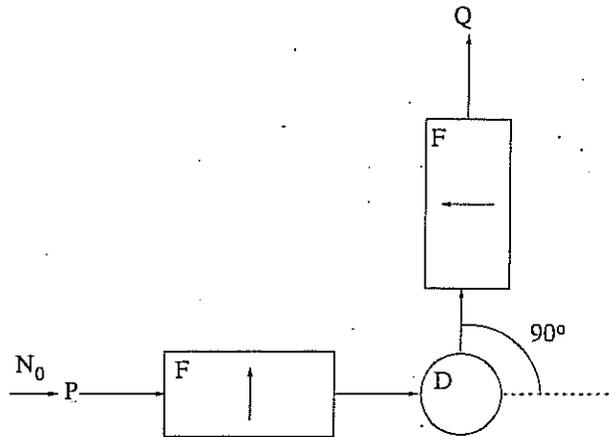
c)



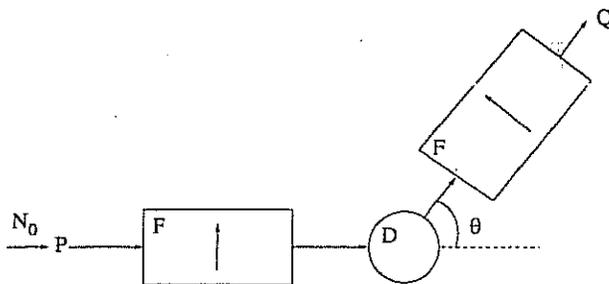
d)



e)



f)





Universidad de los Andes
Departamento de Física

EXAMEN DE CONOCIMIENTOS:
MECÁNICA ANALÍTICA

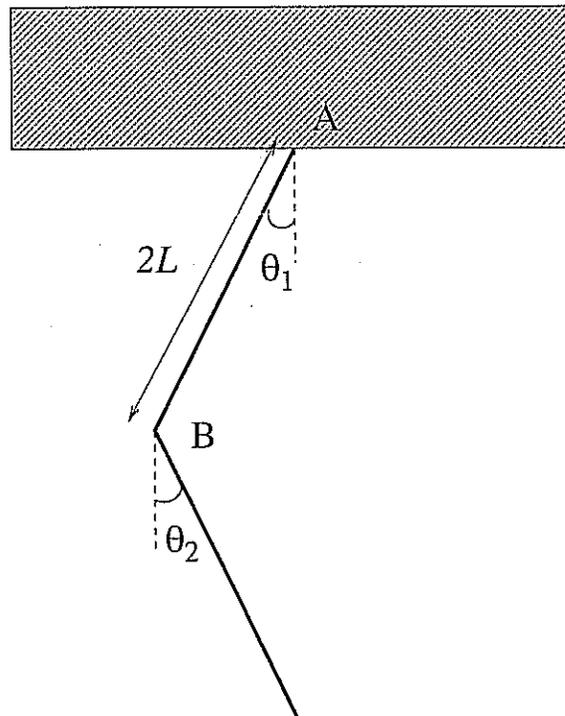
Tema 1

Semestre 2003-1

1. Se cuelgan del techo dos varas delgadas uniformes como muestra la figura. Cada vara tiene masa M y longitud $2L$. En los puntos A y B hay pivotes sin fricción, y el movimiento se realiza en un plano vertical.

Resuelva el movimiento del sistema como función del tiempo para pequeños desplazamientos desde equilibrio, o sea, $\theta_1 \ll 1$, $\theta_2 \ll 1$. Discuta los modos normales.

Nota : El momento de inercia de una vara de largo $2L$ respecto a un eje perpendicular a la vara que pasa por su centro de masa es $I = \frac{1}{3}ML^2$.





