Universidad de los Andes

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

MÉTODOS MATEMÁTICOS AVANZADOS

(FISI-3007, FISI-4007)

Profesor: Gabriel Téllez

gtellez@uniandes.edu.co

Oficina Ip 501

Semestre 2022-2

I. Presentación

En la historia de la ciencia, la física y las matemáticas han tenido un fructífero desarrollo común en donde ideas de la física permiten desarrollar nuevas teorías y objetos matemáticos, y vice-versa. Las matemáticas son el lenguaje cuantitativo y universal de las ciencias, en particular de la física. Por lo tanto, todo físico debe tener una sólida formación matemática y haber desarrollado en su carrera competencias matemáticas que le permitan abordar con éxito los problemas teóricos que se plantean al estudiar, modelar y resolver diversos problemas físicos. Este curso complementa la formación matemática de la carrera de Física después del ciclo terminado en "Métodos Matemáticos" (FISI-2007). Se explorarán en más detalle las teorías asociadas a las ecuaciones diferenciales de la física tales como la teoría de Sturm-Liouville y el estudio de las singularidades en ecuaciones diferenciales. Esto permitirá entender mejor las propiedades de las soluciones de estas ecuaciones y sus aplicaciones en problemas físicos. Este estudio lleva naturalmente a introducir y estudiar un buen número de funciones especiales, tales como los polinomios ortogonales de Hermite, Laguerre y Jacobi, las funciones beta y gamma de Euler, la función hipergeométrica de Gauss y las funciones elípticas.

II. Duración, créditos y requisitos

Es un curso de nivel de posgrado pero abierto a estudiantes de pregrado que cumplan con los pre-requisitos. La duración del curso es de 16 semanas. El curso es de 4 créditos que supone una dedicación semanal de 12 horas repartidas en 3 horas de clase presencial y 9 horas de trabajo individual, siguiendo la proporción 1 hora presencial, 3 de trabajo individual, usual para cursos de posgrado. Los requisitos previos son:

- Estudiantes de Posgrado de Física o Matemáticas: sin pre-requisitos.
- Estudiantes de Pregrado: pre-requisito: Métodos Matemáticos (FISI-2007) O (Cálculo de Variable Compleja (MATE-2211) Y Ecuaciones Diferenciales (MATE-2301)).

III. Objetivos

El principal objetivo del curso es complementar la formación matemática necesaria para la física. Este objetivo se alinea con los siguientes objetivos del programa de pregrado en Física:

- Fomentar en los estudiantes una forma de pensar crítica y analítica, acorde con el método científico.
- Preparar a los estudiantes para identificar un problema científico, plantearlo, modelarlo y comunicar sus resultados en forma adecuada.
- Capacitar a los estudiantes con herramientas teóricas, experimentales y computacionales para enfrentar problemas de carácter científico y tecnológico.

IV. Competencias a desarrollar

Al finalizar el curso los estudiantes habrán desarrollado las siguientes competencias:

- Saber aplicar la teoría de Sturm-Liouville y la teoría de series de Fourier generalizadas a la resolución de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden.
- Poder construir bases de espacios de Hilbert con ayuda de polinomios ortogonales para resolver distintos problemas físicos.
- Identificar las singularidades de una ecuación diferencial lineal y determinar el comportamiento de sus soluciones cerca a los puntos singulares.
- Transformar ecuaciones diferenciales con tres singularidades regulares en la ecuación hipergeométrica y encontrar su solución en términos de la función hipergeométrica de Gauss.
- Resolver algunos problemas físicos no lineales con ayuda de las funciones elípticas.
- Adquirir una familiaridad, facilidad de manipulación y uso de las funciones especiales (polinomios ortogonales de Hermite, Laguerre y Jacobi, las funciones beta y gamma de Euler, la función hipergeométrica de Gauss y las funciones elípticas), al mismo nivel que se tiene con las funciones especiales habituales (funciones trigonométricas, hiperbólicas, exponencial y logaritmo).

V. Metodología

El curso contiene una presentación teórica de los temas además de ejemplos y ejercicios a desarrollar en clase o en tarea.

1. **Tareas.** Durante el semestre se repartirán varias tareas para desarrollar fuera de clase y entregar posteriormente al profesor. Las tareas son *individuales.* En general se dará de una a dos semanas de tiempo para desarrollar las tareas.
2. **Ejercicios en clase.** Según el calendario definido cada estudiante pasará, en varias ocasiones durante el semestre, al tablero a desarrollar un ejercicio, él cual será calificado con una nota. La nota final de los ejercicios orales será el promedio de las notas obtenidas.

VI. Evaluación

- 2 exámenes parciales: 25 % cada uno.
- Tareas: 20 %
- Ejercicios en clase: 5 %
- Examen final: 25 %

VII. Programa

1. Teoría de Sturm–Liouville de las ecuaciones diferenciales lineales: operadores lineales auto-adjuntos, funciones ortogonales, series de Fourier generalizadas. Aplicaciones a ecuaciones de onda, funciones de Green. (3 semanas).
2. Polinomios ortogonales: teoría general y polinomios ortogonales clásicos: Hermite, Laguerre, Jacobi (Ultraesféricos, Legendre, Chebyshev). Aplicaciones a sistemas de fermiones independientes, osciladores armónicos, átomo de hidrógeno. (4 semanas).
3. Integrales de Euler de primera y segunda especie: función gamma, función psi, función beta. (1 semana).
4. Teoría de las singularidades regulares de las ecuaciones diferenciales lineales. Ecuaciones diferenciales lineales con tres puntos singulares regulares: ecuación diferencial de Riemann. Ecuación diferencial hipergeométrica de Gauss. Función hipergeométrica. (4 semanas).
5. Funciones elípticas (funciones meromorfas doblemente periódicas). Función $\wp$ de Weierstrass. Funciones theta. Funciones elípticas de Jacobi. Aplicaciones: ecuación de difusión, osciladores anarmónicos, el péndulo simple. (4 semanas).

VIII. Bibliografía

- G. Téllez, Métodos matemáticos, segunda edición extendida, ediciones Uniandes, 2022 (texto guía).
- E. T. Whittaker y G. N. Watson, A Course of Modern Analysis, Cambridge University Press, 4ed, 1927.
- I. S. Gradshteyn y I. M. Ryzhik. Table of integrals, series, and products. Academic Press, 5 ed., 1994.
- R. Courant y D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics, Interscience Publisher, 1953.
- G. Arfken, H. J. Weber, y F. E. Harris. Mathematical methods for physicists. Academic Press, Elsevier, 7 ed., 2013.
- G. Birkhoff and G.-C. Rota, Ordinary differential equations, Blaisdell publishing company, 2ed, 1969.
- M. A. Al-Gwaiz, Sturm-Liouville theory and its applications, Springer, 2008.
- G. Szegö, Ortogonal polynomials, American Mathematical Society, 1939.
- B.G. Spencer Doman, The classical orthogonal polynomials, World Scientific, 2016.
- M. Abramowitz y I. Stegun, Handbook of mathematical functions, Dover Publications, 1965.
- E. Hille. Ordinary differential equations in the complex domain. Dover publications, Inc., 1976.
- E. L. Ince. Ordinary Differential Equations. Dover, 1956.
- D. F. Lawden. Elliptic Functions and Applications. Springer-Verlag, 1989.
- W. M. Schwalm. Lectures on Selected Topics in Mathematical Physics: Elliptic Functions and Elliptic Integrals. Morgan & Claypool Publishers, 2015.
- S. Lang. Elliptic Functions. Springer-Verlag, 2 ed., 1987.