Universidad de los Andes

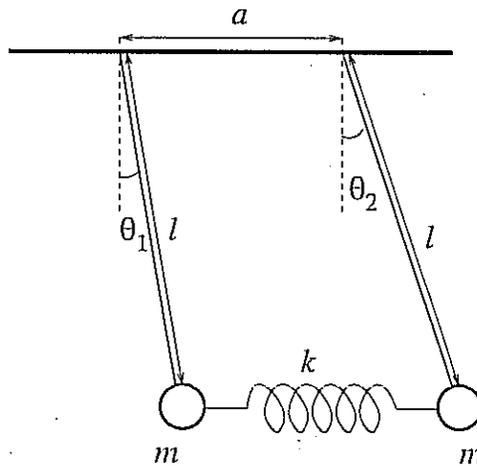
Departamento de Física

EXAMEN DE CONOCIMIENTOS: MECÁNICA ANALÍTICA

Tema 2

Semestre 2003-1

Dos partículas de masa m cuelgan de varas rígidas sin masa de largo ℓ como se muestra en la figura. El resorte que une las dos masas tiene una constante k y una longitud en reposo a . Asuma que θ_1 y θ_2 son pequeños.



1. Escriba las energías cinética y potencial del sistema.
2. Escriba las ecuaciones de Euler-Lagrange en forma matricial.
3. Encuentre los valores propios (frecuencias propias) y vectores propios (modos normales).



Universidad de los Andes
Departamento de Física

EXAMEN DE CONOCIMIENTOS: MECÁNICA ESTADÍSTICA

Tema 1

Semestre 2003-1

Un gas sobre red (lattice-gas) consiste en una red de N sitios, cada sitio puede estar vacío (con energía cero) u ocupado por una partícula en cuyo caso tiene energía ϵ . Además cada partícula tiene un momento magnético μ que en presencia de un campo magnético externo H puede adoptar dos configuraciones (paralela o anti-paralela) con una energía adicional $\pm\mu H$. El sistema está en equilibrio térmico con un termostato a la temperatura T .

- En presencia del campo externo H , calcular la función de partición del sistema.
- Evaluar la energía promedio y la magnetización del sistema.



Universidad de los Andes
Departamento de Física

EXAMEN DE CONOCIMIENTOS: MECÁNICA ESTADÍSTICA

Tema 2

Semestre 2003-1

Tres partículas en las esquinas de un triángulo equilátero tienen cada una un espín mecánico-cuántico de $1/2$. Su hamiltoniano mutuo es

$$H = \frac{\lambda}{3} (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_1 \cdot \sigma_3 + \sigma_2 \cdot \sigma_3) . \quad (1)$$

Enumere los niveles de energía de este sistema de espines, dando el valor del espín total y su degeneramiento. Deduzca la función de partición Z .



Universidad de los Andes

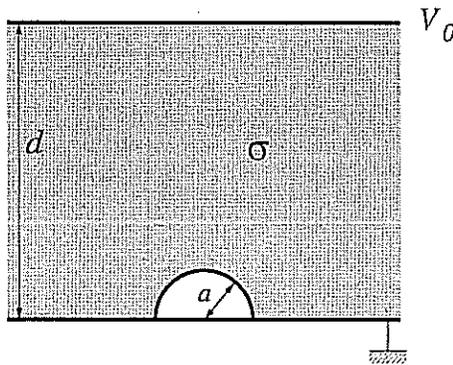
Departamento de Física

EXAMEN DE CONOCIMIENTOS: ELECTRODINÁMICA

Tema 1

Semestre 2003-1

1. Una esfera metálica de radio R sin carga está situada en un campo eléctrico inicialmente uniforme $\mathbf{E} = E_0 \hat{z}$. Encuentre el potencial electrostático en la región afuera de la esfera.
2. Dos placas paralelas muy largas están separadas por una distancia d , una de ellas al potencial 0, la otra al potencial V_0 . Se corta una esfera metálica (llena) de radio a ($a \ll d$) y un hemisferio se pone sobre la placa a tierra así que su potencial es cero. La región entre las placas está llena de un material ligeramente conductor de conductancia σ (ver figura). ¿Cuanto vale la corriente que fluye por la media esfera?





Universidad de los Andes
Departamento de Física

EXAMEN DE CONOCIMIENTOS:
ELECTRODINÁMICA

Tema 2

Semestre 2003-1

Considere dos cargas oscilantes $q(t) = q_0 \cos(\omega t)$ y $-q(t)$ sobre el eje z separadas por una distancia d .

1. Exprese el potencial retardado de este dipolo oscilante.
2. ¿Cuáles son las aproximaciones apropiadas que uno puede hacer para estudiar la radiación del dipolo?
3. Bajo estas aproximaciones obtenga una expresión para el potencial eléctrico, la corriente y el potencial vector.
4. Calcule los campos eléctrico y magnético de la radiación del dipolo.